Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

FÁBIO BARROS GONÇALVES

MIGUEL CHAQUIAM

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA
PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Belém

2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

GONÇALVES, Fábio Barros e CHAQUIAM, Miguel. Uma sequência didática para o ensino de função quadrática. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Sequência didática; Função quadrática.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Não restam dúvidas quanto à importância da Matemática para melhor nos ajudar a compreender os variados fenômenos que ocorrem, em diferentes contextos, na atual sociedade em que vivemos e, a partir dessa compreensão, buscar transformar pessoas por meio da apropriação do conhecimento matemático, fato que pode ajudar na ampliação da capacidade crítica das mesmas e, consequentemente, no desenvolvimento de uma sociedade mais igualitária.

Notadamente, emerge a necessidade de compreender e de saber aplicar a Matemática em diferentes contextos, sejam eles do cotidiano, de outras áreas do conhecimento ou da própria ciência Matemática.

Entretanto, o cenário atual, revelado por diferentes indicadores, sobre o desempenho escolar dos jovens brasileiros na disciplina Matemática, é preocupante e, portanto, deve ser levado em consideração no que tange ao processo de ensino e de aprendizagem dessa disciplina no nosso país e, em especial na Região Norte.

Dentre os objetos matemáticos, cujas habilidades e competências são avaliadas por diferentes instrumentos, encontra-se função quadrática. Este tema geralmente é trabalhado com os estudantes do 1º ano do Ensino Médio e está previsto nos documentos oficiais relacionados ao currículo, assim como, de forma direta ou indireta, nos descritores de matemática das Matrizes de Referência do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), do SISPAE (Sistema Paraense de Avaliação da Educação) e do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Se por um lado, os resultados de algumas pesquisas desenvolvidas no Estado do Pará, Santos (2010) e Gonçalves *et al* (2017), apontam que a forma como geralmente os conteúdos matemáticos relacionados à função quadrática são ensinados no Ensino Básico é por intermédio do método tradicional de ensino, assim denominado por basear-se somente em aulas expositivas, na qual a tríade sequencial - definição, seguida de exemplos e exercícios – direciona todo o processo de ensino e de aprendizagem dos objetos matemáticos no contexto escolar da sala de aula. Por outro lado, os autores citados sinalizam para a necessidade da utilização de metodologias alternativas de ensino/aprendizagem, principalmente para esse seguimento de ensino, que possibilite ao aluno agir sobre o objeto matemático a ser (re)construído.

Diante do atual cenário educacional brasileiro e do Estado do Pará no que tange ao processo de ensino e de aprendizagem de função quadrática na educação básica e, por ser professor desta disciplina escolar tanto na rede municipal de ensino quanto na rede estadual, surgem inquietações e, por conseguinte, interesse em investigar e compreender melhor as dificuldades observadas em nossa prática docente no tocante ao ensino/aprendizagem de função quadrática, assim como a curiosidade científica em conhecer mais o assunto em tela, afinal este conteúdo mantém uma estreita relação com outras áreas do conhecimento além da Matemática. A função quadrática permite, por exemplo, compreender fenômenos que ocorrem na Física, na Economia, nos Esportes, entre outras ciências.

Desta forma, emergiu a necessidade de resposta ao seguinte questionamento: *Em que medida uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo estruturante das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC's) potencializa o processo de ensino e de aprendizagem de função quadrática?*

Tendo em vista responder tal questionamento, foi elaborada uma Sequência Didática com base no modelo proposto por Cabral (2017), denominado de Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (UARC), com o objetivo de *estudar as potencialidades didáticas de uma Sequência Didática elaborada especificamente para o ensino e a aprendizagem de função quadrática.*

O modelo ora citado, trata-se de um construto organizado em sete categorias denominadas de Intervenções Estruturantes, voltado para a elaboração de Sequências Didáticas de conteúdos matemáticos, o qual está fundamentado nos pressupostos da Psicologia Histórico-cultural, no conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky e nas noções de Análise Microgenética na investigação da construção do conhecimento a partir das interações verbais entre os sujeitos.

Nos Quadros 1 e 2 a seguir, destaco uma das contribuições do trabalho de pesquisa de Gonçalves (2019) à estrutura proposta por Cabral (2017), isto é, uma primeira aproximação/diálogo entre as Intervenções Estruturantes Pós-formais (*Intervenções Avaliativas Restritivas* e *Intervenções Avaliativas Aplicativas*) e os níveis cognitivos da Taxonomia de Bloom.

Quadro 1: Os níveis cognitivos na Taxonomia de Bloom

Conhecimento	Compreensão	Aplicação	Análise	Síntese	Avaliação
Refere-se aos processos de memorização básicos, tais como: recordar, definir, reconhecer, identificar etc.	Refere-se aos processos de assimilação do conhecimento, gerando a habilidade de reproduzi-lo com suas próprias palavras.	Refere-se aos processos de colocar em execução os conhecimentos adquiridos e compreendidos	Refere-se aos processos de estruturar a informação, separando as partes do todo explicando-as.	Refere-se aos processos de recolher e relacionar informações de várias fontes, reconstruindo o todo a partir das partes.	Refere-se aos processos de julgamento de valor a partir de conhecimentos compreendidos.

Fonte: Manual de elaboração de itens de múltipla escolha, Província Marista Brasil Centro-Norte (2017)

A seguir, proponho o diálogo entre as *Intervenções Estruturantes Pós-formais* e a Taxonomia de Bloom.

Quadro 2: As Intervenções Estruturantes Pós-formais e a Taxonomia de Boom

Intervenções Avaliativas Restritivas (IA_r)	*Intervenções Avaliativas Aplicativas (IA_a)*
Conhecimento e Compreensão	Aplicação, Análise, Síntese e Avaliação
Níveis 1 e 2 de Bloom	Níveis 3, 4, 5 e 6 de Bloom

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

Assim, a proposta de Sequência Didática que será apresentada é o produto educacional, consequência da pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (GONÇALVES, 2019), com o título: “Uma Sequência Didática para o ensino de função quadrática”, sob a orientação do professor Dr. Miguel Chaquiam.

No referido trabalho de pesquisa, primeiramente foi realizado uma revisão de estudos sobre o ensino de função quadrática, na qual foram identificados e analisados dezesseis trabalhos que, de acordo com a natureza, foram categorizados em: estudos diagnósticos, estudos experimentais e análise em livros. Depois, foram realizadas duas pesquisas de campo, a primeira com 80 alunos egressos matriculados no 2º ano do Ensino Médio em uma escola pública estadual, localizada em um bairro central do município de Belém e, a segunda com 37 professores de Matemática, escolhidos aleatoriamente, atuantes em diferentes esferas e níveis de ensino.

O levantamento das informações se deu por meio de um questionário sociocultural e um teste de conhecimento matemático relativo à função quadrática, aplicados aos alunos egressos e avaliado por professores de Matemática. A partir das análises dos dados obtidos pude observar que o baixo desempenho obtido pelos estudantes nas questões do teste de conhecimentos, foi coerente com os resultados apresentados no quadro de dificuldades do questionário preenchidos por eles. Dificuldades do tipo: identificar uma função quadrática, encontrar a imagem da função quadrática dada à lei de formação, determinar as coordenadas do vértice da parábola, determinar os zeros da função quadrática, dizer se a concavidade da parábola está voltada para cima ou para baixo, resolver problemas de valor máximo ou de mínimo, representar na forma canônica uma função quadrática e representar na forma algébrica a representação gráfica de uma função quadrática.

Além disso, os resultados apontaram, predominantemente, para um ensino de função quadrática baseado somente em aulas expositivas (método tradicional de ensino: definição, exemplos e exercícios); para uma forma de avaliação dos estudantes apenas por prova escrita, nas quais os professores sinalizaram sentir-se tranquilos durante a aplicação das mesmas; para uma maneira de fixar os conteúdos estudados de função quadrática somente por meio da apresentação de uma lista de exercícios para serem resolvidos; para a não realização de estudos sobre função quadrática por meio de atividades/experimentos; para a não participação nos últimos dois anos em eventos ou treinamentos que tratasse do tema em tela; para uma carga de trabalho exaustiva, sinalizada na quantidade de escolas nas quais trabalham, geralmente em pelo menos duas e, por fim, disseram raramente ou nunca utilizar recursos tecnológicos, como os *softwares* livres, nas aulas de Matemática.

Após essas análises iniciais, elaborei uma Sequência Didática contendo doze atividades, seis *applets* construídos no *GeoGebra* (QUADRÁTICO1, QUADRÁTICO2, ..., QUADRÁTICO6), uma calculadora denominada “EQUAÇÃO DO 2º GRAU” construída no *App Inventor* e um “QUADRO DE CURVAS”, a qual foi aplicada em uma turma de alunos matriculados no 1º ano do Ensino Médio em uma escola pública estadual localizada na região metropolitana de Belém do Pará.

A Sequência Didática foi validada e os resultados das análises sobre as abordagens comunicativas e os padrões interativos (MORTIMER, SCOTT, 2002) mostraram que uma Sequência Didática elaborada segundo o modelo das UARC’s é potencialmente favorável ao processo de ensino e de aprendizado dos conteúdos matemáticos relativos à função quadrática, em pelo menos três dimensões: a do ensino (Professor), a da aprendizagem (estudante) e a do saber (re)construído (objeto do conhecimento).

Na dimensão do ensino, a Sequência didática é potencialmente favorável, pois possibilita ao professor planejar por escrito, de forma sistematizada o saber a ser (re)construído. Nesse sentido, o professor assume a postura de mediador do conhecimento, na qual passa a orientar as ações dos estudantes e, além disso, desenvolve a sua capacidade de argumentação, o que permite-lhe explorar outras possibilidades.

Quanto à dimensão da aprendizagem, a Sequência Didática é potencialmente favorável, pois estimula os estudantes a percepção de regularidades e padrões, por meio de simulações; possibilita uma aprendizagem em regime colaborativo, na qual os estudantes são os protagonistas; permite o desenvolvimento da autonomia, diante de um cenário garantidor da autoria dos estudantes; e, por fim, a estrutura organizada permite ao estudante justificar os procedimentos realizados no decorre do processo.

Na dimensão do saber construído, a Sequência Didática revela-se ser potencialmente favorável, pois valoriza as etapas pré-formais da (re)construção do conhecimento por meio do pensamento intuitivo, aspectos importante para o desenvolvimento do pensamento matemático; possui um caráter experimental, no qual os estudantes são estimulados a realizar simulações, tendo em vista perceber as generalizações e estabelecer padrões e, por fim, permite a construção do conceito do objeto matemático.

Um aspecto que deve ser levado em consideração nesse processo, refere-se as dificuldades, por mim enfrentadas, na elaboração da Sequência Didática em tela. A primeira, refere-se a dificuldade que tive de estabelecer a conexão entre os comandos para o desenvolvimento da Sequência Didática; a segunda, diz respeito a flexibilização do conteúdo, sem perder o rigor matemático necessário; a terceira, foi a de perceber as possíveis formas de interpretação dos estudantes ao realizar a atividade; e, por último, a de identificar o momento adequado para a finalização dos comandos para a posterior formalização do conteúdo.

O diálogo com meus pares, assim como as leituras realizadas, foram fundamentais para a superação das dificuldades mencionadas. Mas, para isso ocorrer, tive que, primeiramente, dar o aceite a esse desafio e estar motivado e disposto a escutar os diferentes pontos de vista; a receber críticas construtivas, ou seja, precisei estar aberto ao “novo”.

O presente produto educacional foi concebido, tendo em vista ampliar as possibilidades de replicação e utilização da Sequência Didática pelo leitor interessado em outras metodologias de ensino dos conteúdos matemáticos relativos à função quadrática. Ele está organizado em dois capítulos: o primeiro destina-se a auxiliar o professor quanto aos conteúdos matemáticos relacionados à função quadrática e o segundo descreve a respeito do teste diagnóstico, da oficina de nivelamento e da Sequência Didática.

Quanto aos conteúdos matemáticos relativos à função quadrática, optei em iniciar com apresentação das noções preliminares de função antes de abordar as definições e propriedades relativas à função quadrática.

Com relação às atividades que se materializam na Sequência Didática, o Quadro 3 a seguir apresenta a sistematização do objetivo de cada uma das doze atividades que a compõe.

Quadro 3: Atividades da Sequência Didática para o ensino de função quadrática

Título da Atividade	**Objetivos**
A expressão algébrica	Introduzir o conceito de função quadrática a partir da relação existente entre a geometria e a álgebra.
O gráfico da função quadrática	descobrir a representação geométrica para a função quadrática.
A concavidade da parábola	Descobrir uma relação indireta entre os coeficientes da função quadrática e a concavidade da parábola.
O termo independente	Relacionar o termo independente da função quadrática com o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.
Os zeros da função quadrática (Parte 1)	Compreender o significado algébrico dos zeros de uma função quadrática, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$.
Os zeros da função quadrática (Parte 2)	Compreender o significado geométrico dos pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas.
Os zeros da função quadrática (Parte 3)	Relacionar a quantidade de zeros da função quadrática, a partir da análise de sua representação geométrica, com o discriminante.
Um dos elementos da parábola	Compreender o que significa o ponto mais alto ou mais baixo de uma parábola.
A abscissa do vértice (Parte 1)	Descobrir uma maneira de obter a abscissa do vértice de uma parábola.
A abscissa do vértice (Parte 2)	Relacionar os zeros da função quadrática com a abscissa do vértice da parábola.
A ordenada do vértice (Parte 1)	Descobrir uma maneira de obter a ordenada do vértice de uma parábola.
A ordenada do vértice (Parte 2)	Descobrir uma maneira de determinar a ordenada do vértice a partir da abscissa do mesmo.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Assim, pelos resultados da pesquisa descritos anteriormente, o material didático aqui proposto pode contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos relativos à função quadrática. Esta proposta de ensino, assim como a dissertação final da pesquisa desenvolvida, pode ser acessada no *site* do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará através do *link:*<ccse.uepa.br/pmpem>.

1 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Neste tópico, objetivou-se tratar dos aspectos teóricos matemáticos relacionados ao estudo das funções quadráticas, tais quais: conceitos, propriedades e teoremas fundamentais ligados ao tema. Neste sentido, procurou-se ter o cuidado com a questão da utilização da linguagem matemática adequada, tendo em vista manter/resgatar o devido rigor matemático característico dessa ciência.

Acredito que o domínio e o uso adequado desses aspectos por parte do professor de matemática, o ajudará a transitar pelo objeto matemático em tela com segurança, além de possibilitar novos olhares a respeito do processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos relativos à função quadrática, tendo em vista minimizar as dificuldades de ensino/aprendizagem apontadas na literatura, pelos professores de Matemática e por alunos egressos do 1º ano do Ensino Médio matriculados em uma escola pública do Estado do Pará.

Para tal, meus interlocutores foram os seguintes autores: Antar Neto *et al* (2009), Lima *et al* (1996), Lima (2007) e Stewart (2011).

1.1 NOÇÕES PRELIMINARES DE FUNÇÃO

Antes de discorrer a respeito dos aspectos teóricos específicos de função quadrática, acreditei ser conveniente tratar primeiramente de algumas noções preliminares relativas aos conteúdos de função matemática, as quais julgo importantes para a compreensão da fundamentação matemática do tema.

As noções preliminares as quais abordo a seguir, dizem respeito ao conceito de função, tipologia, função inversa, crescimento e decrescimento e paridade de uma função.

Um dos principais conceitos da matemática, segundo alguns especialistas da área, refere-se ao conceito de função. Nesse sentido, Chaquiam (2015, p.49) chama a atenção para o fato de, sempre que for possível, antes de definir formalmente esse conceito com os estudantes, seria interessante apresentar intuitivamente a ideia de função por meio de situações problemas do cotidiano desse aluno ou que estejam atreladas a fenômenos de outras áreas do conhecimento, pois isso pode contribuir para a consolidação desse conceito.

Para valorizar a ideia intuitiva de função como uma correspondência, dependência, transformação, variação, não cabe defini-la a partir de produto cartesiano e relação, como alguns professores, influenciados pelo movimento da Matemática Moderna da década de 80, ainda o faz.

Neste sentido, optei pela seguinte definição de função: dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B $(f: A \to B)$ é uma correspondência que estabelece, sem exceções nem ambiguidade, para cada elemento $x \in A$ sua imagem $y = f(x) \in B$.

O conjunto A denomina-se *domínio* (D) da função e o conjunto B, *contradomínio* (CD). Assim, $f(x) \in B$ é a *imagem* (Im) de $x \in A$ por meio da função f. O símbolo que representa um número qualquer no domínio de uma função f é chamado de *variável independente,* e o que representa um número qualquer na *imagem* de f é denominado de *variável dependente.*

Assim, tem-se apenas duas situações as quais não representam uma função, quais sejam: se tiver algum elemento do domínio sem imagem e/ou se tiver algum elemento do domínio com mais de uma imagem.

Pode-se perceber, pela definição, que uma função é formada por três partes essenciais: domínio, contradomínio e uma regra que possibilita associar os elementos do domínio aos elementos do contradomínio.

A utilização correta da linguagem matemática é fundamental para a compreensão dos conceitos e das propriedades presentes nos objetos matemáticos. No caso específico de função, alguns livros didáticos atuais ainda trazem a expressão "considere a função $f(x)$", quando a linguagem correta seria "considere a função f", pois $f(x)$ é a imagem do elemento x do domínio, por meio da função f.

Outro ponto importante, diz respeito ao gráfico de uma função f. Tem-se que, o gráfico de uma função f de A em B é o conjunto de pares ordenados $\{(x, y) | x \in A \ e \ y \in B\}$.

A visualização no plano cartesiano desses pares ordenados, denomina-se representação geométrica da função f. Neste sentido, gráfico e representação geométrica de uma função f são objetos distintos, entretanto são tratados pelos autores de grande parte dos livros didáticos, adotados na educação básica brasileira, com o mesmo significado.

De acordo com a maneira como ocorre a correspondência existente entre os elementos do domínio de uma função com os elementos do contradomínio da mesma, pode-se classificá-las em três tipos quanto à tipologia, quais sejam: função sobrejetora, função injetora ou função bijetora.

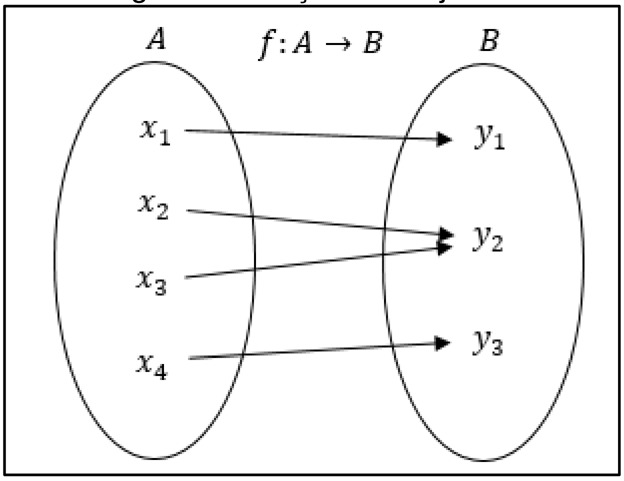
Seja f uma função de A em B, f é sobrejetora se $Im(f) = B$. Observe que, se f é sobrejetora, então para todo elemento $y \in B$ existe ao menos um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, todo $y \in B$ é imagem de pelo menos um $x \in A$.

Além disso, se a função f, de A em B, é sobrejetora, então a equação $f(x) = y$ admite para todo $y \in B$ pelo menos uma solução.

Portanto, quando a imagem de uma função f for igual ao contradomínio da mesma, a função é classificada, quanto a tipologia, como sobrejetora.

Pode-se visualizar melhor essa situação por meio de um diagrama de flechas, como segue.

Figura 1: Função Sobrejetora



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Antar Neto *et al* (2009).

Observa-se, na figura anterior, que cada elemento do domínio possui uma única imagem, o conjunto imagem da função f é igual ao contradomínio da mesma e, além disso, tem-se que $f(x) = y_2$ tem como solução x_2 e x_3.

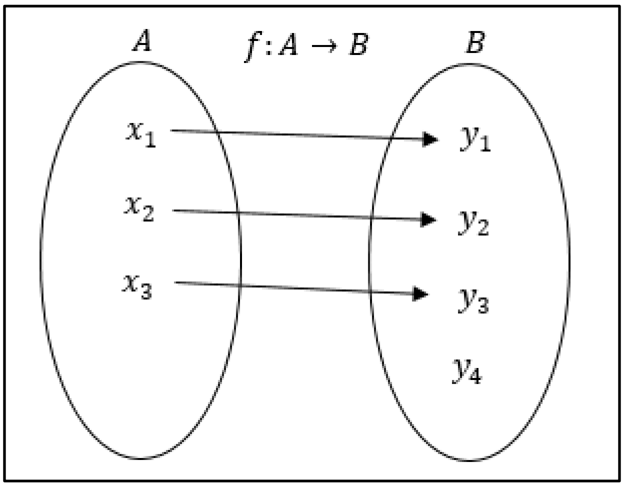
Além disso, seja f uma função de A em B, f é injetora se quaisquer que sejam os elementos x_1 e $x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observe que se f é injetora, um elemento $y \in B$ não é obrigatoriamente imagem de algum elemento $x \in A$, porém, se o for, será imagem de um único $x \in A$.

Além disso, quando a função f, de A em B, é injetora, a equação $f(x) = y$ admite no máximo uma solução para todo $y \in B$.

Observa-se melhor essa definição através de um diagrama de flechas, veja:

Figura 2: Função injetora



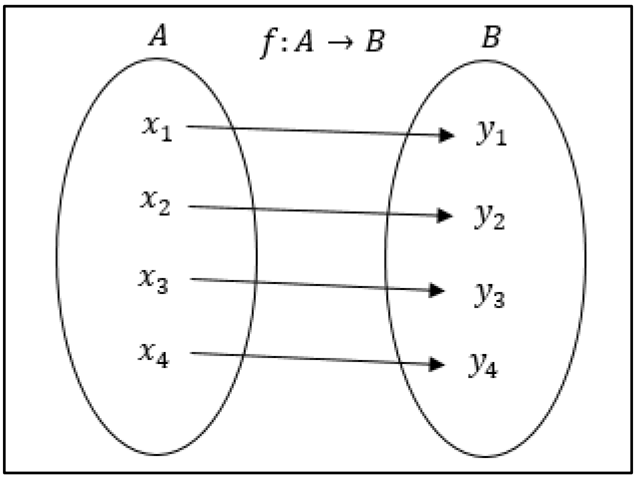
Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Antar Neto *et al* (2009)

Observa-se que todos os elementos do domínio possuem uma única imagem e que o conjunto imagem é diferente do contradomínio.

Por fim, seja f uma função de A em B, f é bijetora se f é sobrejetora e injetora. Observe que, se f é bijetora, para todo elemento $y \in B$ existe um único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, todo $y \in B$ é imagem de um único $x \in A$.

Além disso, quando a função f, de A em B, é bijetora, a equação $f(x) = y$ admite para todo $y \in B$ uma única solução.

Figura 3: Função bijetora



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Antar Neto *et al* (2009).

Neste caso, observa-se que há uma correspondência biunívoca, ou seja, de um para um, entre os elementos do domínio e do contradomínio neste tipo de função.

A seguir, descrevo a respeito da função inversa de uma dada função. Será que todos os tipos de função apresentadas anteriormente admitem inversas?

O teorema a seguir e a sua demonstração, mostrará que somente as funções bijetoras admitirão inversas.

Seja f uma função de A em B, a relação inversa f^{-1} é uma função de B em A se e somente se é uma função bijetora.

Primeiramente demonstrarei que se f^{-1} é uma função de B em A, então f é bijetora. Seja y um elemento qualquer de B, então existe um elemento $x \in A$ tal que o par ordenado $(y, x) \in f^{-1}$, pois pela hipótese inicial f^{-1} é função, e, portanto, o par ordenado $(x, y) \in f$, ou seja, f é sobrejetora.

Além disso, sejam $x_1 \; e \; x_2$ dois elementos quaisquer de A, tais que $x_1 \neq x_2$, observe que se $f(x_1) = f(x_2) = y$, implicaria $f^{-1}(y) = x_1 \; e \; f^{-1}(y) = x_2$, o que contraria a hipótese de que f^{-1} é função. Logo, $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, f é injetora. Portanto, f é bijetora.

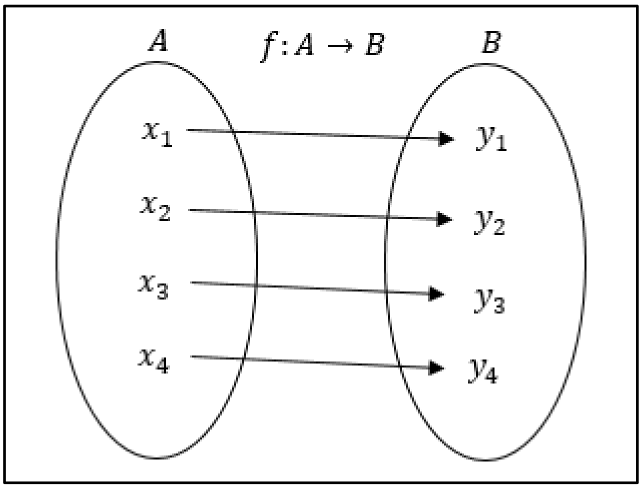
Assim, demonstrarei que se f é bijetora, então f^{-1} é uma função de B em A. Tem-se que, para todo $y \in B$ existe um elemento $x \in A$ tal que o par ordenado $(x, y) \in f$, pois pela hipótese inicial f é sobrejetora. Logo, para todo elemento y $\in B$, tem-se $(y, x) \in f^{-1}$, ou seja, todo elemento $y \in B$ tem imagem $x \in A$, dada por f^{-1}.

Suponha que um elemento y $\in B$ tenha as imagens x_1 e $x_2 \in A$, dadas por f^{-1}, então, $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$ e, portanto, $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$, logo, $x_1 = x_2$, pois pela hipótese inicial f é injetora.

Portanto, pode-se concluir que todo $y \in B$ possui uma e uma só imagem em A, dada por f^{-1}, ou seja, f^{-1} é função de B em A.

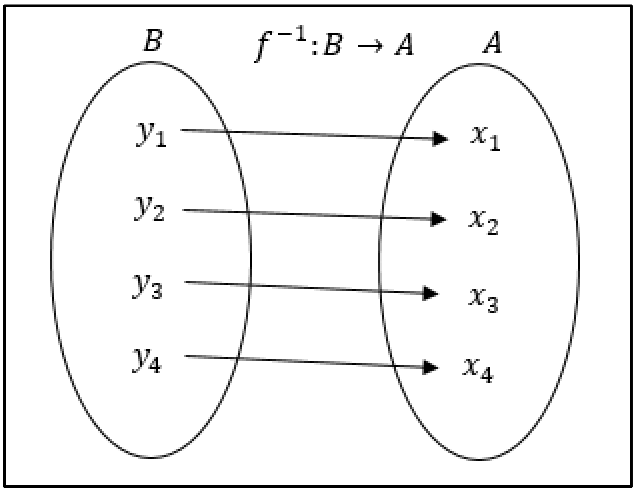
Assim, seja f uma função bijetora de A em B, e seja f^{-1} sua relação inversa. O teorema anterior mostrou que f^{-1} é uma função de B em A e que se chama função inversa de f.

Figura 4: Função f de A em B



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Antar Neto *et al* (2009).

Figura 5: Função f^{-1} inversa da função f



Fonte: Elaborado pelo autor adaptado de Antar Neto *et al* (2009)

A seguir, descrevo a respeito do comportamento de uma função quanto ao seu crescimento ou decrescimento.

O entendimento do comportamento de uma função quanto ao seu crescimento ou decrescimento num dado intervalo do seu domínio é fundamental para analisar e tomar decisões com relação às variáveis envolvidas num problema.

Uma função f é denominada crescente em um intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I. Ela é chamada decrescente em I se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I.

Em outras palavras, quando se aumenta o valor do domínio no intervalo dado e, o valor da respectiva imagem também aumenta, a função é dita crescente nesse intervalo. Se ao aumentar o valor do domínio dentro do intervalo dado e, o valor da respectiva imagem diminuir, diz-se que a função é decrescente nesse intervalo. Caso não ocorra nenhuma das situações anteriores, ou seja, não cresça e nem decresça, a função para o intervalo dado é denominada constante.

Quanto a paridade, uma função f pode ser classificada como: função par, função ímpar ou como uma função qualquer (nem par nem ímpar). Seja uma função f de A em B, se ela satisfizer $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in A$, então f é uma função par. Por outro lado, se f satisfazer $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$, f é uma função ímpar.

Neste sentido, uma função é par, quando para quaisquer dois valores simétricos do domínio da mesma, corresponder a mesma imagem. Uma função é chamada de ímpar, quando para quaisquer dois valores do domínio da mesma, corresponder imagens também simétricas. Caso não ocorra nenhuma das duas situações descritas, a função é denominada de função qualquer, isto é, nem par nem ímpar.

No tópico seguinte descrevo, especificamente, a respeito dos conteúdos matemáticos relativos à função quadrática.

1.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função quadrática é uma das funções matemáticas particulares prevista no currículo escolar da Educação Básica. Esse modelo matemático ajuda a compreender diferentes fenômenos que ocorrem na própria matemática, assim como em outras áreas do conhecimento, como: na Física, na Economia e na Química. Mas afinal, o que é uma função quadrática?

Uma função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é denominada quadrática quando associa cada número real x do domínio, ao número real $f(x) = ax^2 + bx + c$ do contradomínio, sendo a, b e c números reais, com $a \neq 0$.

A definição de uma função quadrática deixa claro os três elementos necessários para a sua existência: o domínio $D(f) = \mathbb{R}$, o contradomínio $CD(f) = \mathbb{R}$ e a regra $f(x) = ax^2 + bx + c$ que associa os elementos do domínio com os do contradomínio.

O segundo membro da igualdade $f(x) = ax^2 + bx + c$ é um trinômio do 2º grau. Desta forma, será que podemos associar cada trinômio do 2º grau a uma função quadrática?

Neste sentido, devo demonstrar que se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a = a', b = b'$ e $c = c'$.

Seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Atribuindo o valor zero ao x, obtenho: $a0^2 + b.0 + c = a'0^2 + b'0 + c'$, resultando $c = c'$. Logo, posso afirmar que a igualdade $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ também é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo $x \neq 0$. Atribuindo ao x primeiramente o valor 1 e posteriormente -1, tenho que: $a + b = a' + b'$ e $-a + b = -a' + b'$. Somando membro a membro as igualdades, obtenho $b = b'$ e $a = a'$, como queria demonstrar.

Esse fato, permite identificar uma função quadrática com um trinômio do segundo grau. De certa forma, existe uma diferença sutil entre esses dois conceitos. Um trinômio do 2º grau é uma expressão do tipo $aX^2 + bX + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$, na qual a letra X é apenas um símbolo e X^2 uma outra maneira de se escrever $X\ vezes\ X$. Desta forma, tem-se por definição que dois trinômios $aX^2 + bX + c$ e $a'X^2 + b'X + c$' são iguais quando $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Assim, cada trinômio do 2º grau corresponde a função quadrática definida por $x \to ax^2 + bx + c$, e essa correspondência é biunívoca. Logo, posso identificar a função quadrática com o trinômio do 2º grau a ela associado, permitindo-me falar da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, lembrando de não a confundir com o número real $f(x)$, que é o valor da imagem da mesma no domínio x.

Desta forma, para que $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, suponho que a igualdade $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ é válida para três valores diferentes de x, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos de abcissas $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$, então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x.

Considere duas funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a' + a'x^2 + b'x + c'$. Suponha que as mesmas assumam os mesmos valores para três números reais distintos $x_1, x_2\ e\ x_3$, ou seja, $f(x_1) = g(x_1), f(x_2) = g(x_2)\ e\ f(x_3) =$

$g(x_3)$. Considere que $\alpha = a - a', \beta = b - b'\ e\ \gamma = c - c'$. Mostrarei que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Tem-se que, $f(x_1) - g(x_1) = 0, f(x_2) - g(x_2) = 0\ e\ f(x_3) - g(x_3) = 0$, ou seja:

$$f(x_1) - g(x_1) = 0$$
$$ax_1^2 + bx_1 + c - a'x_1^2 - b'x_1 - c' = 0$$
$$(a - a')x_1^2 + (b - b')x_1 + (c - c') = 0$$
$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \quad (1)$$

Além disso,

$$f(x_2) - g(x_2) = 0$$
$$ax_2^2 + bx_2 + c - a'x_2^2 - b'x_2 - c' = 0$$
$$(a - a')x_2^2 + (b - b')x_2 + (c - c') = 0$$
$$\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \quad (2)$$

Por fim,

$$f(x_3) - g(x_3) = 0$$
$$ax_3^2 + bx_3 + c - a'x_3^2 - b'x_3 - c' = 0$$
$$(a - a')x_3^2 + (b - b')x_3 + (c - c') = 0$$
$$\alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \quad (3)$$

De (1), (2) e (3), tem-se:

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Subtraindo (1) de (2) e de (3), obtém-se:

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0 \quad (4)$$
$$\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0 \quad (5)$$

Sabe-se que $x_2 \neq x_1$ o que implica $x_2 - x_1 \neq 0$. Analogamente, pode-se afirmar também que $x_3 - x_1 \neq 0$. Assim, ao dividir a equação (4) por $x_2 - x_1$ e a (5) por $x_3 - x_1$, resulta em, respectivamente:

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0 \quad (6)$$
$$\alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0 \quad (7)$$

Subtraindo a equação (7) da equação (6), obtém-se:

$$\alpha(x_3 - x_2) = 0 \quad (8)$$

Sabe-se que $x_3 \neq x_2$ o que implica $x_3 - x_2 \neq 0$. Portanto, da equação (8) $\alpha = 0$. Dessa maneira, substituindo o valor de α nas equações anteriores, obtenho respectivamente $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. Portanto, tem-se que $\alpha = 0, \beta = 0$ e $\gamma = 0$, como queria demonstrar.

Sejam $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$ três números reais distintos e $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_3$ números tais que os pontos $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1), \mathrm{B} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ e $\mathrm{C} = (\mathrm{x}_3, \mathrm{y}_3)$ são não-colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ tal que $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{y}_1, \mathrm{f}(\mathrm{x}_2) = \mathrm{y}_2$ e $\mathrm{f}(\mathrm{x}_3) = \mathrm{y}_3$.

No sistema homogêneo (*), foi provado que a única solução do mesmo é a solução trivial, ou seja, $\alpha = \beta = \gamma$. Porém, quando um sistema homogêneo só admite a solução trivial, pode-se substituir os zeros dos segundos membros por quaisquer outros números reais, que ainda assim, teremos solução única.

Assim, dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2, y_3, existe um, e somente um terno ordenado de números reais a, b, c tais que:

$$(**) \quad \begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \;\; (1) \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \;\; (2) \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \;\; (3) \end{cases}$$

Neste sistema, as incógnitas são a, b, c e os coeficientes conhecidos são $x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2 \; e \; 1,1,1$. Meu interesse, é determinar o valor da incógnita a. Para isso, seguirei a mesma sequência de raciocínio utilizada para o sistema homogêneo (*).

Subtraindo a equação (1) da equação (2) e (3), obtém-se, respectivamente:

$$a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \quad (4)$$

$$a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1 \quad (5)$$

Sabe-se que $x_2 \neq x_1$ e $x_3 \neq x_1$, logo pode-se afirmar que $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$. Assim, dividindo a equação (4) por $x_2 - x_1$ e a equação (5) por $x_3 - x_1$. Os resultados obtidos são, respectivamente:

$$a(x_2 + x_1) + b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

$$a(x_3 + x_1) + b = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (7)$$

Subtraindo a equação (7) da equação (6), tem-se:

$$a(x_3 - x_2) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Portanto, o valor da incógnita a é,

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]$$

Assim, dados três números reais distintos x_1, x_2, x_3 e números reais arbitrários y_1, y_2, y_3, existe um, e somente um, terno de números a, b, c tais que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ determina $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2\ e\ f(x_3) = y_3$.

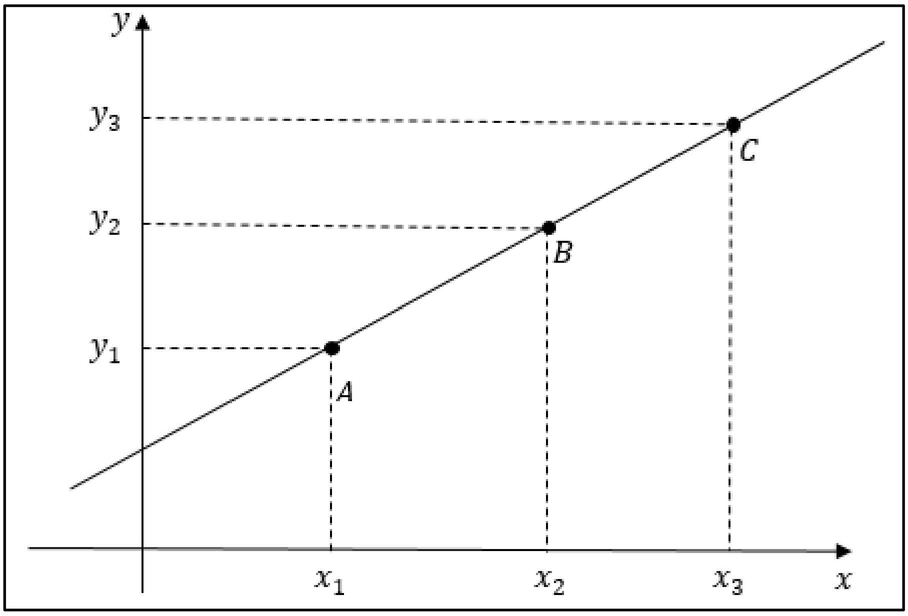
A função $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtida anteriormente, pode não ser quadrática. Para que a mesma seja quadrática é necessário que se tenha $a \neq 0$.

O resultado obtido para a anteriormente, revela que, o mesmo será igual a zero, se e somente se, for válida a igualdade a seguir:

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Assim, ao olhar para os pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)\ e\ C = (x_3, y_3)$ no plano, ou seja, em $\mathbb{R}^2$, a igualdade anterior mostra que as retas AC e AB, possuem a mesma inclinação, ou seja, os pontos A, B e C são colineares, como na ilustração seguinte.

Figura 6: Pontos colineares no $\mathbb{R}^2$



Fonte: elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

Para que a função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja quadrática é necessário que o coeficiente a seja diferente de zero.

Geometricamente falando, o ponto de intersecção da representação geométrica de uma função quadrática com o eixo das abcissas no plano cartesiano, quando existi, é denominado de zero da função. Entretanto, como proceder para determinar algebricamente os valores dos zeros, quando existir, de uma função quadrática?

Seja a função quadrática f, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, zero da função f, é todo valor de x para o qual $f(x) = 0$.

Os zeros de uma função quadrática, estão associados as raízes de uma equação do 2º grau correspondente a mesma. Desta forma, para obter os zeros de uma função quadrática, será necessário resolver a equação do 2º grau correspondente a mesma.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

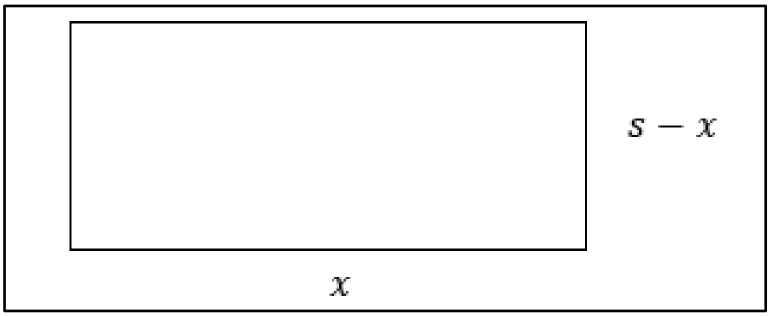
Fazendo $f(x) = 0$, obtém-se a seguinte equação do 2º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

De acordo com Lima *et al* (1996, p.118), “problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática”. Problemas do tipo, achar dois números sabendo sua soma s e seu produto p, foram encontrados em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios por volta de quatro mil anos atrás.

Olhando geometricamente para o problema anterior, terei que determinar os lados de um retângulo conhecendo os valores do semiperímetro s e da área p. Em outras palavras, os números procurados são as raízes da equação do 2º grau $x^2 - sx + p = 0$.

Figura 7: Retângulo de semiperímetro s e área p



Fonte: elaborada pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

De fato, se um dos números é x, de acordo com Lima *et* al (2006), consequentemente o outro será $s - x$. Além disso, o produto é $p = x(s - x)$. Desenvolvendo essa igualdade, tem-se:

$$p = x(s - x)$$

$$p = sx - x^2$$

$$x^2 - sx + p = 0$$

Além disso, pode-se observar que, se x' é uma das raízes desta equação, ou seja, $(x')^2 - sx' + p = 0$, então x''$= s - x'$ também será, veja:

$$(x'')^2 - sx'' + p = 0$$

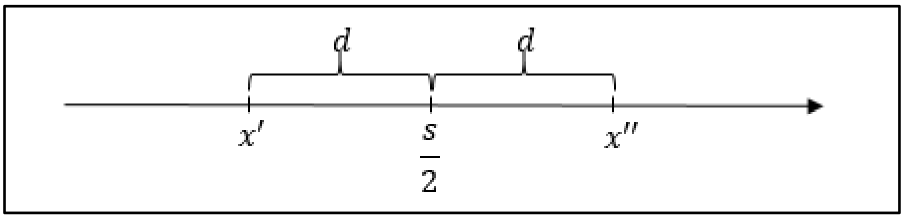
$$(s - x')^2 - s(s - x') + p = 0$$

$$s^2 - 2sx' + (x')^2 - s^2 + sx' + p = 0$$

$$(x')^2 - sx' + p = 0.$$

A pergunta é, como obter os valores de x' e x''? Considerando x'< x'', tem-se que esses valores são equidistantes da média aritmética simples dos mesmos, ou seja, a distância de x' a $\frac{s}{2} = \frac{x'+x''}{2}$ é igual a distância de x'' a $\frac{s}{2} = \frac{x'+x''}{2}$, como pode-se observar na figura seguinte.

Figura 8: Distância d das raízes ao ponto médio das mesmas



Fonte: elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

Assim, pode-se obter o valor da distância d, como segue:

$$d = \frac{s}{2} - x' \quad (1)$$

$$d = x'' - \frac{s}{2} \quad (2)$$

De (1) e (2), obtém-se respectivamente:

$$x' = \frac{s}{2} - d \quad (3)$$

$$x'' = \frac{s}{2} + d \quad (4)$$

Por outro lado, multiplicando as raízes, tem-se:

$$p = x'.x''$$

$$p = \left(\frac{s}{2} - d\right).\left(\frac{s}{2} + d\right)$$

$$p = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2$$

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

Portanto, substituindo o valor obtido de d em (3) e (4), obtém-se respectivamente:

$$x' = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

$$x'' = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

De acordo com Lima *et al* (1996, p.119), os babilônios utilizavam a seguinte regra para achar dois números cuja soma e cujo produto são conhecidos.

> Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número. (*Ibdem,* 1996, p.119)

Isso servia como uma espécie de receita a ser seguida para resolver os problemas concretos da época, pois até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para a obtenção das raízes, pelo fato de que as letras ainda não eram utilizadas para representar os coeficientes de uma equação.

Além disso, é importante observar as situações nas quais se têm $\left(\frac{s}{2}\right)^2 < p$. Nesses casos, os babilônios afirmavam que os números procurados não existiam. De fato, no campo dos números reais, não é possível determinar a raiz quadrada de um valor negativo.

Na sala de aula do Ensino Básico, é importante o professor de matemática estimular seus alunos a resolverem equações do 2º grau na qual se conhece a soma e o produto de suas raízes. Mais adiante, relaciono a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau com os seus coeficientes numéricos.

O trabalho com a forma canônica do trinômio do 2º grau poderá contribuir para a compreensão da resolução de uma equação do 2º grau, conteúdo previsto no currículo escolar de matemática para ser ensinado no 9º ano do Ensino Fundamental II e um dos pré-requisitos fundamentais para o estudo das funções quadráticas.

Nesse sentido, é importante oportunizar aos estudantes essa forma de abordagem de resolução de uma equação do 2º grau envolvendo sua forma canônica, pois além de resgatar conteúdos abordados nos anos anteriores, como por exemplo fatoração, possibilitará ir além da simples memorização e aplicação da fórmula resolutiva desse tipo de equação, denominada por alguns autores de livros didáticos como fórmula de Báskhara.

Assim, mostrarei a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau partindo da forma canônica do trinômio do 2º grau. Considere o trinômio do 2º grau a seguir, no qual $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c$$

Fatorando essa expressão, colocando o coeficiente a em evidência, tem-se:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

Observando a expressão obtida dentro do colchete, tem-se que as duas primeiras parcelas correspondem a uma parte do desenvolvimento da expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, como segue:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Desta forma,

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \text{ (FORMA CANÔNICA)}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Farei as seguintes mudanças de variáveis, para tornar a expressão mais simples. Atribuir $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Assim, tem-se:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k \text{ (OUTRA FORMA DE ESCREVERMOS)}$$

Uma consequência imediata dessa maneira de escrever um trinômio do 2º grau, está relacionada com a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, veja:

Dada a equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$ na qual $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, pode-se escrevê-la, de maneira equivalente, assim:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0$$

Como $a \neq 0$, para o produto acima resultar em zero, tem-se a igualdade:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão obtida anteriormente, é denominada de FÓRMULA RESOLUTIVA DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU. Para torná-la mais simples, atribui-se à expressão $b^2 - 4ac$ a letra grega Δ (*delta*), a qual denomina-se *discriminante* da equação, pois ela discrimina se a mesma possui ou não raízes reais. Assim, tem-se que $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (***).

Se $\Delta < 0$, implica dizer que a equação do 2º grau não possuirá raízes reais. De fato, da fórmula (***) pode-se observar que $\sqrt{\Delta}$, neste caso, não pertence aos números reais, pois não existe nenhum número real que elevado ao quadrado resulte em um valor negativo.

Se $\Delta > 0$, então a equação do 2º grau terá duas raízes reais e diferentes, sendo $x' < x''$, como segue:

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Relacionando a soma e o produto das raízes da equação do 2º grau, com os coeficientes numéricos da mesma, tem-se:

$$s = x' + x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \text{ (SOMA DAS RAÍZES)}$$

$p = x'.x'' = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$ (PRODUTO DAS RAÍZES)

Assim, pode-se dizer que as raízes x' e x'' são equidistantes do número $-\frac{b}{2a}$.

Além disso, se $\Delta = 0$ a equação dada possuirá uma única raiz, denominada RAIZ DUPLA. Essa raiz será igual a $-\frac{b}{2a}$, como representado a seguir:

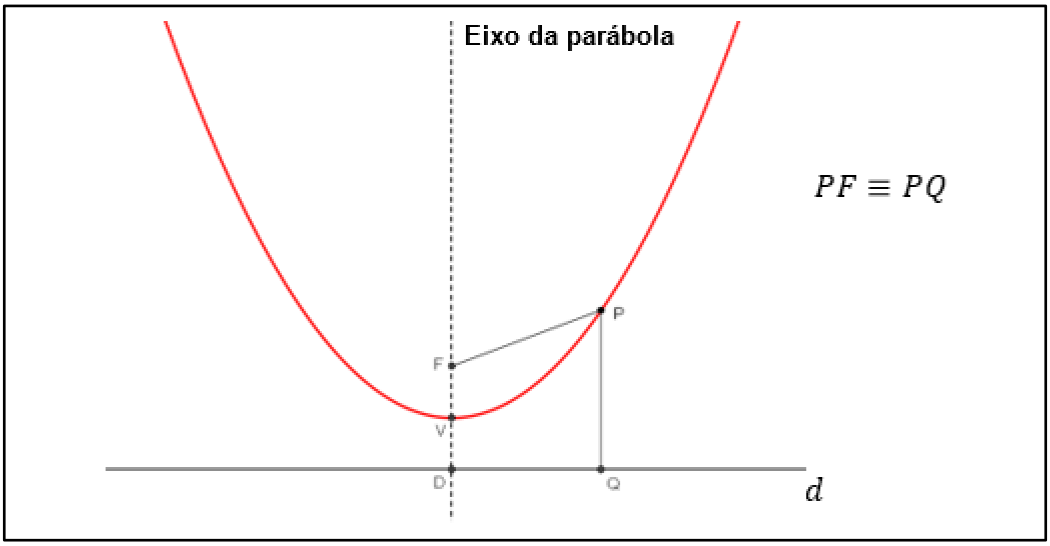
$$x' = x'' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

Portanto, há várias maneiras de resolver uma equação do 2º grau. É importante desenvolver atividades em sala de aula com os estudantes que possibilitem a construção dos diferentes caminhos de resolução, pois acredito que assim, o mesmo terá a possibilidade de escolher o melhor caminho a ser seguido conforme a situação problema proposta.

Visto como proceder para determinar os zeros de uma função quadrática, descrevo a seguir sobre a representação geométrica da mesma.

Sejam um ponto F e uma reta d que não o contém, denomina-se parábola de foco F e diretriz d o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.

Figura 9: Definição da parábola



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

A reta perpendicular a diretriz d e que contém o foco F, é denominada de eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da reta diretriz chama-se vértice (V).

Além disso, pode-se afirmar que o vértice é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a intersecção do eixo com a mediatriz.

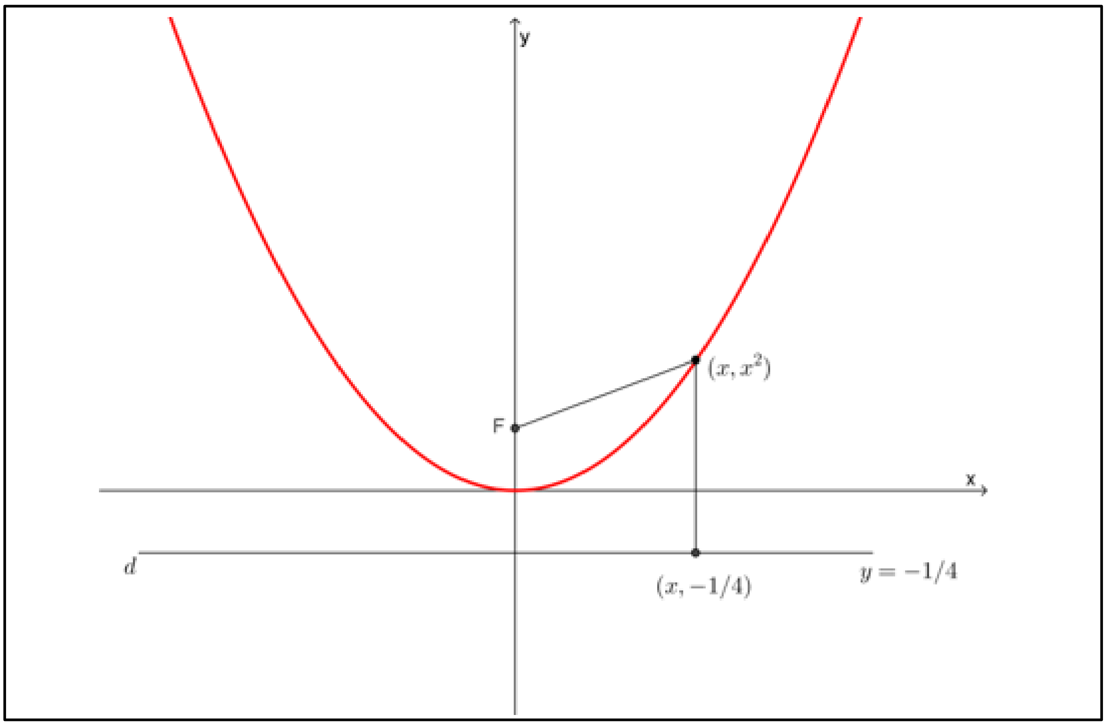
Vale ressaltar que a distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

Embora não tenha sido objeto deste estudo, desenvolver atividades com os alunos que possibilitem visualizar e perceber essas regularidades, poderá contribuir para a compreensão e a resolução de problemas envolvendo a representação geométrica da função quadrática. O uso de *software* livre de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*, é uma ferramenta que poderá auxiliar no desenvolvimento dessas atividades.

Irei demonstrar que o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e cuja reta diretriz é definida por $y = -\frac{1}{4}$.

Assim, terei que mostrar que a distância de um ponto qualquer (x, x^2) do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ é igual a distância do mesmo ponto (x, x^2) à reta $y = -\frac{1}{4}$, ou seja, ao ponto $\left(x, -\frac{1}{4}\right)$.

Figura 10: Gráfico da função definida por $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

De fato, tem-se que a distância do ponto (x, x^2) ao ponto $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ é igual a:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\sqrt{x^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2} \quad (1)$$

Além disso, a distância do mesmo ponto (x, x^2) à reta $y = -\frac{1}{4}$, ou seja, ao ponto $\left(x, -\frac{1}{4}\right)$ é igual a:

$$\sqrt{(x-x)^2+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$x^2+\frac{1}{4} \quad (2)$$

Como (1) e (2) são valores positivos, para verificar a igualdade entre as duas distâncias, basta verificar que seus quadrados são iguais. Assim, tem-se que:

$$\left(\sqrt{x^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2}\right)^2 = \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$x^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$x^2+x^4-2\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16} = \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$x^4+x^2+\frac{1}{16} = \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Agora, mostrarei que o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = ax^2$ $, com\ a \neq 0,$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

Terei que mostrar que a distância de um ponto qualquer $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao ponto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$, é igual a distância do mesmo ponto (x, ax^2) à reta diretriz $y = -\frac{1}{4a}$, ou seja, ao ponto $\left(x, -\frac{1}{4a}\right)$.

Desta forma, tem-se que a distância do ponto P ao ponto F é igual a:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(ax^2-\frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} \quad (1)$$

Além disso, a distância do ponto P ao ponto $\left(x, -\frac{1}{4a}\right)$, é igual a:

$$\sqrt{(x-x)^2 + \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$ax^2 + \frac{1}{4a} \quad (2)$$

Como (1) e (2) são valores positivos, para verificar a igualdade existente entre elas, basta ver que seus quadrados são iguais, como segue:

$$\left(\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

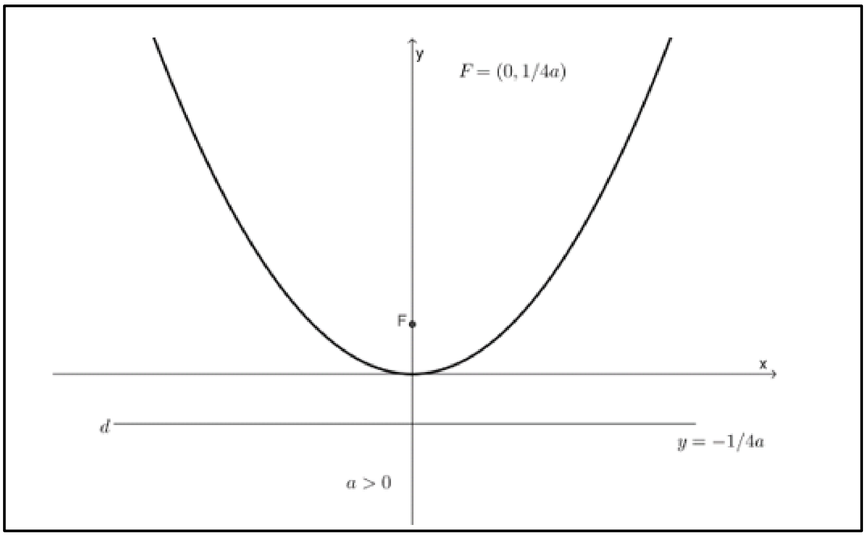
$$x^2 + a^2x^4 - 2\frac{1}{4a}ax^2 + \frac{1}{16a^2} = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

$$a^2x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

$$\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

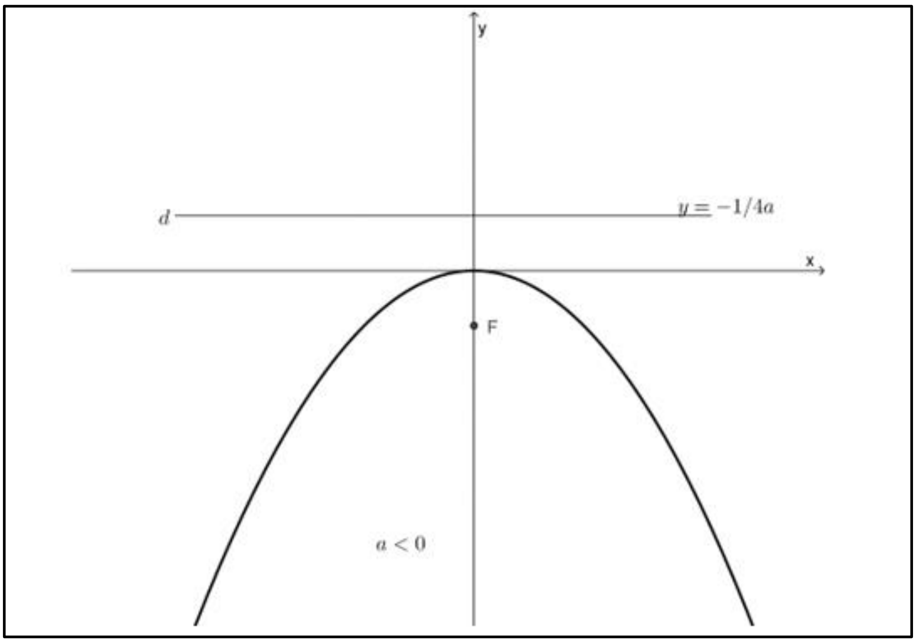
De acordo com o valor do coeficiente a, ou seja, $a > 0$ ou $a < 0$ a parábola $y = ax^2$ tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo.

Figura 11: Concavidade da parábola $a > 0$



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

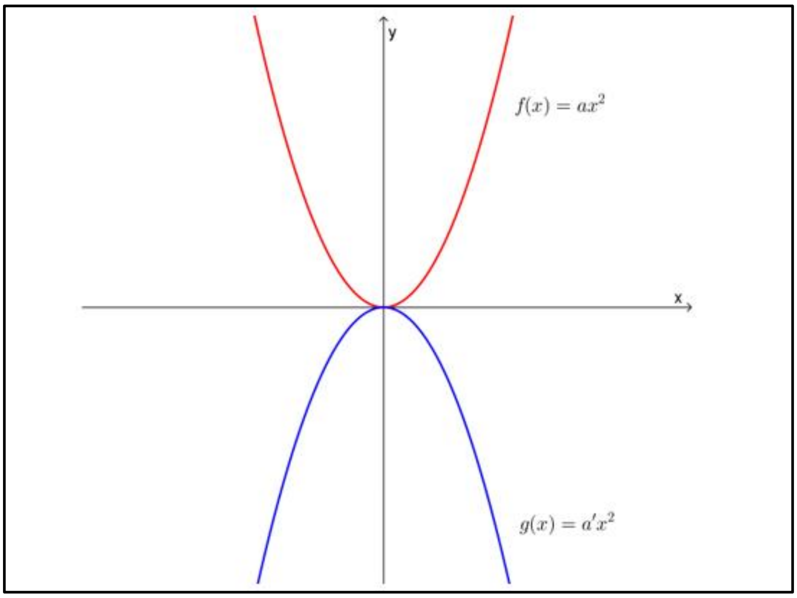
Figura12: Concavidade da parábola $a < 0$



Fonte: Elaborado pelo autor adaptado de Lima *et al* (2006)

Além disso, é importante observar que: todas as parábolas têm o mesmo vértice $(0,0)$ e o mesmo eixo $x = 0$; quanto menor o valor absoluto do coeficiente a, maior será a abertura da parábola; quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola; os gráficos das funções quadráticas $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a'x^2$, nas quais a e a' são valores simétricos, são simétricos em relação ao eixo x.

Figura 13: Gráficos das funções quadráticas nos quais a e a' são simétricos



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006)

Mostro a seguir que o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = a(x-m)^2$, $a \neq 0$ e $m \in \mathbb{R}$, é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta paralela ao eixo x, definida por $y = -\frac{1}{4a}$.

Uma forma de demonstrar isso, é mostrando que a distância de um ponto $P = (x, a(x-m)^2)$ qualquer da parábola até o ponto $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$, é igual a distância do mesmo ponto P à reta diretriz $y = -\frac{1}{4a}$, ou seja, ao ponto $\left(x, -\frac{1}{4a}\right)$.

A distância do ponto P ao ponto F, é dada por:

$$\sqrt{(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2} \quad (1)$$

Por outro lado, a distância do ponto P ao ponto $\left(x, -\frac{1}{4a}\right)$, é igual a:

$$\sqrt{(x-x)^2 + \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2}$$

$$\left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right] \quad (2)$$

Como (1) e (2) são valores positivos, pode-se verificar a igualdade constatando o fato de os quadrados desses números serem iguais. Desta forma, tem-se que:

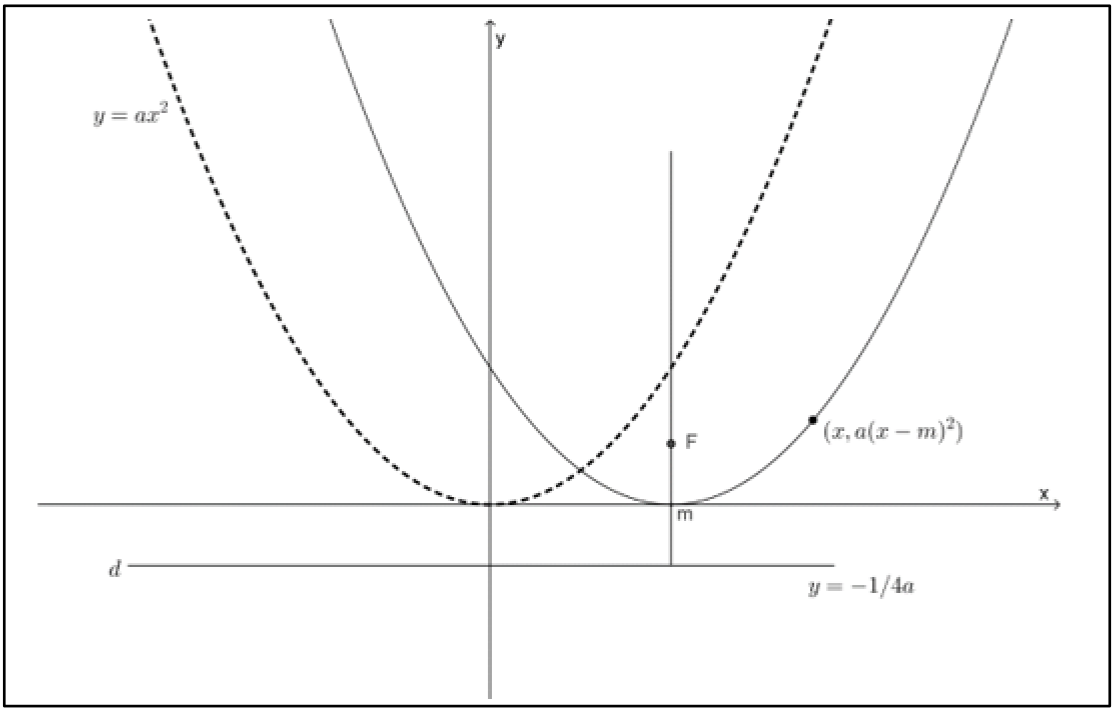
$$\left(\sqrt{(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2}\right)^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

$$(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

$$x^2 - 2mx + m^2 + a^2(x-m)^4 - 2a(x-m)^2 + \frac{1}{16a^2} = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

$$\left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

Figura 14: Gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2$



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

Outra maneira de obter o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2$, $a \neq 0$ e $m \in \mathbb{R}$, seria por meio da função $g(x) = ax^2$. Fazendo a translação horizontal $(x, y) \rightarrow (x + m, y)$, levando assim o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$.

Na figura anterior, considerei $m > 0$, acarretando um deslocamento do eixo da parábola expressa por $g(x) = ax^2$, m unidades para a direita no eixo das abcissas. Caso se tenha $m < 0$, o deslocamento na horizontal será de m unidades para esquerda.

Agora, mostrarei que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k, com\ a, m, k \in \mathbb{R}\ sendo\ a \neq 0$, é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta paralela ao eixo x, $y = k - \frac{1}{4a}$.

Tenho que mostrar que a distância de um ponto qualquer $P = (x, a(x - m)^2 + k)$, pertencente ao gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$, ao foco $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ é igual a distância do mesmo ponto P à reta diretriz $y = k - \frac{1}{4a}$, ou seja, ao ponto $\left(x, k - \frac{1}{4a}\right)$.

A distância do ponto P ao ponto F, é igual a:

$$\sqrt{(x-m)^2 + \left(a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} \quad (1)$$

Tem-se que a distância do ponto P ao ponto $\left(x, k - \frac{1}{4a}\right)$, é igual a:

$$\sqrt{(x-x)^2 + \left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2}$$

$$a(x-m)^2 + \frac{1}{4a} \quad (2)$$

Como (1) e (2) são valores positivos, para mostrar a igualdade entre eles, basta verificar se seus quadrados são iguais. Assim, tem-se que:

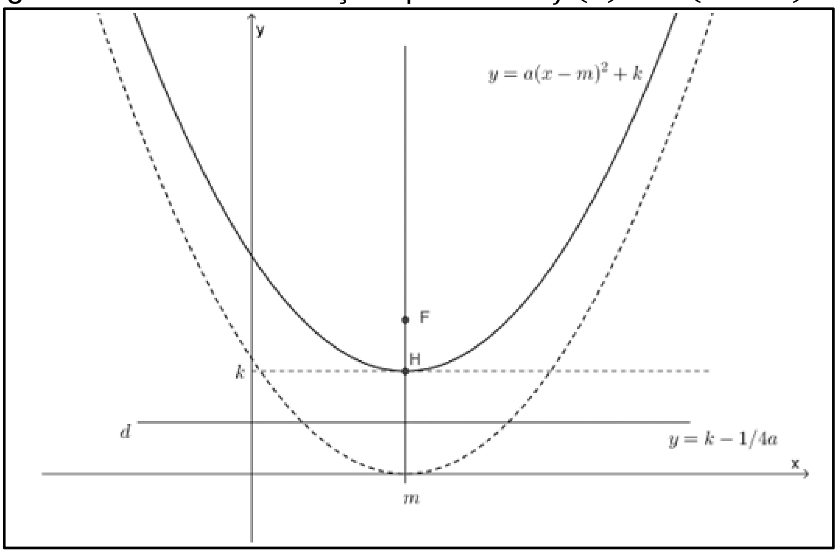
$$\left(\sqrt{(x-m)^2 + \left(a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}\right)^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

$$(x-m)^2 + \left(a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$$

Ao desenvolver o primeiro membro dessa igualdade, percebo que a mesma é igual a expressão do segundo membro da mesma igualdade.

Outra maneira de verificar a afirmação inicial, leva em conta que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido a partir do gráfico da função anterior $g(x) = a(x-m)^2$, por meio da translação vertical $(x, y) \to (x, y + k)$, na qual leva o eixo x na reta $y = k$ e, leva a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$.

Figura 15: Gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

Desta forma, o gráfico de qualquer função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

De fato,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Denominando $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$, tem-se que:

$$ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + k$$

Portanto, a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é equivalente a $f(x) = a(x-m)^2 + k$, com $a \neq 0$, na qual $f(m) = k$.

Como o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$, substituindo os valores de k e de m definidos anteriormente, o foco e a diretriz, respectivamente, são obtidos para qualquer função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c,\ com\ a \neq 0$, como segue:

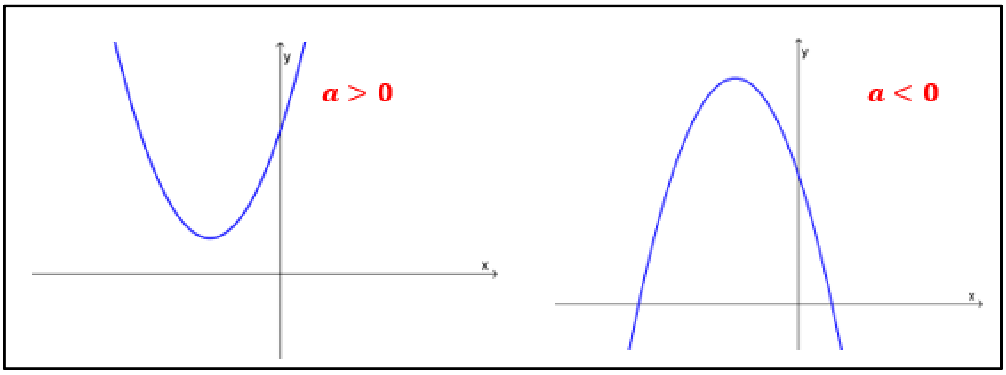
$$F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right) \rightarrow F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} + \frac{1}{4a}\right) \rightarrow F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$$

$$y = k - \frac{1}{4a} \rightarrow y = \frac{4ac-b^2}{4a} - \frac{1}{4a} \rightarrow y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$$

Seja a função quadrática f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$, verificarei os efeitos dos coeficientes a, b, c na parábola.

O coeficiente a é responsável pela concavidade e abertura da parábola.

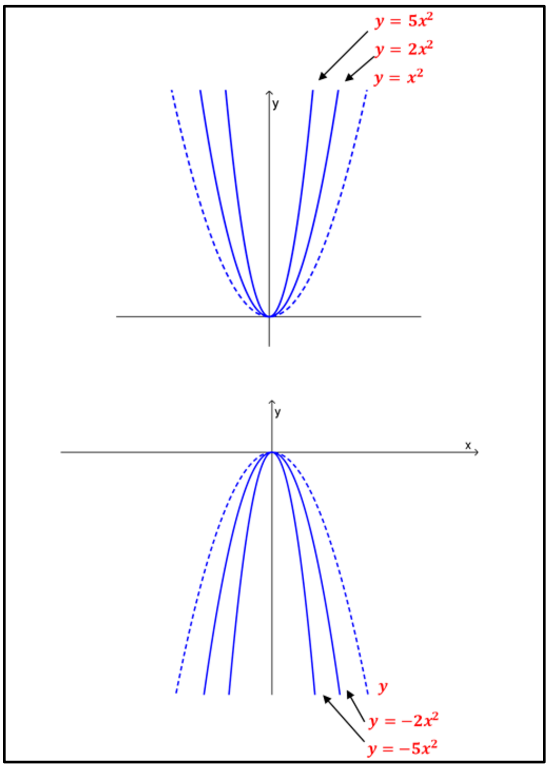
Figura 16: Efeitos do coeficiente a



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

Se $a > 0$ a concavidade é para cima e, se $a < 0$ a concavidade é para baixo. Quanto maior o valor absoluto do coeficiente a, menor será a abertura da parábola, independentemente da concavidade.

Figura 17: Abertura da parábola conforme o valor do coeficiente a

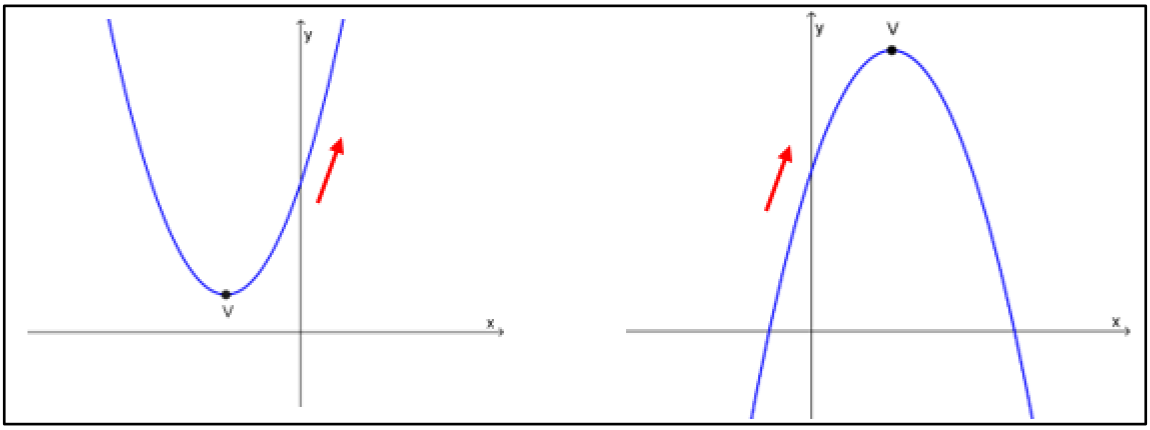


Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

O coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente da parábola, veja:

- Se $b > 0$ a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente, conforme figura seguinte;

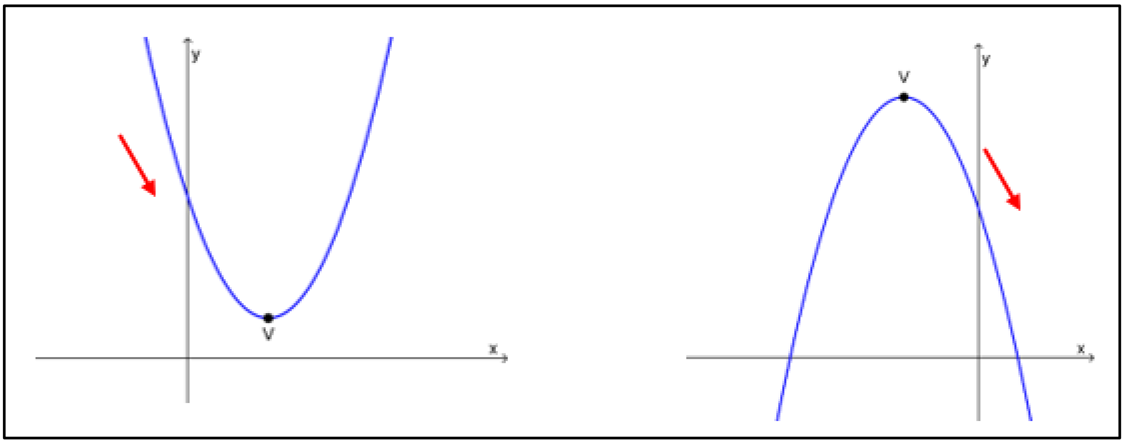
Figura 18: Coeficiente $b > 0$



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

- Se $b < 0$ a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente;

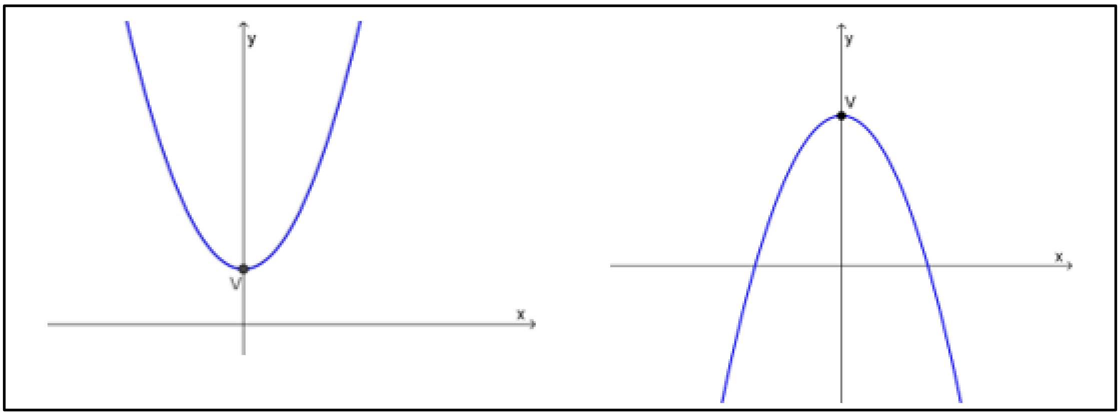
Figura 19: Coeficiente $b < 0$



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

- Se $b = 0$ a parábola intersecta o eixo y no vértice, observe:

Figura 20: Coeficiente $b = 0$



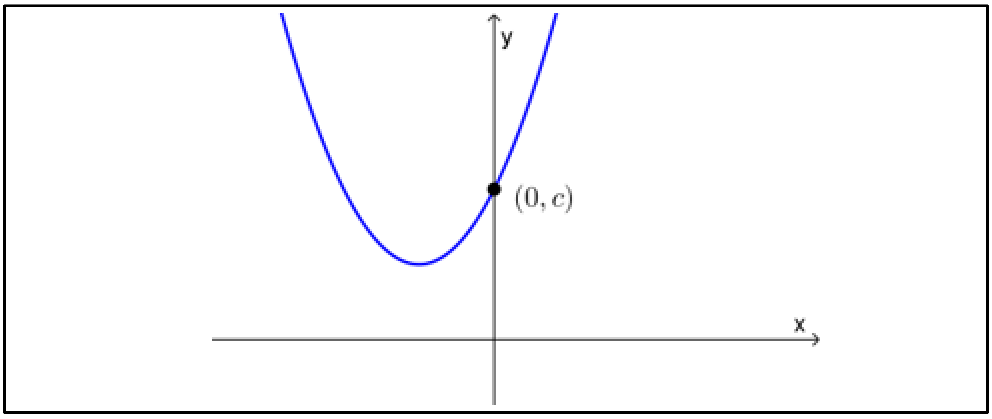
Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

Os efeitos do coeficiente b na parábola, geralmente não são percebidos de imediato pelos estudantes, diferentemente dos outros dois coeficientes a e c. Esta dificuldade pode estar associada ao fato dos alunos utilizarem os conhecimentos aprendidos sobre função polinomial do 1º grau cuja lei é expressa por $f(x) = ax + b$. Neste caso, o coeficiente b representa a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y.

Neste sentido, atividades desenvolvidas com o auxílio do *GeoGebra* podem contribuir para o entendimento dos efeitos do coeficiente b na parábola, embora não tenha sido explorado neste trabalho.

O coeficiente c indica a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y (eixo das ordenadas).

Figura 21: Efeitos do coeficiente c



Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Lima *et al* (2006).

Percebe-se que a parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$. De fato, tem-se que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(0) = a.0^2 + b.0 + c$$
$$f(0) = c$$

Ou seja, o termo independente c representa a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y.

Uma das aplicações envolvendo os conteúdos relativos à função quadrática, refere-se à resolução de problemas envolvendo o valor máximo ou valor mínimo da mesma. Nesse caso, esses problemas estão associados ao vértice da parábola. Entretanto, antes de descrever especificamente do máximo e do mínimo dessa função, abordarei duas definições envolvendo máximo e mínimo de uma função real e, além disso, farei a demonstração do teorema de Fermat, o qual permitirá compreender o vértice da parábola.

Uma função f tem máximo global em c se $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in D(f)$.O número $f(c)$ é chamado valor máximo de f em $D(f)$. Da mesma forma, f tem um mínimo global em c se $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in D(f)$, e o número $f(c)$ é denominado valor mínimo de f em $D(f)$. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.

Além disso, tem-se também que, uma função f tem um máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. Analogamente, f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ quando x estiver próximo de c.

De posse das definições anteriores, posso enunciar o seguinte teorema de Fermat: se f possuir um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(x) = 0$.

Suponha que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a definição estabelecida anteriormente, $f(c) \geq f(x)$ se x estiver nas proximidades de c, o que implica que se h estiver nas proximidades de zero, sendo $h > 0$ ou $h < 0$, então $f(c) \geq f(c+h)$ e, portanto $f(c+h) - f(c) \leq 0$. Dividindo ambos os lados dessa desigualdade por h, sendo h positivo e bem pequeno, tem-se:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \qquad \div (h > 0)$$

Determinado o limite a direita de ambos os membros dessa desigualdade, obtém-se:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

Porém, $f'(c)$ existe, logo:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Assim, mostra-se que $f'(c) \leq 0$.

Por outro lado, se $h < 0$ o sentido da desigualdade $f(c+h) - f(c) \leq 0$ é invertido ao dividí-la por h. Assim, tem-se:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \qquad \div (h < 0)$$

Determinando o limite a esquerda, obtém-se:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq \lim_{h\to 0^-} 0 = 0$$

Como $f'(c)$ existe, posso escrever a seguinte igualdade:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Logo, $f'(c) \geq 0$.

Portanto, mostrei que $f'(c) \leq 0$ e também que $f'(c) \geq 0$. Como ambas as desigualdades são verdadeiras, a única possibilidade é a de que $f'(c) = 0$, como queria demonstrar.

Não demonstrarei o teorema de Fermat para o caso de um mínimo local, pois a mesma se dá de forma análoga.

No caso da função quadrática f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tem-se que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2+bx+c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ahx+bh}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} 2ax + b = 2ax + b = f'(x)$$

Portanto, pelo teorema de Fermat, tem-se:

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Ou seja, o máximo ou o mínimo da função f se dá no ponto cuja abcissa é igual a $-\frac{b}{2a}$.

Assim**,** seja f uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Quando $a > 0$, f admite um valor mínimo $y_{mín} = -\frac{\Delta}{4a}$ em $x = -\frac{b}{2a}$; quando $a < 0$, f admite um valor máximo $y_{máx} = -\frac{\Delta}{4a}$ em $x = -\frac{b}{2a}$.

Além disso, foi visto que a função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, pode ser escrita na forma $f(x) = a(x-m)^2 + k$ denominada forma canônica, na qual $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$. Assim, tem-se que:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (1)$$

Posso afirmar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenho:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0,$$

pois a expressão $x + \frac{b}{2a}$ está elevada ao quadrado. Assim seu menor valor é zero e ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$. Além disso, a expressão $-\frac{\Delta}{4a}$ não depende de x, ou seja, é constante.

Portanto, tenho duas situações a considerar:

i) Se $a > 0$, tem-se que:

$f(x)$ assumirá valor mínimo quando a diferença $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$ assumir o seu menor valor, ou seja, quando $x=-\frac{b}{2a}$. Substituindo, esse valor em (1), obtém-se $y_{mín}=-\frac{\Delta}{4a}$.

ii) Se $a<0$, então:

$f(x)$ assumirá valor máximo quando a diferença $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$ assumir o seu menor valor, ou seja, quando $x=-\frac{b}{2a}$. Ao substituir x por $-\frac{b}{2a}$ na expressão (1), obtém-se $y_{máx}=-\frac{\Delta}{4a}$.

Assim, está demonstrado o teorema e, a função quadrática definida por $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$, terá seu valor extremo quando $x=-\frac{b}{2a}$. E, esse valor será mínimo quando $a>0$ e máximo se $a<0$. É importante frisar que, se $y_{máx}$ ocorre, então $y_{mín}$ não ocorre e vice-versa. Em ambos os casos o valor extremo de f é dado por $y_{ext}=-\frac{\Delta}{4a}$.

O ponto do gráfico da função quadrática definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ mais próximo da diretriz é denominado de vértice da parábola. Isso ocorre quando temos o valor da abcissa $x=-\frac{b}{2a}$, como visto anteriormente. Diz-se que neste ponto, $f(x)$ assume seu valor mínimo quando $a>0$ e seu valor máximo quando $a<0$. Porém, tem-se que:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a.\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b.\left(-\frac{b}{2a}\right)+c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto, a coordenada do ponto correspondente ao vértice da parábola é representada por $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, na qual $-\frac{b}{2a}$ é a abscissa do vértice e $-\frac{\Delta}{4a}$ a ordenada.

Além disso, quando tenho $\Delta \geq 0$ a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui raízes reais, as quais correspondem aos zeros da função quadrática definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Sendo x' e x'' as raízes desta equação, sabe-se que $x' + x'' = -\frac{b}{a}$. Usando o princípio multiplicativo de uma igualdade, multiplicarei ambos os membros da mesma por $\frac{1}{2}$, obtendo a equivalente $\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}$. Portanto, nos casos em que obtenho $\Delta \geq 0$, posso determinar o valor da abcissa do vértice da parábola, por meio da média aritmética simples dos zeros da função que a representa, ou seja, $x_v = \frac{x'+x''}{2}$.

Além disso, sabe-se que a função quadrática elementar $f(x) = x^2$, transforma a progressão aritmética (PA) 1, 2, 3, 4, ..., n, n+1, ... de razão igual a 1, na sequência 1, 4, 9, 16, ..., n^2, $n^2 + 2n + 1$, ... a qual não é uma PA, pois a diferença entre dois termos consecutivos não é um valor constante. Porém, a diferença entre os termos consecutivos desta última sequência 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ..., é uma PA de razão 2.

Desta forma, se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática e $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ é uma PA qualquer, então a sequência $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$ dos valores $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), y_4 = f(x_4), \dots$ faz valer a propriedade pela qual as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1, \quad d_2 = y_3 - y_2, \quad d_3 = y_4 - y_3, \dots$ formam uma PA, ou seja, se $x_{i+1} - x_i = r$ para todo $i = 1,2,3, \dots$, então $d_{i+1} - d_i = 2ar^2$, como verifica-se a seguir.

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

$$f(x_1) = y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

$$f(x_2) = y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$f(x_3) = y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

Assim:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)$$

$$d_1 = a(x_2 + x_1).(x_2 - x_1) + b(x_2 - x_1)$$

Por hipótese, tem-se que $x_2 - x_1 = r$, logo:

$$d_1 = ar(x_2 + x_1) + b.r \quad (1)$$

Além disso, tem-se que:

$$y_3 - y_2 = ax_3^2 + bx_3 + c - ax_2^2 - bx_2 - c = a(x_3^2 - x_2^2) + b(x_3 - x_2)$$

$$d_2 = a(x_3 + x_2).(x_3 - x_2) + b(x_3 - x_2)$$

Por hipótese, tem-se $x_3 - x_2 = r$, logo:

$$d_2 = ar(x_3 + x_2) + b.r \quad (2)$$

Fazendo (2) – (1), obtenho:

$$d_2 - d_1 = ar(x_3 + x_2) + b.r - ar(x_2 + x_1) - b.r$$

$$d_2 - d_1 = ar(x_3 + x_2) - ar(x_2 + x_1)$$

$$d_2 - d_1 = ar(x_1 + 2r + x_1 + r) - ar(x_1 + r + x_1)$$

$$d_2 - d_1 = ar(2x_1 + 3r) - ar(2x_1 + r)$$

$$d_2 - d_1 = 3ar^2 - ar^2$$

$$d_2 - d_1 = 2ar^2$$

Estendendo essa ideia para $d_3 - d_2,\ d_4 - d_3, \dots ,\ d_{i+1} - d_i$ encontrarei o mesmo valor, ou seja, $2ar^2$. Este fato, é uma propriedade exclusiva das funções quadráticas.

Seja f uma função contínua definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que, para todo $h \in \mathbb{R}$ fixado, o acréscimo $f(x+h) - f(x)$ é uma função afim de x, então f é uma função quadrática.

Por hipótese tem-se que, para todo $h \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x+h) - f(x) = A(h)x + B(h)$, na qual A e B não dependem de x, mas provavelmente dependerão de h.

Inicialmente tomo $x = 0$, com isso obtenho $f(h) - f(0) = B(h)$. Subtraindo a constante $c = f(0)$, ou seja, considerando $f(x) - f(0)$ em vez de $f(x)$, obtenho $f(0) = 0$, portanto $f(h) = B(h)$. Assim, posso escrever que:

$$f(x+h) - f(x) = A(h).x + f(h)$$

Ou seja,

$$f(x+h) = f(x) + f(h) + A(h).x$$

Ou ainda,

$$f(h+x) = f(h) + f(x) + A(x).h$$

De onde concluo que $A(h).x = A(x).h$. Atribuindo o valor 1 ao x, tem-se que $A(h) = 2ah$, na qual considero $A(1) = 2a$. Logo, vale a seguinte relação:

(1) $\quad f(x+h) = f(x) + f(h) + 2ahx$, sendo $x, h \in \mathbb{R}$.

Agora, considere a função g definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $g(x) = f(x) - ax^2$, logo $f(x) = ax^2 + g(x)$.

Da relação (1), verifica-se que $g(x+y) = g(x) + g(y)$, para todo $x, h \in \mathbb{R}$. Como a função g é contínua, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade posso escrever que $g(x) = bx$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $b = g(1)$. Logo, $f(x) = ax^2 + g(x) = ax^2 + bx$. Recolocando a constante $c = f(0)$, concluiu-se que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a seguinte relação é válida:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

A recíproca do teorema anterior, logicamente, é válida. Ou seja, se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática, então:

$$f(x+h) - f(x) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c = 2ah.x + ah^2 + bh$$
$$= Ax + B,$$

onde $A = 2ah$ e $B = ah^2 + bh$. Portanto, $f(x+h) - f(x)$ é uma função afim de x, na qual os coeficientes A e B dependem de h.

Com a intenção de tornar mais simples o processo, defino uma PA de segunda ordem como uma sequência $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$, de tal forma que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1$, $d_2 = y_3 - y_2$, $d_3 = y_4 - y_3, \ldots$ resultam em uma PA usual.

Viu-se na recíproca do teorema anterior que uma função quadrática transforma toda PA numa PA de segunda ordem. Mostrarei agora o inverso, ou seja, toda função contínua f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que goza dessa propriedade é uma função quadrática, ou seja, uma função contínua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática, se e somente se, transforma toda PA $x_1, x_2, x_3, \ldots$ numa PA de segunda ordem $y_1, y_2, y_3, \ldots$ onde $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \ldots$

Com base no teorema de caracterização das funções quadráticas demonstrado anteriormente, basta provar que, para todo $h \in \mathbb{R}$ fixado, a função contínua g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x+h) - f(x)$, é afim, ou seja, transforma toda PA $x_1, x_2, x_3, \ldots$ numa PA $g(x_1) = f(x_1 + h) - f(x_1)$, $g(x_2) = f(x_2 + h) - f(x_2), \ldots$

Pode-se observar que a sequência $x_1 + h, x_2 + h, x_3 + h, \ldots$ também é uma PA. Assim, pela hipótese relacionada a função f, se escreve $y_i = f(x_i)$ e $z_i = f(x_i + h)$, onde $i = 1,2,3, \ldots$, tem-se duas PA de segunda ordem $y_1, y_2, y_3, \ldots$ e $z_1, z_2, z_3, \ldots$

Desta forma, tem-se que $z_1 - y_1, z_2 - y_2, z_3 - y_3, \ldots$ é uma PA. Porém, $z_i - y_i = f(x_i + h) - f(x_i) = g(x_i)$, como queria demonstrar.

Além disso, observa-se também que se $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots$ é uma PA de segunda ordem, então $y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots, y_{n+1} - y_n, \ldots$ é uma PA usual. Considerando $d = y_2 - y_1$ e denominando de r a razão desta PA, tem-se:

$$y_{n+1} - y_n = d + (n-1).r \quad \text{, com } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pode-se escrever:

$$y_{n+1} = (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + y_1$$

$$y_{n+1} = [d + (n-1).r] + [d + (n-2).r] + \cdots + (d + r) + d + y_1$$

$$y_{n+1} = n.d + \frac{n(n-1)}{2}.r + y_1$$

$$y_{n+1} = \frac{r}{2}n^2 + \left(d - \frac{r}{2}\right).n + y_1$$

Portanto, $y_{n+1} = f(n)$, onde $f(x) = \frac{r}{2}x^2 + \left(d - \frac{r}{2}\right)x + y_1$. Fato revelador de que a função quadrática f transforma a PA $0,1,2, \ldots, n, \ldots$ na PA de segunda ordem $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}, \ldots$.

O domínio pleno, pelo professor de Matemática, dos conteúdos matemáticos os quais deseja ensiná-los, é de suma importância e, portanto, deve ser levado em consideração no contexto da sala de aula. Neste sentido, os tópicos descritos neste capítulo podem vir a contribuir, no que tange ao processo de ensino e de aprendizagem do tema em tela, com os futuros professores de Matemática, ou seja, aqueles que se encontram em formação inicial; assim como, também, com aqueles os quais encontram-se em formação continuada.

2 DIRETRIZES PARA A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, descrevo as orientações gerais para a aplicação da Sequência Didática, inclusive as fases que as antecedem: *teste diagnóstico* e *oficina de* *nivelamento*. O objetivo das fases iniciais é amenizar as possíveis dificuldades que possam ocorrer durante o processo de aplicação da Sequência Didática.

Os materiais didáticos estão organizados por seção da seguinte forma: material para o aluno e material para o professor. Quanto ao primeiro, devem ser reproduzidos de acordo com a quantidade de alunos da turma que será aplicada e está estruturado da seguinte forma: *título, objetivo, material, procedimentos, conclusão do grupo* e *formalização do professor*. Em relação ao segundo, este está sistematizado da seguinte forma: *título, objetivo, orientações ao professor, material, procedimentos* e *formalização do professor*. Além disso, contém as respostas corretas as quais poderão ser consultadas durante o processo de correção.

2.1 TESTE DIAGNÓSTICO

Para aplicação da Sequência Didática em tela, alguns conhecimentos básicos relativos à função são fundamentais, tais como: resolução de equação do 2º grau, operações com polinômios, plano cartesiano, par ordenado, domínio e imagem de uma função. Neste sentido, sugiro ao professor verificar, antes da aplicação da Sequência Didática, se os estudantes desenvolvem as habilidades relacionadas com esses objetos básicos do conhecimento matemático.

O teste diagnóstico proposto é composto por dez questões objetivas.Para aplicação, sugiro que o seja entregue para cada estudante em folha impressa de papel de tamanho A4, para realização individual num tempo máximo de 45 minutos. Encerrada a aplicação, o professor deverá corrigi-los, tendo em vista identificar as dificuldades de aprendizagem para possíveis direcionamentos, caso necessário, da oficina de nivelamento.

Caso seja constatado um bom desempenho no teste de conhecimentos básicos, os estudantes podem ser submetidos às atividades propostas materializadas na Sequência Didática. Do contrário, ou seja, se os estudantes manifestarem um baixo desempenho, deverá ser realizada o que denomino de oficina de nivelamento a qual descrevo na seção 2.2.

2.1.1 Material para o aluno

Identificação do estudante:____

Título: Diagnóstico inicial

Objetivo: Realizar um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, necessários para a execução da Sequência Didática sobre função quadrática.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel.

Procedimento: Responda cada questão proposta a seguir, de acordo com o comando.

1) Qual é o resultado, respectivamente, das seguintes multiplicações: $2x.3x$; $4x.(3x+1)$**;** $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}).(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})$?

(A) $6x$; $7x+4x$; $2x+4$

(B) $6x^2$; $12x^2+4x$; x^2+4x+4

(C) $5x$; $12x+5x$; x^2+4

(D) $5x^2$; $12x^2+1$; $4x+4$

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO

2) Qual das expressões a seguir é um MONÔMIO?

(A) x^2+2x+1

(B) $3x^3+3x$

(C) $x+1$

(D) $4x^2$

3) Qual das expressões a seguir é um BINÔMIO?

(A) $4x$

(B) $2x+5$

(C) x^2+x+1

(D) $2x^3-x+3$

4) Qual das expressões a seguir é um TRINÔMIO?

(A) x^2+3x-4

(B) $5x+4$

(C) $4x^2$

(D) $5x$

5) Qual das expressões algébricas a seguir é de GRAU 2?

(A) 2x + 1

(B) $4x^3 + 3x^2 – 2x – 1$

(C) $x^2 – 3x + 2$

(D) $5x^4 – 3x$

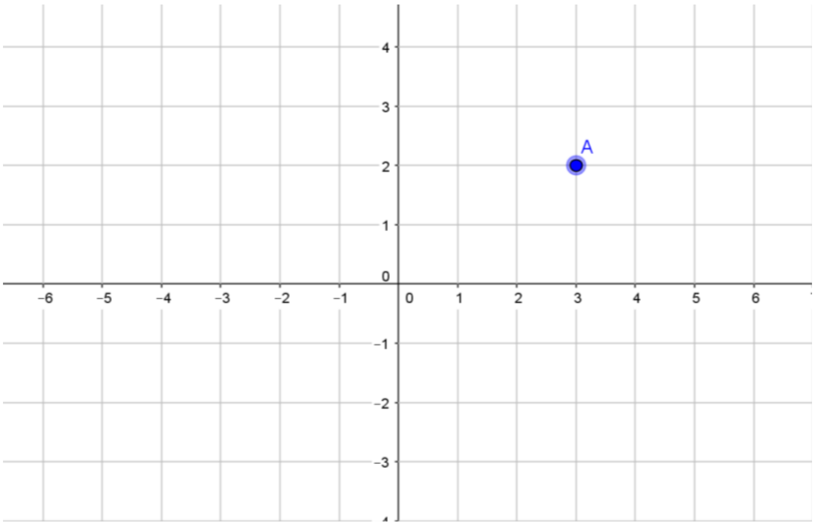
6) Qual é o par ordenado que representa o ponto A localizado no plano cartesiano a seguir?

(A) (2, 3)

(B) (3, 2)

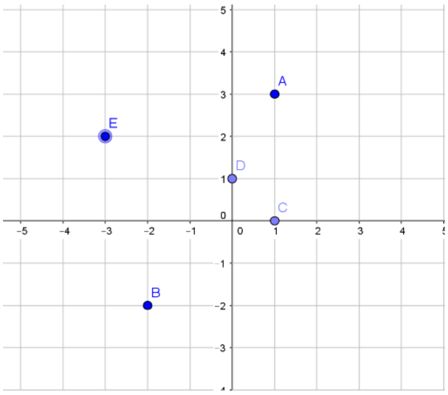
(C) (3, 0)

(D) (0, 2)

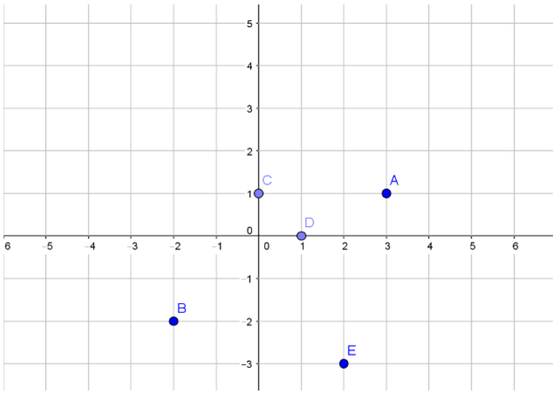


7) Qual dos planos cartesianos a seguir melhor representa as localizações dos pontos A(1, 3); B(-2, -2); C(1, 0); D(0, 1) e E(-3, 2)?

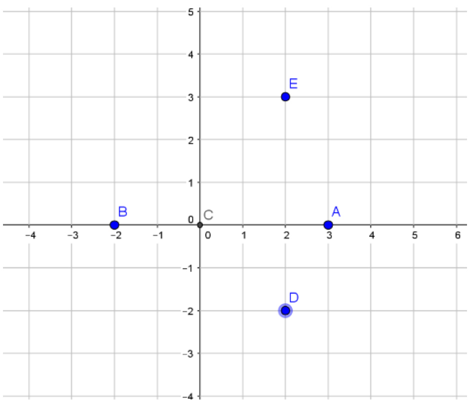
(A)



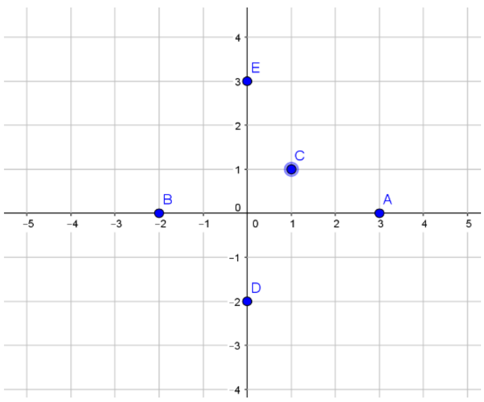
(B)



(C)



(D)



8) Qual é o conjunto solução da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 6 = 0$?

(A) S = {2, 3}

(B) S = {-2, 1}

(C) S = {-2, 3}

(D) S = {2, -1}

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO

9) Considere a função polinomial do 1º grau definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x - 3$. Qual é o valor de $f(-2)$?

(A) – 7.

(B) – 1.

(C) 1.

(D) 7.

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO

10) Qual é o valor de x do domínio da função $f(x) = 3x - 9$, para que tenhamos $f(x) = 0$?

(A) – 3.

(B) – 1.

(C) 1.

(D) 3.

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO

2.1.2 Material para o professor

Identificação do estudante:____

Título: Diagnóstico inicial

Objetivo: Realizar um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, necessários para a execução da Sequência Didática sobre função quadrática.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel.

Procedimento: Responda cada questão proposta a seguir, de acordo com o comando.

1) Qual é o resultado, respectivamente, das seguintes multiplicações: $2x.3x$; $4x.(3x+1)$; $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}).(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})$?

(A) $6x\,;7x+4x\,;2x+4$

(B) $6x^2\,;12x^2+4x\,;\;x^2+4x+4$

(C) $5x\,;12x+5x\,;\;x^2+4$

(D) $5x^2\,;12x^2+1\,;4x+4$

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO

$2x.3x = 6x^2$

$4x.(3x + 1) = 12x^2 + 4x$

$(x + 2).(x + 2) = x^2 + 4x + 4$

Letra B

2) Qual das expressões a seguir é um MONÔMIO?

(A) x^2+2x+1

(B) $3x^3+3x$

(C) $x+1$

(D) $4x^2$

$4x^2$ (Letra D)

3) Qual das expressões a seguir é um BINÔMIO?

(A) $4x$

(B) $2x+5$

(C) x^2+x+1

(D) $2x^3-x+3$

$2x + 5$ (Letra B)

4) Qual das expressões a seguir é um TRINÔMIO?

(A) x^2+3x-4

(B) $5x+4$

(C) $4x^2$

(D) $5x$

$x^2 + 3x – 4$ (Letra A)

5) Qual das expressões algébricas a seguir é de GRAU 2?

(A) $2x + 1$

(B) $4x^3 + 3x^2 – 2x – 1$

(C) $x^2 – 3x + 2$

(D) $5x^4 – 3x$

$x^2 – 3x + 2$ (Letra C)

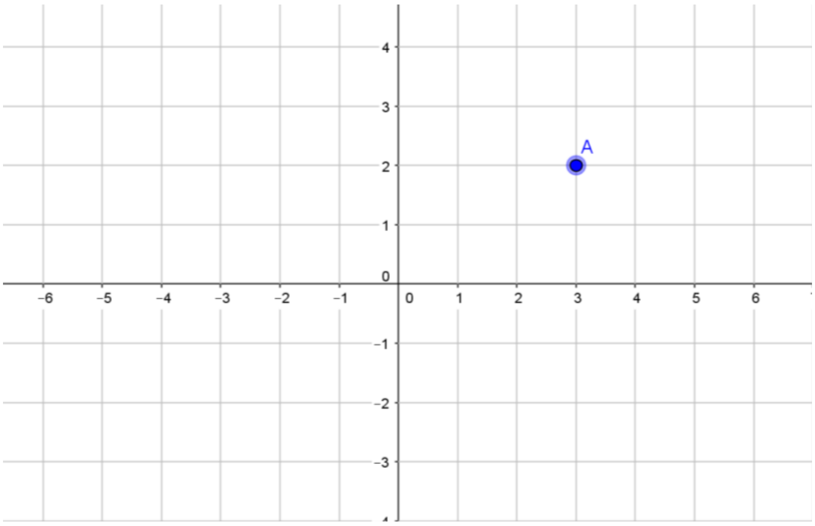
6) Qual é o par ordenado que representa o ponto A localizado no plano cartesiano a seguir?

(A) (2, 3)

(B) (3, 2)

(C) (3, 0)

(D) (0, 2)

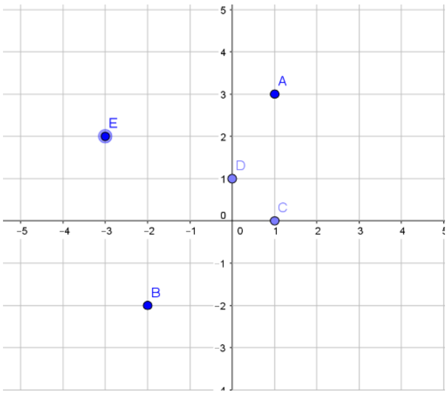


A(3, 2)

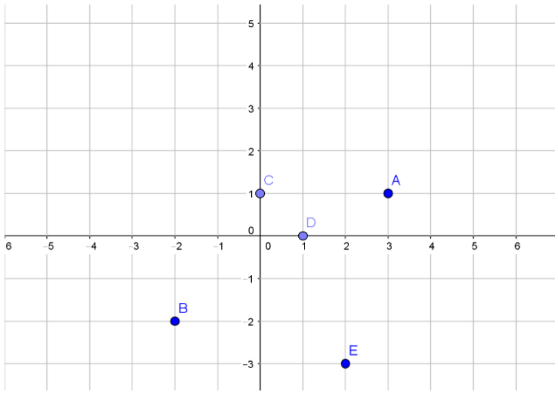
Letra B

7) Qual dos planos cartesianos a seguir melhor representa as localizações dos pontos A(1, 3); B(-2, -2); C(1, 0); D(0, 1) e E(-3, 2)? Letra A

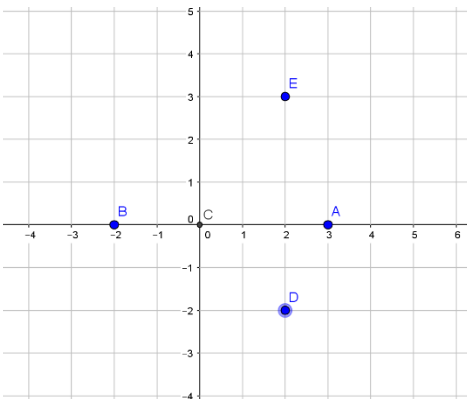
(A)



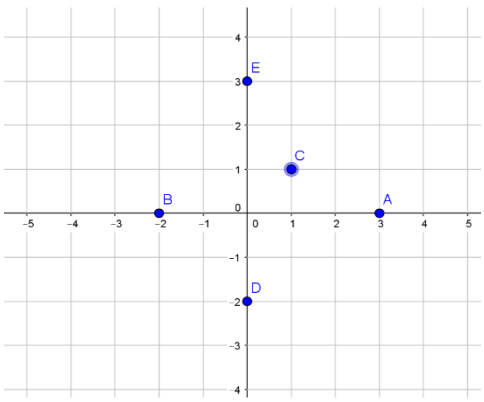
(B)



(C)



(D)



8) Qual é o conjunto solução da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 6 = 0$?

(A) S = {2, 3}

(B) S = {-2, 1}

(C) S = {-2, 3}

(D) S = {2, -1}

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO

S = {2, 3}

Letra A

9) Considere a função polinomial do 1º grau definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x - 3$. Qual é o valor de $f(-2)$?

(A) – 7.

(B) – 1.

(C) 1.

(D) 7.

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO

$f(-2) = -7$

Letra A

10) Qual é o valor de x do domínio da função $f(x) = 3x - 9$, para que tenhamos $f(x) = 0$?

(A) – 3.

(B) – 1.

(C) 1.

(D) 3.

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO

$x = 3$

Letra D

2.2 OFICINA DE NIVELAMENTO

A oficina de nivelamento dos conteúdos básicos necessários para o desenvolvimento da Sequência Didática, será direcionada de acordo com os resultados obtidos pelos estudantes no teste diagnóstico. Neste sentido, optei na não elaboração de um material específico para ser trabalhado com os estudantes, pois as necessidades irão variar de acordo com as especificidades de cada grupo envolvido.

Assim, sugiro que seja realizado um levantamento percentual do número de acertos e de erros de cada questão proposta no teste diagnóstico e, aquelas que apresentarem uma porcentagem de acertos inferior a 50%, deverão ser retomadas com os estudantes por meio de uma aula expositiva e dialogada, tendo em vista amenizar tais dificuldades de aprendizagem apresentadas.

2.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção apresento as doze atividades que materializam o texto da Sequência Didática elaborada de acordo com a estrutura proposta por Cabral (2017) denominada de UARC. A ideia é oportunizar aos estudantes, um ambiente educacional no qual possam interagir de forma dialógica entre si e com o professor de Matemática, buscando a (re)construção dos conceitos e propriedades matemáticas constante no objetivo de cada atividade.

A maioria das atividades elaboradas da Sequência Didática, devem ser realizadas com o auxílio de *applets*, os quais denominei de "QUADRÁTICO1", "QUADRÁTICO2", "QUADRÁTICO3", "QUADRÁTICO4", "QUADRÁTICO5" e "QUADRÁTICO6", todos de minha autoria, desenvolvido no software livre de geometria dinâmica *GeoGebra*[1]*.* Além disso, emergiu a necessidade de criar, também, uma calculadora para resolução de equações do 2º grau. Nesse sentido, criei no *App Inventor* tal calculadora, a qual denominei "EQUAÇÃO DO 2º GRAU".

A ideia dos aplicativos, surgiu durante o desenvolvimento da disciplina obrigatória Tecnologias de Informática no Ensino de Matemática ofertada pelo

---

[1] Sugiro a leitura do livro "Objetos de aprendizagem no *GeoGebra*", da editora CRV, organizado pelos professores do PMPEM da UEPA Dr. Fábio Alves e Dra. Cinthia Pereira.

PMPEM da UEPA e, durante a socialização da Sequência Didática no Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ).

Eles foram desenvolvidos com o objetivo de dinamizar o processo de execução das atividades materializadas na Sequência Didática, tendo em vista melhor visualizar e compreender, mesmo que de forma intuitiva, conceitos e propriedades referentes à temática. Neste sentido, eles são importantes para a execução das situações propostas, pois os estudantes terão a oportunidade de levantar hipótese, testar, conjecturar, observar as regularidades e estabelecer padrões matemáticos, procedimentos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático.

No Quadro 4 a seguir, organizo esses objetos de aprendizagem em termos de: material, descrição e utilização.

Quadro 4: Sistematização dos objetos de aprendizagem

MATERIAL	DESCRIÇÃO	UTILIZAÇÃO
"QUADRÁTICO1"	Aplicativo construído no *GeoGebra*. Após inserção dos coeficientes da função quadrática, possibilita visualizar o comportamento da parábola no plano cartesiano.	Atividade 3
"QUADRÁTICO2"	Aplicativo construído no *GeoGebra.* Após inserção dos coeficientes da função quadrática, possibilita visualizar o ponto de intersecção da parábola com eixo das ordenadas.	Atividade 4
"QUADRÁTICO3"	Aplicativo construído no *GeoGebra.* Após inserção dos coeficientes da função quadrática, possibilita visualizar os pontos de intersecção, quando existir, da parábola com eixo das abscissas.	Atividade 6
"QUADRÁTICO4"	Aplicativo construído no *GeoGebra.* Após inserção dos coeficientes da função quadrática, possibilita visualizar a quantidade de pontos de intersecção da parábola com eixo das abscissas.	Atividade 7
"QUADRÁTICO5"	Aplicativo construído no *GeoGebra.* Após inserção dos coeficientes da função quadrática, possibilita visualizar o ponto que representa o vértice da parábola.	Atividade 8 Atividade 9 Atividade 11 Atividade 12
"QUADRÁTICO6"	Aplicativo construído no *GeoGebra.* Após inserção dos coeficientes da função quadrática, possibilita visualizar o ponto que representa o vértice da parábola e os pontos de intersecção da mesma, quando existir, com o eixo das abscissas.	Atividade 10
Calculadora "EQUAÇÃO DO 2º GRAU"	Aplicativo construído no *App Inventor*. Após a inserção dos coeficientes da equação do 2º grau, possibilitar calcular as raízes da equação, assim como também, o valor do discriminante *delta.*	Atividade 6 Atividade 7 Atividade 11
Quadro de Curvas	Material concreto construído no editor de texto *word.* Possibilita fazer comparações entre as construções dos estudantes e as denominações das curvas presentes no mesmo.	Atividade 2

Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Os objetos de aprendizagem ora descritos, podem ser visualizados nos apêndices deste trabalho. Além disso, todos estão disponíveis para *download* no *site* oficial do PMPEM da UEPA por meio do *link*: *:*<ccse.uepa.br/pmpem>.

O Quadro 5 traz uma proposta de organização das atividades, a saber: ordenação das aulas, título da atividade e previsão do número de aulas para o desenvolvimento dela. A ideia é partir da construção da definição de função quadrática até chegar ao cálculo das coordenadas do vértice da parábola.

Quadro 5: Proposta de organização das atividades

Sessão	**Título da Atividade**	**Tempo estimado**
1ª	Diagnóstico inicial	1 aula de 45 min
2ª	A expressão algébrica	3 aulas de 45 min
3ª	O gráfico da função quadrática	2 aulas de 45 min
4ª	A concavidade da parábola	1 aula de 45 min
5ª	O termo independente	
6ª	Os zeros da função quadrática (Parte 1)	2 aulas de 45 min
	Os zeros da função quadrática (Parte 2)	
	Os zeros da função quadrática (Parte 3)	
7ª	Um dos elementos da parábola	2 aulas de 45 min
	A abscissa do vértice (Parte 1)	
	A abscissa do vértice (Parte 2)	
8ª	A ordenada do vértice (Parte 1)	2 aulas de 45 min
	A ordenada do vértice (Parte 2)	

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

Cada atividade foi elaborada com a intenção de amenizar em parte os problemas referentes ao processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos relativos à função quadrática, apontados na literatura e nas pesquisas de campo realizada com amostras de alunos egressos e de professores de Matemática.

2.3.1 Material para o aluno

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (1)

Identificação do estudante:_________________________________ Grupo:______

Título: A expressão algébrica

Objetivo: Introduzir o conceito de função quadrática a partir da relação existente entre a geometria e a álgebra.

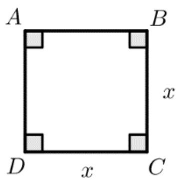
Material: roteiro da atividade, papel, lápis ou caneta.

Procedimentos:

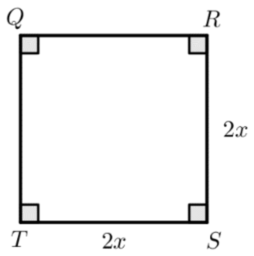
Tendo em vista que a medida da área de um quadrado ou de um retângulo é determinada pela multiplicação de suas dimensões (largura x comprimento), determine a área y de cada figura plana a seguir, conforme cada situação.

Situação (I)

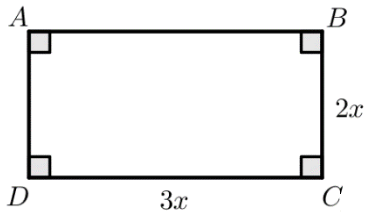
a)



b)



c)



Área da figura *ABCD*:

y =

Área da figura *QRST*:

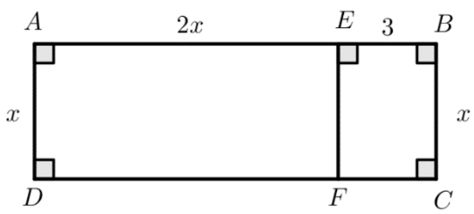
y =

Área da figura *ABCD*:

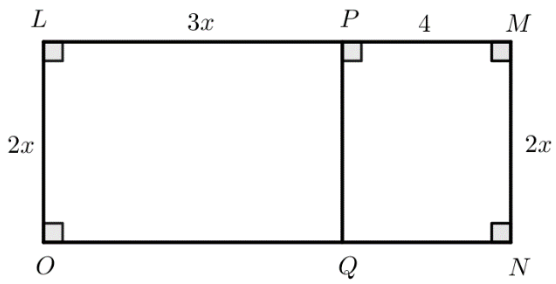
y =

Situação (II)

a)



b)



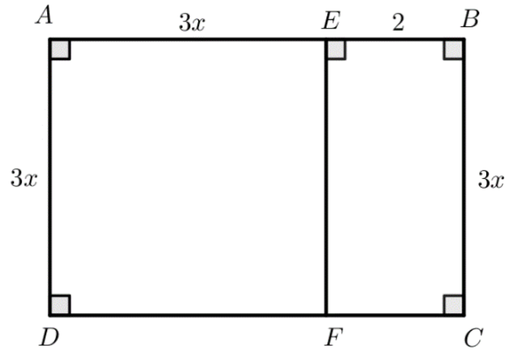
Área da figura *ABCD*:

y =

Área da figura *LMNO:*

y =

c)

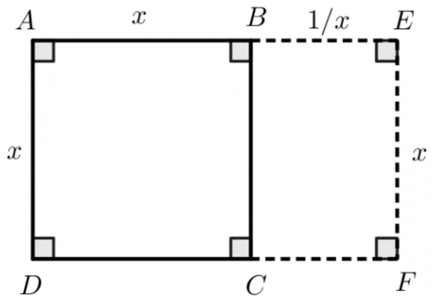


Área da figura *ABCD:*

y =

Situação (III)

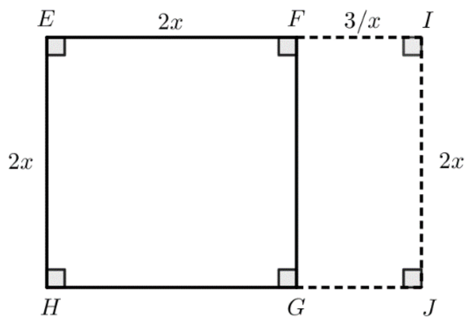
a)



Área da figura *AEFD*:

y =

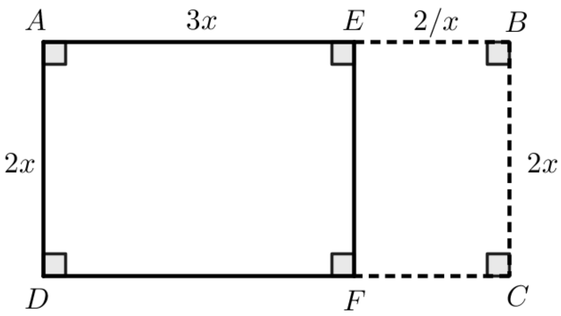
b)



Área da figura *EIJH*:

y =

c)

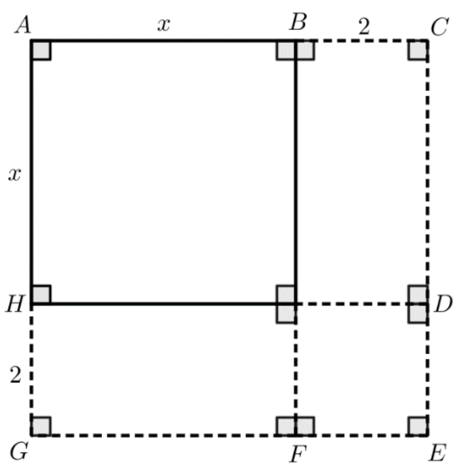


Área da figura *ABCD:*

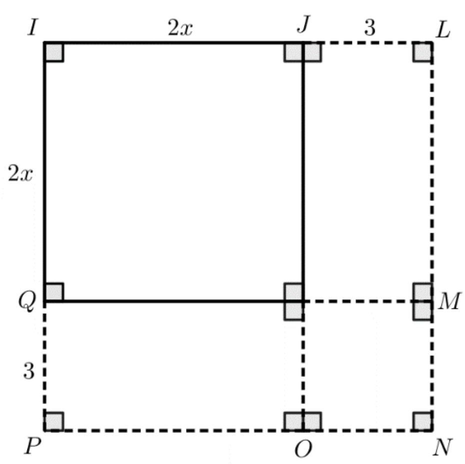
y =

Situação (IV)

a)



b)



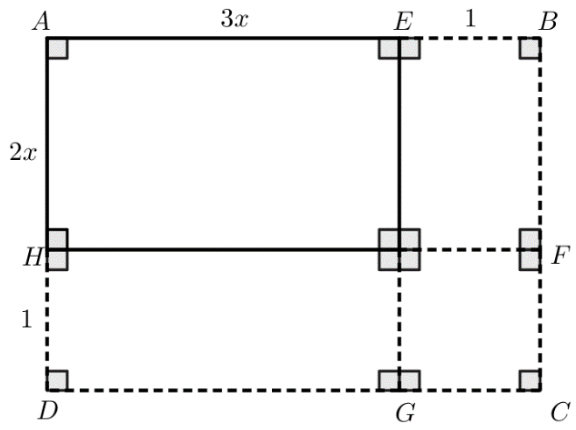
Área da figura *ACEG*:

y =

Área da figura *ILNP:*

y =

c)



Área da figura *ABCD:*

y =

De acordo com as expressões obtidas para a área y em cada situação anterior, preencha a tabela seguinte:

SITUAÇÕES	**EXPRESSÕES OBTIDAS PARA A ÁREA**		
(I)	a) y =	b) y =	c) y =
(II)	a) y =	b) y =	c) y =
(III)	a) y =	b) y =	c) y =
(IV)	a) y =	b) y =	c) y =

Agora, faça o que se pede:

1) As expressões obtidas são exemplos de igualdades ou desigualdades?

2) Considerando apenas o segundo membro das expressões obtidas para a área de cada figura plana nas situações **(I), (II), (III) e (IV)**, respectivamente, elas são exemplos de monômios, binômios ou trinômios?

3) Considerando apenas o segundo membro das expressões obtidas para a área de cada figura plana nas situações **(I), (II), (III) e (IV)**, qual é o grau de cada uma delas?

4) De acordo com as reflexões feitas anteriormente, quais as características em comuns apresentadas pelas expressões obtidas nas situações **(I), (II), (III)** e **(IV)**?

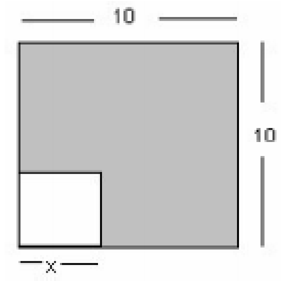
5) Escreva para cada situação **(I), (II), (III)** e **(IV)**, uma expressão matemática que possibilite generalizar cada uma delas, de acordo com o padrão observado.

Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

Intervenção avaliativa

1) Um quadrado de cartolina tem lados medindo 10 cm. Em um dos cantos foi cortado um pedaço quadrado cujos tamanhos dos lados medem x. Determine a expressão que representa a área da figura pintada de cinza.



RESOLUÇÃO:

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (2)

Identificação do estudante:__________________________________ Grupo:______

Título: O gráfico da função quadrática

Objetivo: descobrir a representação geométrica para a função quadrática.

Material: Roteiro da atividade, papel, lápis e “Quadro de Curvas”.

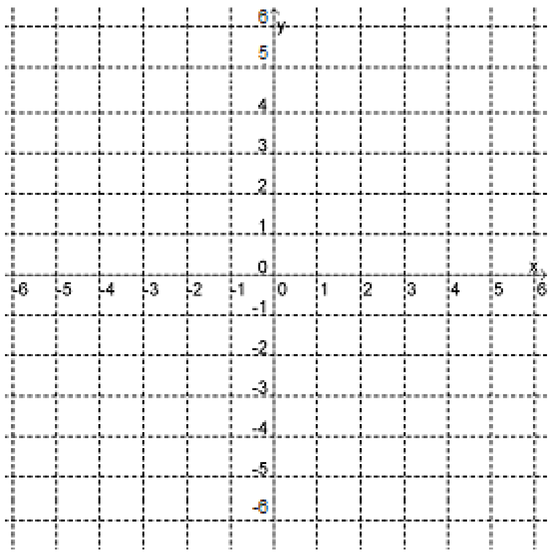
Procedimentos:

Para cada função a seguir, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, pede-se:

- determine o valor da imagem de cada valor de x dado na tabela;
- determine o par ordenado (x, f(x));
- marque os pares ordenados no plano cartesiano;
- ligue os pontos marcados por uma única curva.

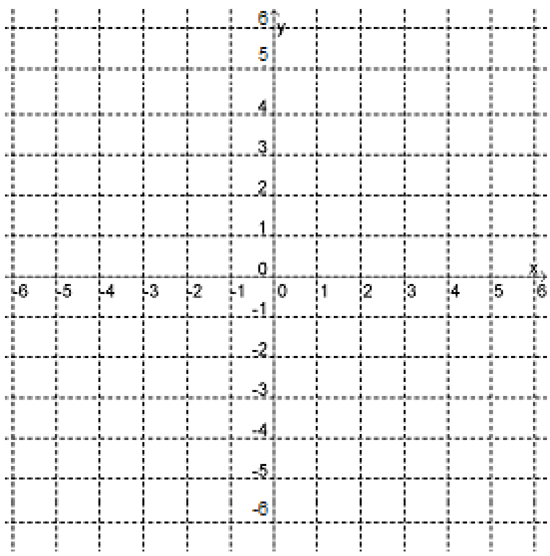
a)

x	$f(x) = x^2$	(x, f(x))
- 2		
- 1		
0		
1		
2		



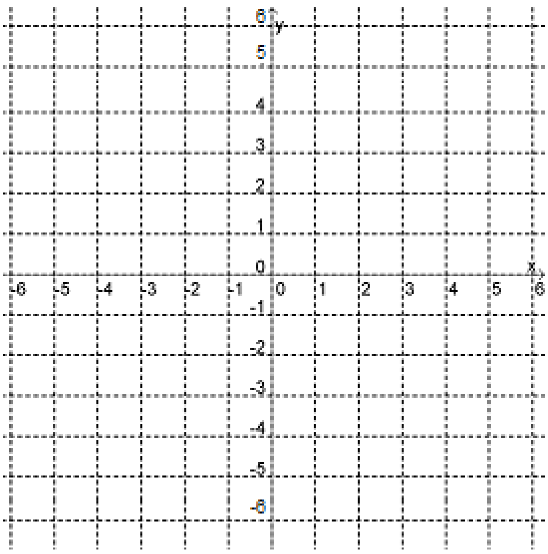
b)

x	$f(x) = - x^2$	(x, f(x))
- 2		
- 1		
0		
1		
2		



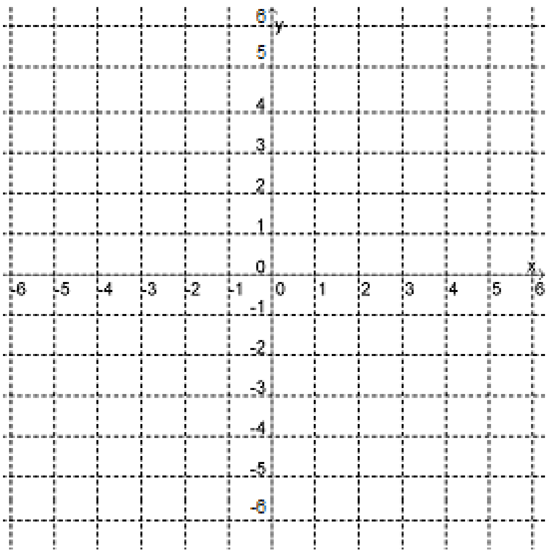
c)

x	$f(x) = x^2 + 1$	(x, f(x))
- 2		
- 1		
0		
1		
2		



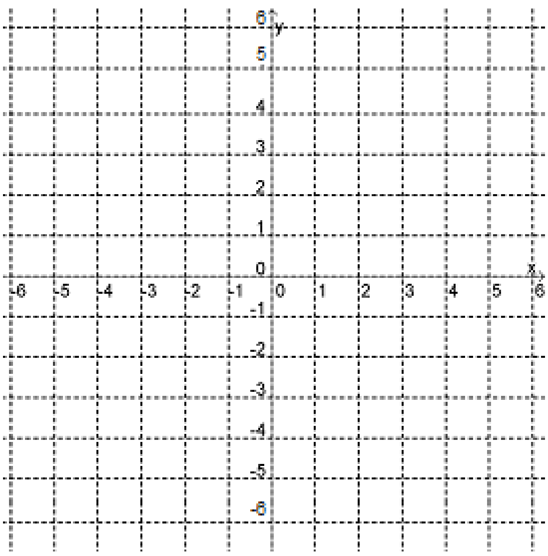
d)

x	$f(x) = - x^2 + 4$	(x, f(x))
- 2		
- 1		
0		
1		
2		



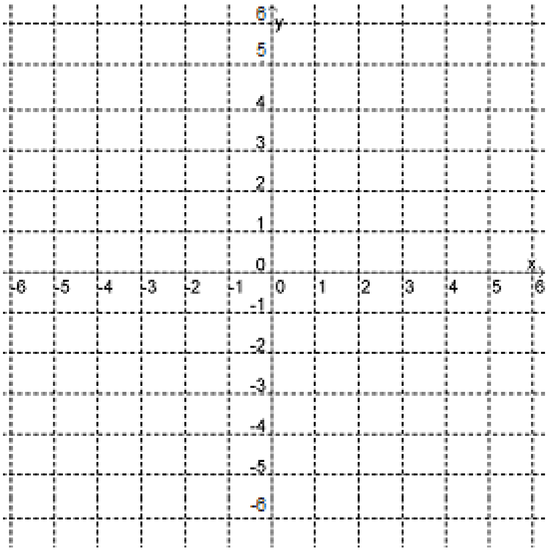
e)

x	$f(x) = x^2 – 2x$	(x, f(x))
- 1		
0		
1		
2		
3		



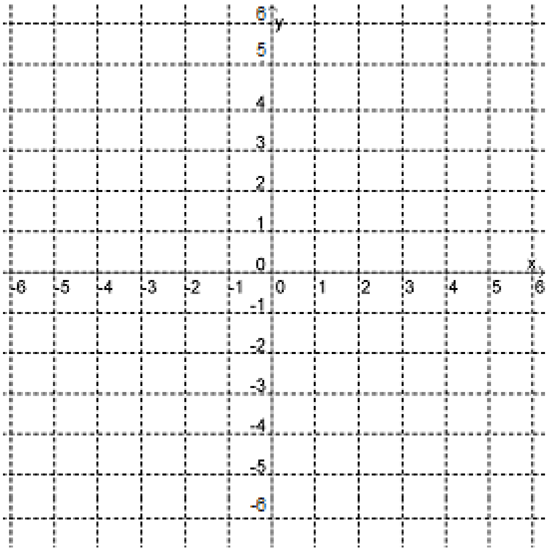
f)

x	f(x) = - x^2 + 4x	(x, f(x))
0		
1		
2		
3		
4		



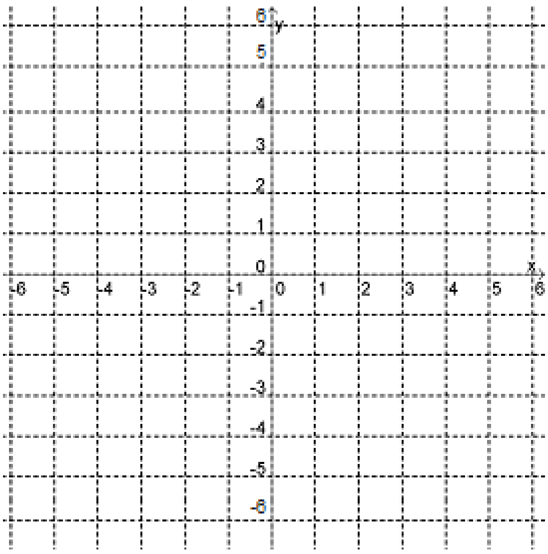
g)

x	f(x) = x^2 - 2x +1	(x, f(x))
-1		
0		
1		
2		
3		



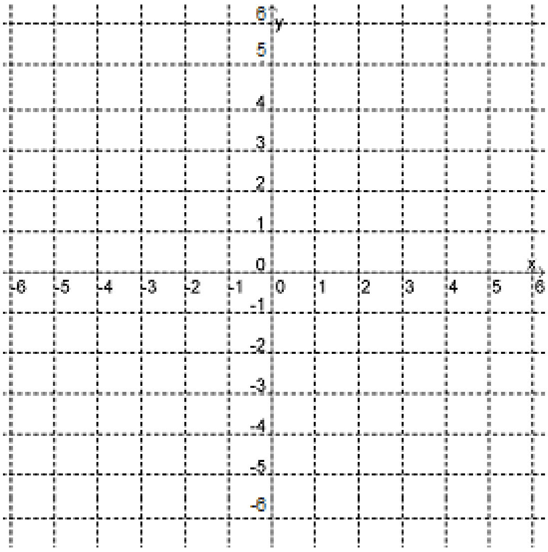
h)

x	f(x) = - x^2 - 2x – 1	(x, f(x))
-3		
-2		
-1		
0		
1		



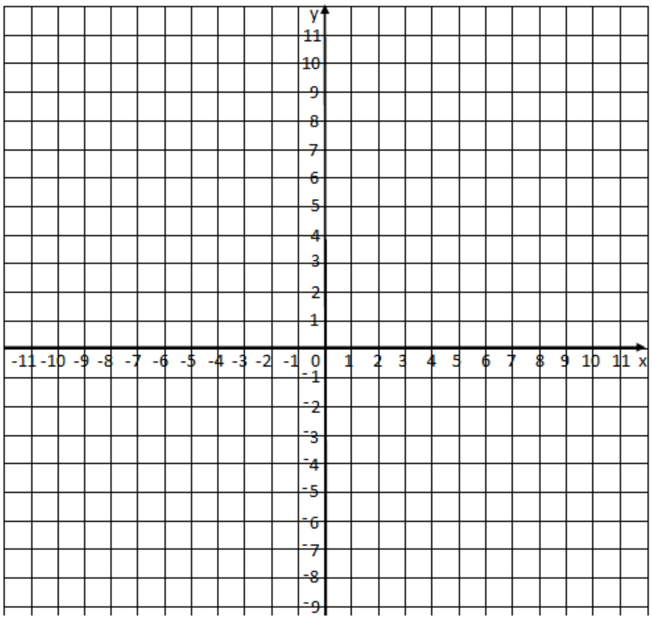
i)

x	f(x) = x + 1	(x, f(x))
-3		
-2		
-1		
0		
1		



j)

x	$f(x) = x^3$	(x, f(x))
-2		
-1		
0		
1		
2		



Agora, faça o que se pede:

1) Todas as funções anteriores são quadráticas?

2) De acordo com o Quadro de Curvas fornecido, qual(is) o(s) nome(s) das curvas traçadas em cada item anterior?

3) De acordo com as reflexões anteriores, como se denomina a curva que representa uma função quadrática?

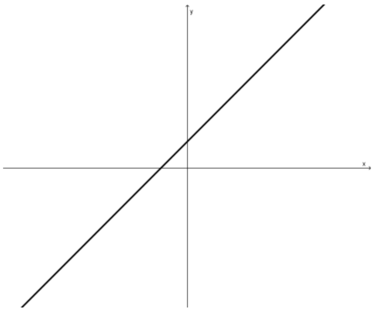
Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

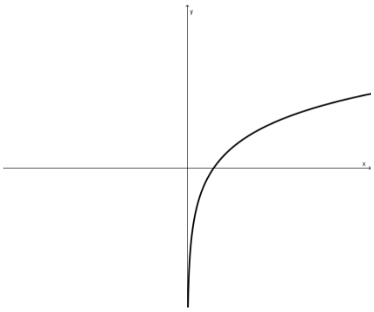
Intervenção avaliativa

2) Qual das representações geométricas a seguir, melhor representa a função quadrática ***f(x) = ax² + bx + c,*** definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$?

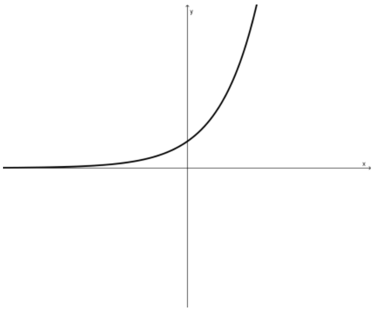
(A)



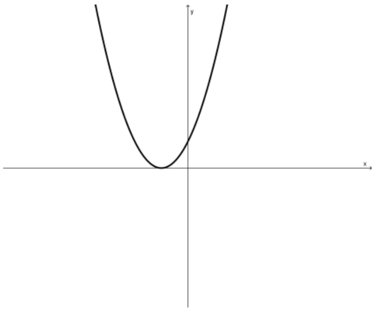
(B)



(C)



(D)



Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (3)

Identificação do estudante:___________________________________ Grupo:______

Título: A concavidade da parábola

Objetivo: Descobrir uma relação indireta entre os coeficientes da função quadrática e a concavidade da parábola.

Material: Roteiro da atividade, papel, lápis e aplicativo “QUADRÁTICO1”.

Procedimentos:

Para cada função quadrática a seguir:

- determine o valor de cada coeficiente;
- digite os coeficientes encontrados na tabela seguinte no aplicativo “QUADRÁTICO1”;
- observe a concavidade (abertura) da parábola gerada no aplicativo e anote na tabela seguinte se a mesma está voltada **para cima** ou **para baixo**.

Função quadrática	Coeficiente “a”	Coeficiente “b”	Coeficiente “c”	Concavidade da parábola
$f(x) = x^2$				
$f(x) = - x^2$				
$f(x) = 3x^2 + x$				
$f(x) = - 3x^2 + x$				
$f(x) = 4x^2 + 2$				
$f(x) = - 4x^2 + 2$				
$f(x) = 2x^2 – 3x – 4$				
$f(x) = - 2x^2 + 3x + 4$				
$f(x) = x^2 + 3x – 5$				
$f(x) = - x^2 – 3x + 5$				

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) De acordo com os dados obtidos, após o preenchimento da tabela anterior com o auxílio do aplicativo, qual dos coeficientes “a”, “b” ou “c” é responsável em alterar a concavidade da parábola?

2) Complete corretamente os espaços seguintes, de acordo com as reflexões feitas anteriormente.

O coeficiente ____________ de uma função quadrática, é o responsável pela mudança da concavidade da parábola. Quando o coeficiente ___________ for maior do que zero, ou seja, um valor positivo, a concavidade da parábola estará voltada para ____________, enquanto que se o coeficiente ____________ for um valor menor do que zero, ou seja, negativo, a concavidade da parábola estará voltada para _______________.

Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

Intervenção Avaliativa

3) Para cada função quadrática a seguir, definidas de $\mathbb{R}\, em\, \mathbb{R},$ determine os seus coeficientes e diga se o gráfico tem a concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = 2x^2 – 5x + 3$ ***a = ; b = ; c = ; concavidade:***

b) $f(x) = - 3x^2 + 2x – 1$ ***a = ; b = ; c = ; concavidade:***

c) $f(x) = x^2 + 3x$ ***a = ; b = ; c = ; concavidade:***

d) $f(x) = - x^2 + 6$ ***a = ; b = ; c = ; concavidade:***

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (4)

Identificação do estudante:___________________________________ Grupo:______

Título: O termo independente

Objetivo: Relacionar o termo independente da função quadrática com o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e aplicativo “QUADRÁTICO2”.

Procedimentos:

Para cada função quadrática seguinte, determine:

- o termo independente “c”;
- com o auxílio do aplicativo “QUADRÁTICO2”, as coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y;
- o valor da ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y.

Função Quadrática	**Termo independente “c”**	**Coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y**	**Valor da ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y**
$f(x) = x^2 – 6x + 5$			
$f(x) = - x^2 - 4x – 3$			
$f(x) = x^2 + 2x + 1$			
$f(x) = - x^2 + 2x - 1$			
$f(x) = 2x^2 – 4x$			
$f(x) = - x^2 + 4x$			
$f(x) = 2x^2 + 1$			
$f(x) = - 3x^2 – 1$			
$f(x) = x^2$			
$f(x) = - x^2$			

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) O termo independente **c** obtido em cada caso, é igual ou diferente ao valor da ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo **y**?

2) Podemos afirmar de forma intuitiva, que o termo independente de uma função quadrática corresponde a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo **y**?

3) Complete corretamente os espaços seguintes, de acordo com as reflexões feitas anteriormente.

Para toda função quadrática *f(x)* = ax^2 + *bx* + *c*, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$, temos que a ________________ do ponto de intersecção da parábola com o eixo y, corresponde ao termo independente _________ da referida função.

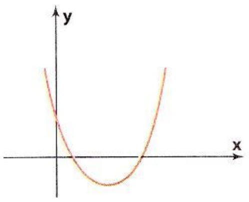
Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

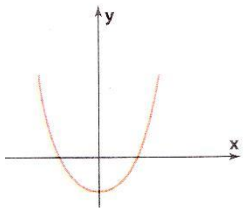
Intervenção Avaliativa

4) Seja $f(x) = x^2 - 4x + 3$ uma função quadrática definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$. Qual dos gráficos, melhor representa *f(x)*?

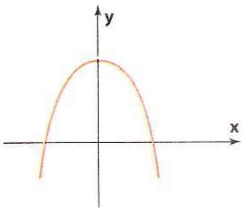
(A)



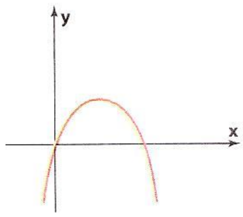
(C)



(B)



(D)



Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (5)

Identificação do estudante:_________________________________ Grupo:______

Título: Os zeros da função quadrática (Parte 1)

Objetivo: Compreender o significado algébrico dos zeros de uma função quadrática, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$.

Material: Roteiro da atividade, lápis e papel.

Procedimentos:

Para cada questão a seguir, determine o que se pede.

1) Quais os valores de ***x*** do domínio das funções quadráticas a seguir, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, que tornam a imagem ***f(x)*** igual a zero?

a) $f(x) = x^2 – 4x + 3$

c) $f(x) = 2x^2 – 4x + 2$

b) $f(x) = - x^2 – 3x - 2$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 5$

2) Complete corretamente os espaços seguintes, de acordo com as reflexões feitas anteriormente.

Os valores de ______ do domínio da função quadrática, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, que tornam a imagem ________ igual ao zero, são chamados de __________ da função quadrática.

Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

Intervenção Avaliativa

5) A função $L(x) = -100x^2 + 1200x - 2700$ representa o lucro de uma empresa, em milhões de reais, onde x é a quantidade de unidades vendidas. Quantas unidades desse produto a empresa deve vender para não ter lucro nem prejuízo?

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (6)

Identificação do estudante:_________________________________ Grupo:______

Título: Os zeros da função quadrática (Parte 2)

Objetivo: Compreender o significado geométrico dos pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel, o aplicativo "QUADRÁTICO3" e a calculadora "EQUAÇÃO DO 2º GRAU".

Procedimentos:

Para cada função quadrática, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$ a seguir, determine:

- os coeficientes "a", "b" e "c";
- os zeros da função com o auxílio da calculadora "EQUAÇÃO DO 2º GRAU";
- digite os valores dos coeficientes no espaço destinado no aplicativo "QUADRÁTICO3";
- observe o gráfico e anote os valores correspondentes às abscissas dos pontos de intersecção com o eixo das abscissas.

Função Quadrática	Coeficientes			Zeros	Abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo x
	a	b	c		
$f(x) = x^2 – 5x + 6$					
$f(x) = - x^2 + 2x + 3$					
$f(x) = 2x^2 – 4x$					
$f(x) = - 3x^2 – 9x$					
$f(x) = x^2 – 4$					
$f(x) = - x^2 + 1$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = - x^2$					
$f(x) = - x^2 – 1$					
$f(x) = x^2 + 2x + 3$					

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) Os valores, caso existam, dos "zeros" de cada função anterior, são iguais ou diferentes aos valores das abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo x?

2) Quando a função quadrática não admite "zeros" reais, a parábola intersecta o eixo x?

3) Complete corretamente os espaços seguintes, de acordo com as reflexões feitas anteriormente.

As abscissas correspondentes aos pontos de intersecção da parábola com o eixo ________ correspondem aos __________ da função quadrática.

Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

Intervenção Avaliativa

6) Seja f uma função quadrática definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Sabemos que sua representação geométrica não intersecta o eixo das abscissas. Assim, é correto afirmar que a função f

(A) admite dois “zeros” reais e diferentes.

(B) admite dois “zeros” reais e iguais.

(C) não admite “zeros” reais.

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (7)

Identificação do estudante:________________________________ Grupo:______

Título: Os zeros da função quadrática (Parte 3)

Objetivo: Relacionar a quantidade de zeros da função quadrática, a partir da análise de sua representação geométrica, com o discriminante.

Material: Roteiro da atividade, papel, lápis e aplicativo “QUADRÁTICO4”.

Procedimentos:

Para cada função quadrática seguinte:

- determine os coeficientes “a”, “b” e “c”;
- digite os coeficientes no espaço destinado, respectivamente, no aplicativo “QUADRÁTICO4”;
- determine a quantidade de pontos de intersecção do gráfico com o eixo x;
- determine o discriminante *DELTA* com o auxílio da calculadora “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”.

Função quadrática	**a**	**b**	**c**	**Intersecção da parábola com o eixo das abscissas**			**Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$**	**O *delta* é...**		
				Nenhuma	**Uma**	**Duas**		**$\Delta>0$**	**$\Delta<0$**	**$\Delta=0$**
$f(x) = x^2 - 4x + 3$										
$f(x) = - x^2 - 3x - 2$										
$f(x) = 2x^2 - 4x + 2$										
$f(x) = -2x^2 + 4x - 4$										
$f(x) = 3x^2 - 9x$										
$f(x) = - x^2 + 4x$										
$f(x) = x^2 - 9$										
$f(x) = 2x^2 + 4$										
$f(x) = 4x^2$										
$f(x) = - 3x^2$										

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) Nos casos em que se obteve $\Delta>0$, qual foi o número de intersecção da parábola com o eixo das abscissas obtido?

(   ) Nenhuma.   (   ) Uma.   (   ) Duas.

2) Nos casos em que se obteve $\Delta<0$, qual foi o número de intersecção da parábola com o eixo das abscissas obtido?

(   ) Nenhuma.   (   ) Uma.   (   ) Duas.

3) Nos casos em que se obteve $\Delta=0$, qual foi o número de intersecção da parábola com o eixo das abscissas obtido?

(   ) Nenhuma.   (   ) Uma.   (   ) Duas.

4) Vimos, na Atividade 5, que a quantidade de intersecção da parábola com o eixo das abscissas corresponde à quantidade de "zeros" de uma função quadrática, isto é, se a parábola intersectar uma vez o eixo das abscissas, a função quadrática admitirá um "zero", se intersectar duas vezes admitirá dois "zeros" e, se não intersectar, a função quadrática não admitirá "zeros" reais. Neste sentido, que relação podemos estabelecer entre a quantidade de "zeros" de uma função quadrática, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, e o discriminante Δ (delta) desta mesma função?

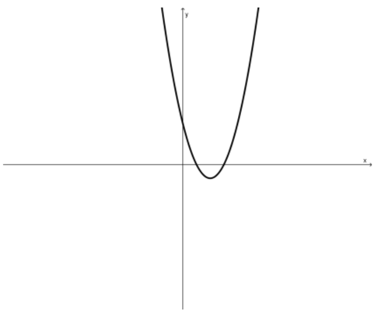
Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

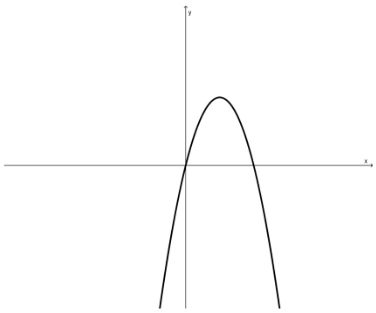
Intervenção avaliativa

7) Os gráficos seguintes representam geometricamente a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$. Para cada uma das representações diga se o $\Delta > 0$, Se $\Delta = 0$ ou Se $\Delta < 0$. Justifique sua resposta.

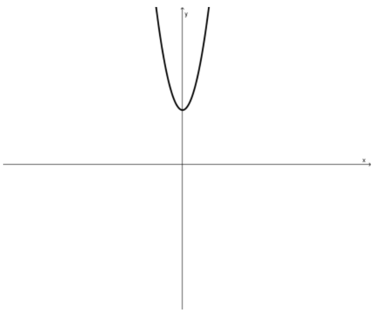
a)



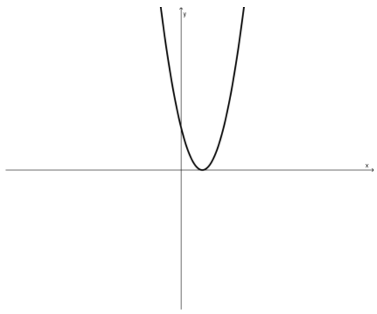
b)



c)



d)



Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (8)

Identificação do estudante:_________________________________ Grupo:______

Título: Um dos elementos da parábola

Objetivo: Compreender o que significa o ponto mais alto ou mais baixo de uma parábola.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e o aplicativo “QUADRÁTICO5”.

Procedimento:

Para cada função quadrática, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, a seguir:

- determine os valores dos coeficientes;
- digite esses valores nos espaços disponíveis, respectivamente, no aplicativo “QUADRÁTICO5”;
- preencha o restante da tabela seguinte de acordo com o gráfico gerado no aplicativo.

Função quadrática	**Coeficientes**			**A parábola apresenta um ponto mais alto ou mais baixo?**	**Quais são as coordenadas desse ponto?**
	a	**b**	**c**		
$f(x) = x^2 – 6x + 5$					
$f(x) = - x^2 - 4x – 3$					
$f(x) = x^2 + 2x + 1$					
$f(x) = - x^2 + 2x - 1$					
$f(x) = 2x^2 – 4x$					
$f(x) = - x^2 + 4x$					
$f(x) = 2x^2 + 1$					
$f(x) = - 3x^2 – 1$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = - x^2$					

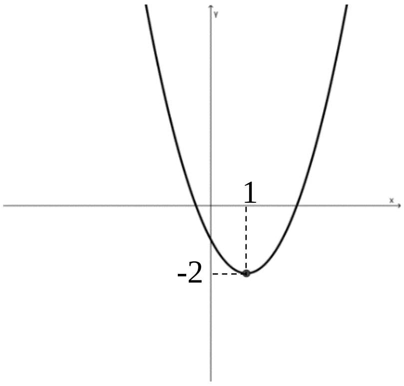
Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

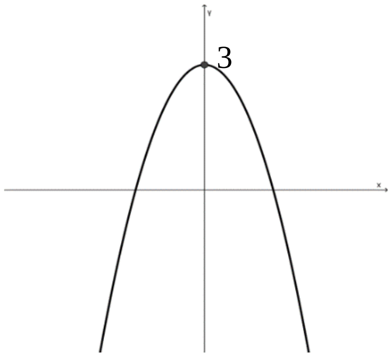
Intervenção Avaliativa

8) Para cada parábola a seguir diga se a mesma apresenta ponto de máximo ou de mínimo e as coordenadas do vértice.

a)



b)



Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (9)

Identificação do estudante:___________________________________ Grupo:______

Título: A abscissa do vértice (Parte 1)

Objetivo: Descobrir uma maneira de obter a abscissa do vértice de uma parábola.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e o aplicativo "QUADRÁTICO5".

Procedimento:

Para cada função quadrática definidas de $\mathbb{R}\, em\ \mathbb{R}$ a seguir:

- determine os coeficientes "a", "b" e "c";
- determine o valor da razão $-\frac{b}{2a}$;
- digite os coeficientes no espaço destinados aos mesmos no aplicativo "QUADRÁTICO5";
- observe a parábola gerada pelo aplicativo e preencha o restante da tabela seguinte de acordo com o que está sendo pedido.

Função quadrática	**Coeficientes**			$-\frac{b}{2a}$	**Valor da abscissa do vértice.**
	a	**b**	**c**		
$f(x) = x^2 – 6x + 5$					
$f(x) = - x^2 - 4x – 3$					
$f(x) = x^2 + 2x + 1$					
$f(x) = - x^2 + 2x - 1$					
$f(x) = 2x^2 – 4x$					
$f(x) = - x^2 + 4x$					
$f(x) = 2x^2 + 1$					
$f(x) = - 3x^2 – 1$					
$f(x) = x^2$					
$f(x) = - x^2$					

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) Os valores obtidos para a razão $-\frac{b}{2a}$ e para a abscissa do vértice, para cada função quadrática, são iguais ou diferentes?

2) Podemos afirmar, intuitivamente, que a razão $-\frac{b}{2a}$ permite determinar a abscissa do vértice de uma parábola, definida de $\mathbb{R}\, em\ \mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$?

Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

Intervenção avaliativa

9) Qual é o valor real de *k* na função $f(x) = x^2 - kx + 3$, sabendo que a abscissa do vértice da parábola que a representa é igual a 4?

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (10)

Identificação do estudante:___________________________________ Grupo:______

Título: A abscissa do vértice (Parte 2)

Objetivo: Relacionar os zeros da função quadrática com a abscissa do vértice da parábola.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e aplicativo “QUADRÁTICO6”

Procedimento:

Para cada função quadrática definidas de $\mathbb{R}\, em\ \mathbb{R}$ a seguir, determine:

- os coeficientes e, em seguida, digite-os nos espaços destinados aos mesmos no aplicativo “QUADRÁTICO6”;
- os zeros da função com o auxílio do aplicativo “QUADRÁTICO6”;
- a média aritmética simples dos zeros da função;
- o valor da abscissa do vértice da parábola com auxílio do aplicativo “QUADRÁTICO6”.

Função quadrática	Coeficientes			Zeros		$\frac{x_1 + x_2}{2}$	Valor da abscissa do vértice.
	a	b	c	x_1	x_2		
$f(x) = x^2 – 6x + 5$							
$f(x) = - x^2 - 4x – 3$							
$f(x) = x^2 + 2x + 1$							
$f(x) = - x^2 + 2x - 1$							
$f(x) = 2x^2 – 4x$							
$f(x) = - x^2 + 4x$							
$f(x) = x^2 - 1$							
$f(x) = - x^2 + 4$							
$f(x) = x^2$							
$f(x) = - x^2$							

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) O valor obtido para $\frac{x_1+x_2}{2}$ (média aritmética simples dos zeros da função quadrática), é igual ou diferente do valor da abscissa do vértice em cada caso?

2) Podemos afirmar, portanto, de forma intuitiva, que o valor da abscissa do vértice de uma parábola é igual a média aritmética simples dos zeros da função quadrática que a representa?

3) Seja uma função f definida de $\mathbb{R}\, em\, \mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$, sempre será possível determinarmos a abscissa do vértice da parábola que a representa, por meio da média aritmética simples dos zeros da mesma? Justifique.

Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

Intervenção avaliativa

10) Sabendo-se que os zeros de uma função quadrática são 2 e 4, então quanto vale a abscissa do vértice da parábola que a representa?

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (11)

Identificação do estudante:___________________________________ Grupo:______

Título: A ordenada do vértice (Parte 1)

Objetivo: Descobrir uma maneira de obter a ordenada do vértice de uma parábola.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel, aplicativo “QUADRÁTICO5” e calculadora “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”.

Procedimento:

Para cada função quadrática definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$ a seguir:

- determine os coeficientes “a”, “b” e “c”;
- determine o valor da razão $-\frac{\Delta}{4a}$ com o auxílio da calculadora “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”;
- digite os coeficientes no espaço destinados aos mesmos no aplicativo “QUADRÁTICO5”;
- observe a parábola gerada na tela do aplicativo e preencha o restante da tabela seguinte de acordo com o que está sendo pedido.

Função Quadrática	**Coeficientes**			$-\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\boldsymbol{4a}}$ $(\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac})$	**Valor da ordenada do vértice.**
	a	**b**	**c**		
f(x) = $x^2 - 6x + 5$					
f(x) = $- x^2 - 4x - 3$					
f(x) = $x^2 + 2x + 1$					
f(x) = $- x^2 + 2x - 1$					
f(x) = $2x^2 - 4x$					
f(x) = $- x^2 + 4x$					
f(x) = $2x^2 + 1$					
f(x) = $- 3x^2 - 1$					
f(x) = x^2					
f(x) = $- x^2$					

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) O valor obtido para a razão $-\frac{\Delta}{4a}$ é igual ou diferente ao valor da ordenada do vértice em cada caso?

2) Podemos afirmar, intuitivamente, que a razão $-\frac{\Delta}{4a}$ permite determinar a ordenada do vértice de uma parábola, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$?

Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

Intervenção avaliativa

11) Qual deve ser o valor de *m* na função $f(x) = x^2 - 4x + m$, para que a ordenada do vértice da parábola que a representa seja igual a -4?

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (12)

Identificação do estudante:_________________________________ Grupo:______

Título: A ordenada do vértice (Parte 2)

Objetivo: Descobrir uma maneira de determinar a ordenada do vértice a partir da abscissa do mesmo.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e o aplicativo "QUADRÁTICO5"

Procedimento:

Para cada função quadrática a seguir, determine:

- os coeficientes;
- a abscissa do vértice;
- a imagem da abscissa do vértice;
- com o auxílio do aplicativo "QUADRÁTICO5", o valor da ordenada do vértice.

Função Quadrática	Coeficientes			Abscissa do vértice x_v	$f(x_v)$	Valor da ordenada do vértice.
	a	b	c			
$f(x) = x^2 - 6x + 5$						
$f(x) = - x^2 - 4x - 3$						
$f(x) = x^2 + 2x + 1$						
$f(x) = - x^2 + 2x - 1$						
$f(x) = 2x^2 - 4x$						
$f(x) = - x^2 + 4x$						
$f(x) = 2x^2 + 1$						
$f(x) = - 3x^2 - 1$						
$f(x) = x^2$						
$f(x) = - x^2$						

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) O valor obtido para $\mathbf{f(x_v)}$, para cada função quadrática, é igual ou diferente do valor da ordenada do vértice?

2) Podemos afirmar que a ordenada do vértice $\mathbf{(y_v)}$ de uma parábola, corresponde a imagem da abscissa $\mathbf{(x_v)}$ da mesma, isto é, $f(x_v) = y_v = ax_v^2 + bx_v + c$?

3) Descreva com suas palavras, como podemos determinar a ordenada do vértice de uma parábola sem fazer o uso da relação $-\frac{\Delta}{4a}$.

Conclusão do Grupo

Formalização do Professor

Intervenção avaliativa

12) A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura *h*, em metros, *t* segundos após o chute, seja dada por $\boldsymbol{h = -t^2 + 6t}$. Responda:

a) O vértice da parábola, nessa situação, é o ponto mais alto ou ponto mais baixo do gráfico? Justifique sua resposta.

b) Quais são as coordenadas do vértice da parábola que representa essa função?

c) Em que instante a bola atinge a altura máxima?

d) Qual é a altura máxima atingida pela bola?

2.3.2 Material para o professor

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (1)

Título: A expressão algébrica

Objetivo: Introduzir o conceito de função quadrática a partir da relação existente entre a geometria e a álgebra.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos circunscritos ao objeto matemático pretendido, denominados de pré-requisitos necessários: operações com polinômios (adição, subtração e multiplicação), cálculo de áreas de figuras planas (quadrados e retângulos), grau de um polinômio, definição de monômio, binômio e trinômio, além do conceito de função matemática. Além disso, ressalto que, embora tenha sido pensado e organizado inicialmente para essa atividade, quatro intervenções avaliativas, sugiro verificar a real necessidade desse número, no decorrer do processo de aplicação.

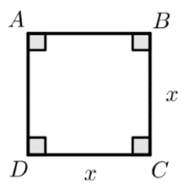
Material: roteiro da atividade, papel, lápis ou caneta.

Procedimentos:

(I$_i$ – CP) Tendo em vista que a medida da área de um quadrado ou de um retângulo é determinada pela multiplicação de suas dimensões (largura x comprimento), determine a área y de cada figura plana a seguir, conforme cada situação.

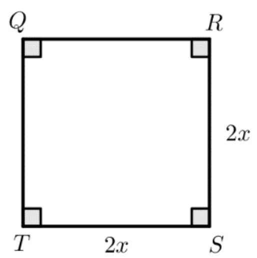
Situação (I)

a) ***[I$_e$]***



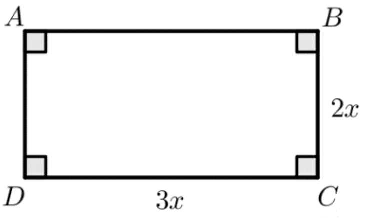
Área da figura *ABCD*: $y = x^2$

b) ***[I$_e$]***



Área da figura *QRST*: $y = 4x^2$

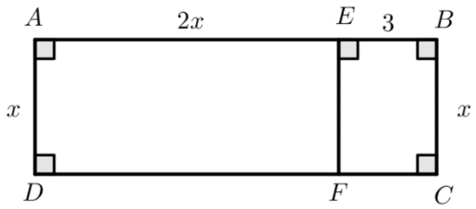
c) ***[I_e]***



Área da figura *ABCD*: y = $6x^2$

Situação (II)

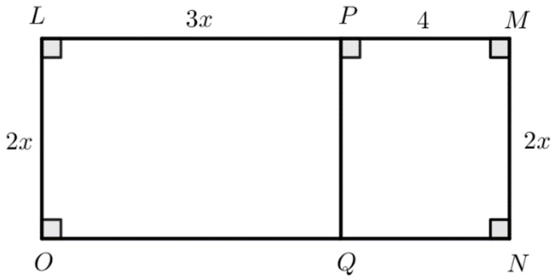
a) ***[I_e]***



Área da figura *ABCD*:

y = $2x^2 + 3x$

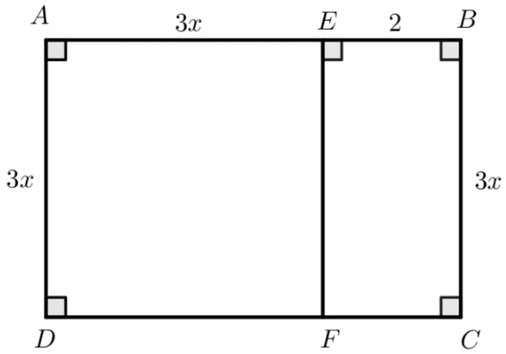
b) ***[I_e]***



Área da figura *LMNO:*

y = $6x^2 + 8x$

c) ***[I_e]***

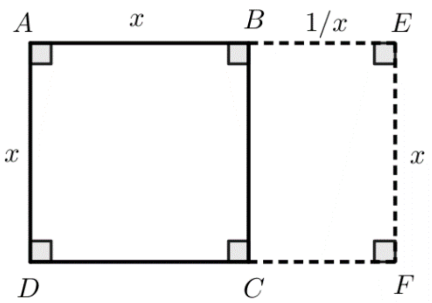


Área da figura *ABCD:*

y = $9x^2 + 6x$

Situação (III)

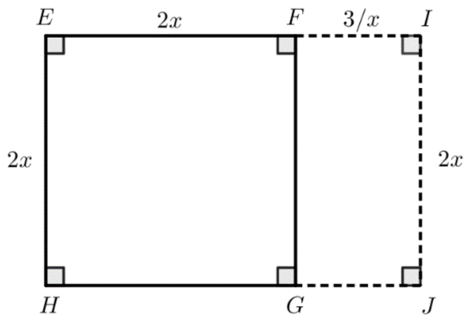
a) ***[I_e]***



Área da figura *AEFD*:

y = $x^2 + 1$

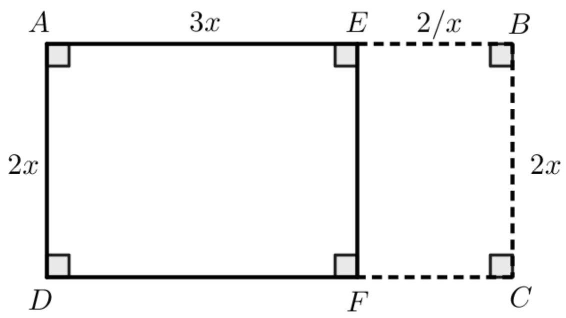
b) $[I_e]$



Área da figura *EIJH*:

y = $4x^2 + 6$

c) $[I_e]$

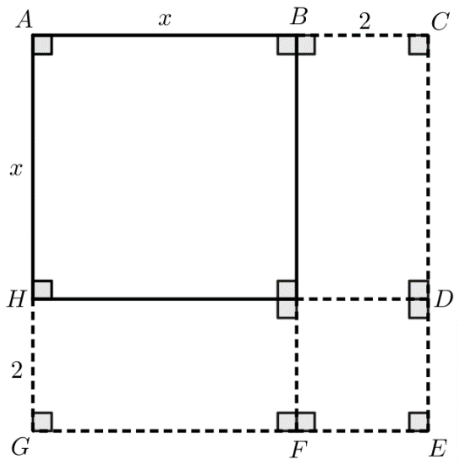


Área da figura *ABCD:*

y = $6x^2 + 4$

Situação (IV)

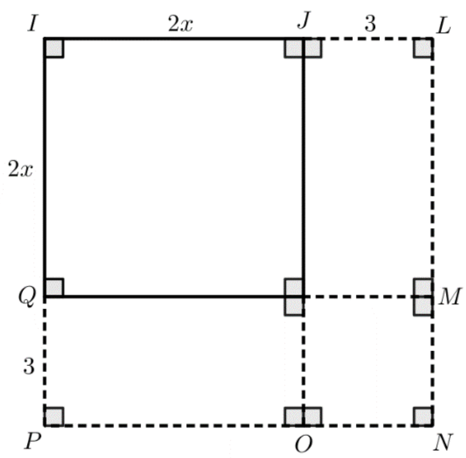
a) $[I_e]$



Área da figura *ACEG*:

y = $x^2 + 4x + 4$

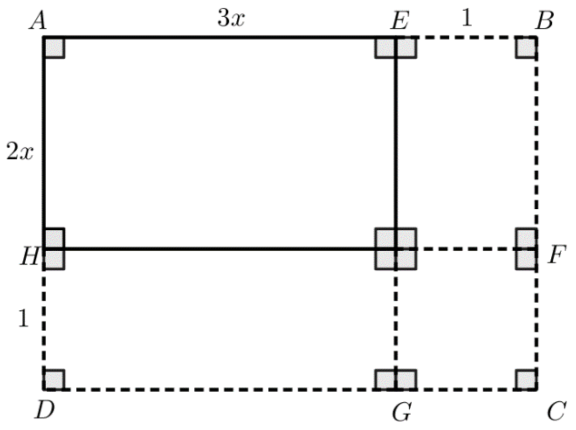
b) $[I_e]$



Área da figura *ILNP:*

y = $4x^2 + 12x + 9$

c) ***[Ie]***



Área da figura *ABCD:*

y = $6x^2 + 5x + 1$

[Ie] De acordo com as expressões obtidas para a área y em cada situação anterior, preencha a tabela seguinte:

SITUAÇÕES	EXPRESSÕES OBTIDAS PARA A ÁREA		
(I)	a) y = x^2	b) y = $4x^2$	c) y = $6x^2$
(II)	a) y = $2x^2 + 3x$	b) y = $6x^2 + 8x$	c) y = $9x^2 + 6x$
(III)	a) y = $x^2 + 1$	b) y = $4x^2 + 6$	c) y = $6x^2 + 4$
(IV)	a) y = $x^2 + 4x + 4$	b) y = $4x^2 + 12x + 9$	c) y = $6x^2 + 5x + 1$

Agora, faça o que se pede:

1) ***[Ir]*** As expressões obtidas são exemplos de igualdades ou desigualdades?

Igualdades

2) ***[Ir]*** Considerando apenas o segundo membro das expressões obtidas para a área de cada figura plana nas situações **(I), (II), (III) e (IV)**, respectivamente, as mesmas são exemplos de monômios, binômios ou trinômios?

(I) Monômios; (II) e (III) binômios e (IV) trinômios

3) ***[Ir]*** Considerando apenas o segundo membro das expressões obtidas para a área de cada figura plana nas situações **(I), (II), (III) e (IV)**, qual é o grau de cada uma delas?

2º grau

4) ***[Ir]*** De acordo com as reflexões feitas anteriormente, quais as características em comuns apresentadas pelas expressões obtidas nas situações **(I), (II), (III)** e **(IV)**?

Todas são igualdades de grau 2.

5) ***[Ie]*** Escreva para cada situação **(I), (II), (III)** e **(IV)**, uma expressão matemática que possibilite generalizar cada uma delas, de acordo com o padrão observado.

[I_f] Observe que todas as expressões algébricas obtidas anteriormente são do tipo:

(I) $\mathbf{y = ax^2}$**,** com $a \neq 0$, $b = 0$ e $c = 0$;

(II) $\mathbf{y = ax^2 + bx}$**,** com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$;

(III) $\mathbf{y = ax^2 + c}$**,** com $a \neq 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$;

(IV) $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$**,** $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Portanto, levando em consideração apenas a segunda parte das igualdades, as expressões algébricas obtidas são monômios (Situação I), binômios (Situações II e III) e trinômios (Situação IV) de grau 2.

Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deve formalizar o conceito de função quadrática.

[I_f] As expressões resultantes da Atividade 1, definidas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, são exemplos de **função quadrática**, onde o *y* é a ***variável dependente*** da ***variável independente*** *x*. Neste caso diz-se que *y* está em função de *x*, ou seja, o valor de *y* depende do valor de *x* e que as expressões algébricas podem assim ser escritas na sua forma geral: $\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde *a*, *b* e *c* são números reais, com $a \neq 0$, chamados de coeficientes da função quadrática. Nos casos em que a expressão representa um polinômio do 2º grau, a função será denominada de função polinomial do 2º grau.

Intervenções avaliativas

6) ***[IA_r]*** Quais das seguintes funções são quadráticas?

(x) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$	( ) $f(x) = 2x + 1$
(x) $f(x) = -2x^2$	(x) $f(x) = 2x(x - 1)$
( ) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	( ) $f(x) = 2^x$

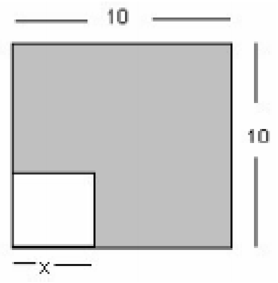
7) ***[IA_a]*** (DANTE, 2014) De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, seus quatro cantos, quadrados de lado x. Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x. $600 - 4x^2$

8) ***[IA_a]*** (SANTOS, 2013) Uma mesa retangular de ping-pong possui um perímetro de aproximadamente 8 metros. Sabendo que a área da mesa é função do comprimento

de um dos lados. Qual a expressão algébrica que representa a área da mesa de ping-pong? $4x - x^2$

9) ***[IAₐ]*** (BACKS, 2008) Um quadrado de cartolina tem lados medindo 10 cm. Em um dos cantos foi cortado um pedaço quadrado cujos tamanhos dos lados medem x. Determine a expressão que representa a área da figura pintada de cinza.

$100 - x^2$



Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (2)

Título: O gráfico da função quadrática

Objetivo: descobrir a representação geométrica para a função quadrática.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos circunscritos ao objeto matemático, denominados de pré-requisitos necessários: Valor numérico de uma expressão algébrica, par ordenado, plano cartesiano, domínio e imagem de uma função matemática.

Material: Roteiro da atividade, papel, lápis e "Quadro de Curvas".

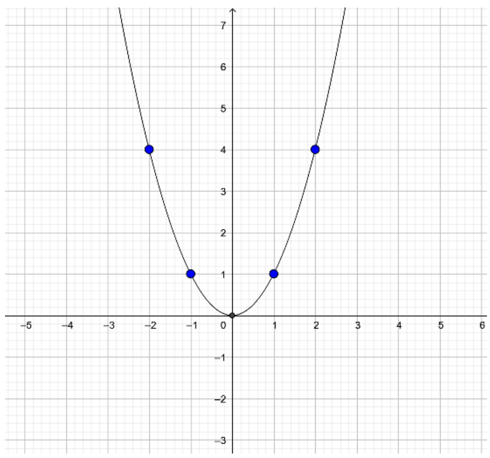
Procedimento:

(I$_i$ – CP) Para cada função a seguir, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, pede-se:

- ***[I$_e$]*** determine o valor da imagem de cada valor de x dado na tabela;
- ***[I$_e$]*** determine o par ordenado (x, f(x));
- ***[I$_e$]*** marque os pares ordenados no plano cartesiano;
- ***[I$_e$]*** ligue os pontos marcados por uma única curva.

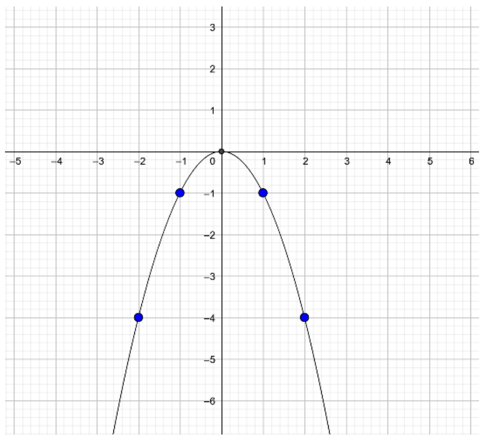
a)

x	f(x) = x^2	(x, f(x))
- 2	4	(-2, 4)
- 1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)



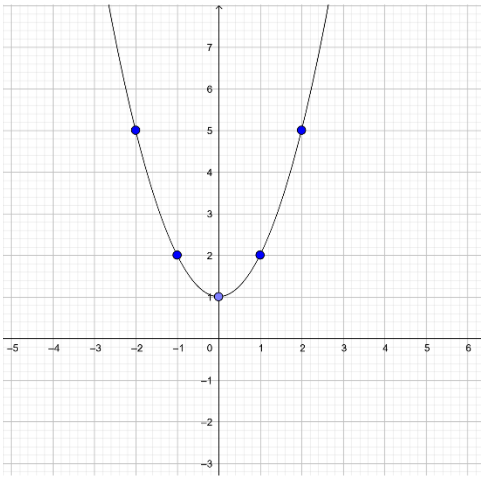
b)

x	f(x) = - x^2	(x, f(x))
- 2	- 4	(-2, -4)
- 1	- 1	(-1, -1)
0	0	(0, 0)
1	- 1	(1, -1)
2	- 4	(2, -4)



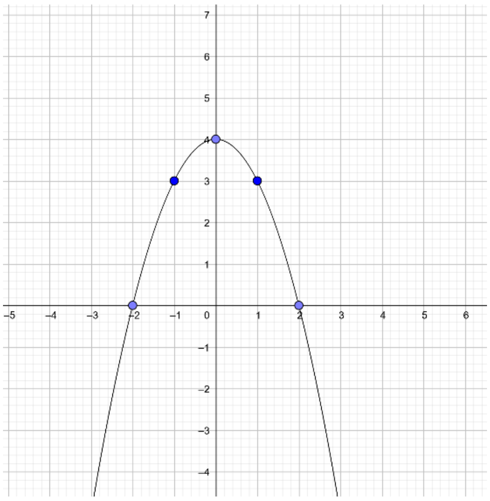
c)

x	f(x) = x^2 + 1	(x, f(x))
- 2	5	(-2, 5)
- 1	2	(-1, 2)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	5	(2, 5)



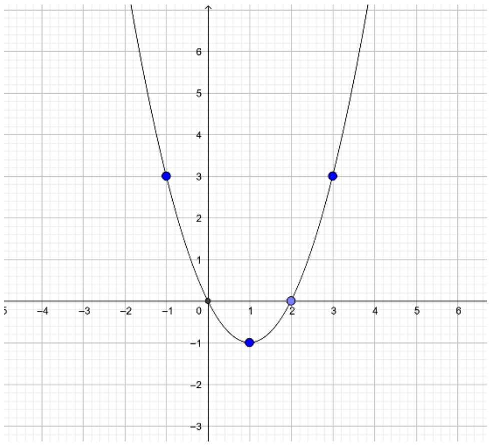
d)

x	f(x) = - x^2 + 4	(x, f(x))
- 2	0	(-2, 0)
- 1	3	(-1, 3)
0	4	(0, 4)
1	3	(1, 3)
2	0	(2, 0)



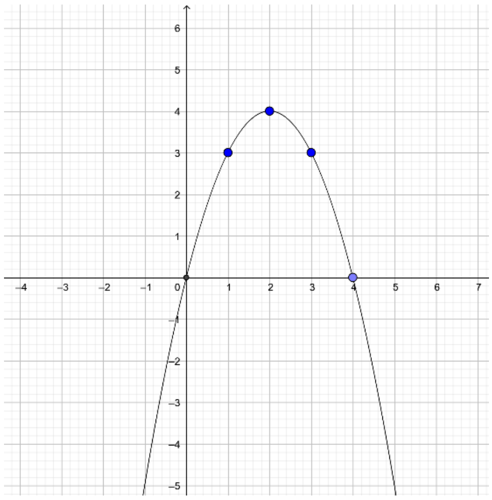
e)

x	f(x) = x^2 – 2x	(x, f(x))
- 1	3	(-1, 3)
0	0	(0, 0)
1	-1	(1, -1)
2	0	(2, 0)
3	3	(3, 3)



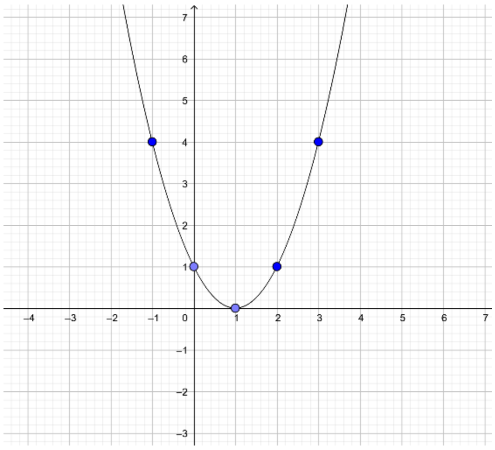
f)

x	f(x) = - x^2 + 4x	(x, f(x))
0	0	(0, 0)
1	3	(1, 3)
2	4	(2, 4)
3	3	(3, 3)
4	0	(4, 0)



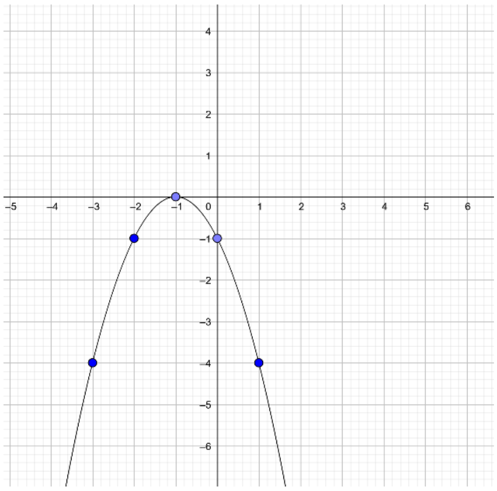
g)

x	f(x) = x^2 - 2x +1	(x, f(x))
-1	4	(-1, 4)
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)
2	1	(2, 1)
3	4	(3, 4)



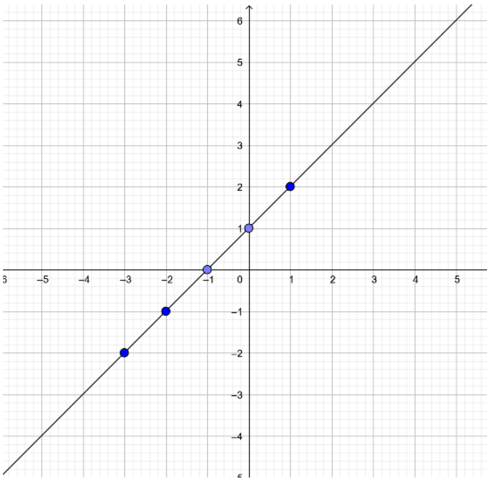
h)

x	f(x) = - x^2 - 2x – 1	(x, f(x))
-3	-4	(-3, -4)
-2	-1	(-2, -1)
-1	0	(-1, 0)
0	-1	(0, -1)
1	-4	(1, -4)



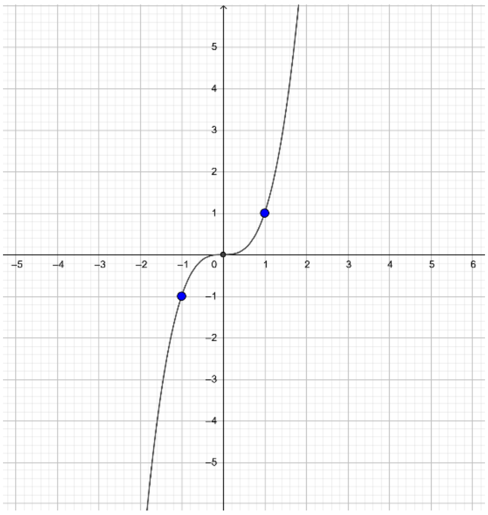
i)

x	f(x) = x + 1	(x, f(x))
-3	-2	(-3, -2)
-2	-1	(-2, -1)
-1	0	(-1, 0)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)



j)

x	f(x) = x^3	(x, f(x))
-2	-8	(-2, -8)
-1	-1	(-1, -1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	8	(2, 8)



Agora, faça o que se pede:

1) ***[I$_r$]*** Todas as funções anteriores são quadráticas? Não.

2) ***[I$_r$]*** De acordo com o Quadro de Curvas fornecido, qual(is) o(s) nome(s) das curvas traçadas em cada item anterior? Da a) até h) Parábola côncava; i) Reta; j) parábola cúbica

3) ***[I$_r$]*** De acordo com as reflexões anteriores, como se denomina a curva que representa uma função quadrática? Parábola côncava para cima ou para baixo

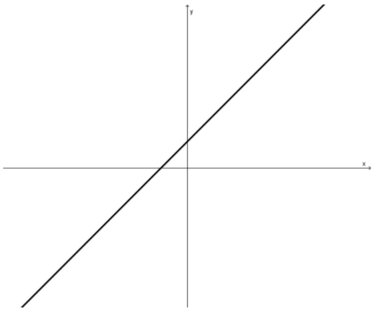
Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deve formalizar a ideia da representação geométrica da função quadrática.

[I$_f$] As representações geométricas construídas na Atividade 2, exceto as duas últimas, são exemplos da representação geométrica da função quadrática ($f(x) = ax^2 + bx + c, com\ x, a, b, c\ \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0$), cuja representação no plano cartesiano é uma curva aberta chamada **parábola.**

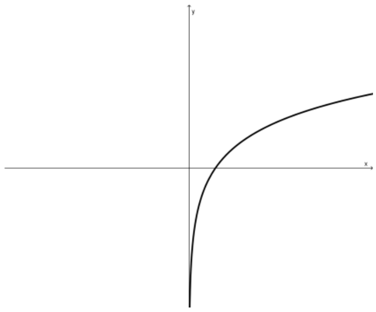
Intervenções avaliativas

4) ***[IA$_r$]*** Quais das representações geométricas a seguir, melhor representa a função quadrática ***f(x) = ax^2 + bx + c,*** definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$? (d)

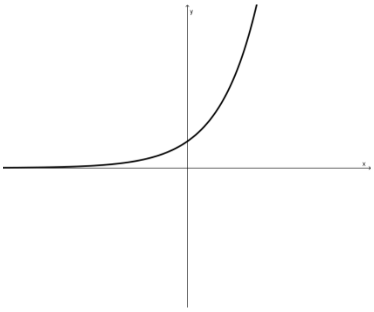
(A)



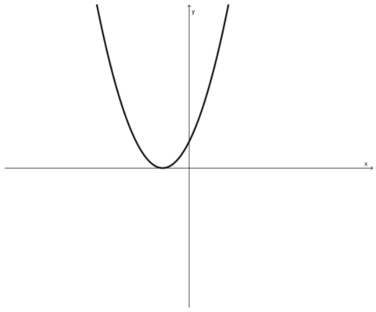
(B)



(C)



(D)



5) ***[IA$_r$]*** A curva que representa geometricamente o gráfico da função quadrática, recebe o nome de Letra (C)

(A) hipérbole.

(B) elipse.

(C) parábola.

(D) reta.

(E) circunferência.

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (3)

Título: A concavidade da parábola

Objetivo: Descobrir uma relação indireta entre os coeficientes da função quadrática e a concavidade da parábola.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: identificação dos coeficientes numéricos “a”, “b” e “c” de uma função quadrática e plano cartesiano.

Material: Roteiro da atividade, papel, lápis e aplicativo “QUADRÁTICO1”.

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada função quadrática a seguir:

- ***[I_e]*** determine o valor de cada coeficiente;
- ***[I_e]*** digite os coeficientes encontrados na tabela seguinte no aplicativo “QUADRÁTICO1”;
- ***[I_e]*** observe a concavidade (abertura) da parábola gerada no aplicativo e anote na tabela seguinte se a mesma está voltada **para cima** ou **para baixo**.

Função quadrática	Coeficiente “a”	Coeficiente “b”	Coeficiente “c”	Concavidade da parábola
f(x) = x^2	1	0	0	Para cima
f(x) = - x^2	-1	0	0	Para baixo
f(x) = $3x^2$ + x	3	1	0	Para cima
f(x) = - $3x^2$ + x	-3	1	0	Para baixo
f(x) = $4x^2$ + 2	4	0	2	Para cima
f(x) = - $4x^2$ + 2	-4	0	2	Para baixo
f(x) = $2x^2$ – 3x – 4	2	-3	-4	Para cima
f(x) = - $2x^2$ + 3x + 4	-2	3	4	Para baixo
f(x) = x^2 + 3x – 5	1	3	-5	Para cima
f(x) = - x^2 – 3x + 5	-1	-3	5	Para baixo

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) ***[I_r]*** De acordo com os dados obtidos, após o preenchimento da tabela anterior com o auxílio do aplicativo, qual dos coeficientes “a”, “b” ou “c” é responsável em alterar a concavidade da parábola? Coeficiente “a”

2) ***[I_e]*** Complete corretamente os espaços seguintes, de acordo com as reflexões feitas anteriormente.

O coeficiente ____a_____ de uma função quadrática, é o responsável pela mudança da concavidade da parábola. Quando o coeficiente ____a_____ for maior do que zero, ou seja, um valor positivo, a concavidade da parábola estará voltada para ____cima____, enquanto que se o coeficiente _____a_____ for um valor menor do que zero, ou seja, negativo, a concavidade da parábola estará voltada para ____baixo_____.

Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deve formalizar qual dos coeficientes da função quadrática é o responsável pela mudança de sentido da concavidade da parábola.

[I_f] O coeficiente *"a"* da função quadrática é responsável pela mudança de sentido da concavidade da parábola. Se ***a* > 0**, então a parábola tem a concavidade voltada para cima. Se ***a* < *0***, então a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Intervenções avaliativas

3) ***[IA_r]*** Para cada função quadrática a seguir, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, determine os seus coeficientes e diga se o gráfico tem a concavidade voltada para cima ou para baixo.

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

a=2; b=-5; c=3; para cima

b) $f(x) = - 3x^2 + 2x - 1$

a=-3; b=2; c=-1; para baixo

c) $f(x) = x^2 + 3x$

a=1; b=3; c=0; para cima

d) $f(x) = - x^2 + 6$

a=-1; b=0; c=6; para baixo

4) ***[IA_r]*** Se o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0,$ tem a concavidade voltada para baixo, significa dizer, necessariamente, que (Letra C)

(A) o coeficiente *a > 0.*

(B) o coeficiente *b < 0.*

(C) o coeficiente *a < 0*.

(D) o coeficiente *b > 0.*

(E) o coeficiente c = 0.

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (4)

Título: O termo independente

Objetivo: Relacionar o termo independente da função quadrática com o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: identificação do coeficiente numérico “c” de uma função quadrática, ponto de intersecção, par ordenado e plano cartesiano. Além disso, ressalto que, embora tenha sido pensado e organizado inicialmente para essa atividade, quatro intervenções avaliativas, sugiro verificar a real necessidade desse número, no decorrer do processo de aplicação.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e aplicativo “QUADRÁTICO2”.

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada função quadrática seguinte, determine:

- ***[I_e]*** o termo independente “c”;
- ***[I_e]*** com o auxílio do aplicativo “QUADRÁTICO2”, as coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y;
- ***[I_e]*** o valor da ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y.

Função Quadrática	**Termo independente c**	**Coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y**	**Valor da ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y**
$f(x) = x^2 – 6x + 5$	**5**	**(0, 5)**	**5**
$f(x) = - x^2 - 4x – 3$	**-3**	**(0, -3)**	**-3**
$f(x) = x^2 + 2x + 1$	1	(0, 1)	1
$f(x) = - x^2 + 2x - 1$	-1	(0, -1)	-1
$f(x) = 2x^2 – 4x$	0	(0, 0)	0
$f(x) = - x^2 + 4x$	0	(0, 0)	0
$f(x) = 2x^2 + 1$	1	(0, 1)	1
$f(x) = - 3x^2 – 1$	-1	(0, -1)	-1
$f(x) = x^2$	0	(0, 0)	0
$f(x) = - x^2$	0	(0, 0)	0

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) ***[I_r]*** O termo independente **c** obtido em cada caso, é igual ou diferente ao valor da ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo **y**? Igual

2) ***[I$_r$]*** Podemos afirmar de forma intuitiva, que o termo independente de uma função quadrática corresponde a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo **y**? Sim

3) ***[I$_e$]*** Complete corretamente os espaços seguintes, de acordo com as reflexões feitas anteriormente.

Para toda função quadrática *f(x)* = *ax²* + *bx* + *c*, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$, temos que a __ordenada__ do ponto de intersecção da parábola com o eixo y, corresponde ao termo independente __c__ da referida função.

Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deverá formalizar o significado do ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

[I$_f$] Para toda função quadrática *f(x)* = *ax²* + *bx* + *c*, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$, temos que a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y, corresponde ao termo independente "*c*" da referida função.

Intervenções avaliativas

4) ***[IA$_r$]*** Para cada função quadrática a seguir, determine o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ (0, 3)

b) $f(x) = - x^2 + x - 2$ (0, -2)

c) $f(x) = 2x^2 - 3x$ (0, 0)

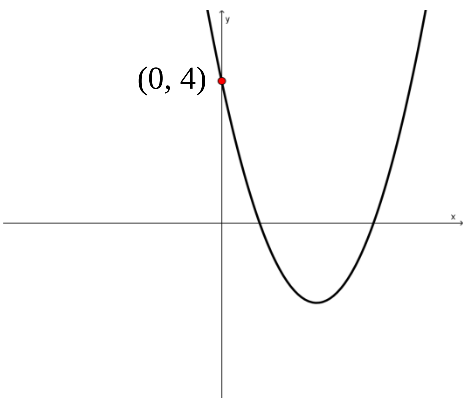
d) $f(x) = - x^2 - 9$ (0, -9)

e) $f(x) = x^2$ (0, 0)

f) $f(x) = - 3x^2$ (0, 0)

5) ***[IA$_r$]*** Certa parábola passa pelos pontos (2, 0), (4,0) e (0, 3). Qual é o valor da ordenada do ponto de intersecção dessa parábola com o eixo y? 3

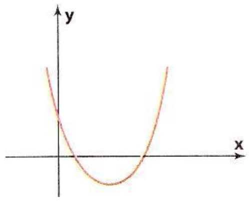
6) ***[IA$_r$]*** A parábola seguinte representa a função *f(x)* = *ax²* + *bx* + *c*, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b, c\ e\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$.



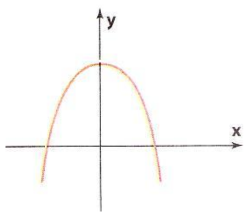
De acordo com o gráfico, qual é o valor do termo independente "c" da função? 4

7) ***[IA$_r$]*** Seja $f(x) = x^2 - 4x + 3$ uma função quadrática definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$. Qual dos gráficos melhor representa *f(x)*? (Letra A)

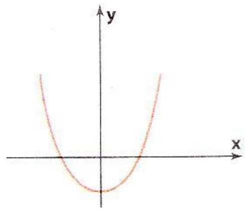
(A)



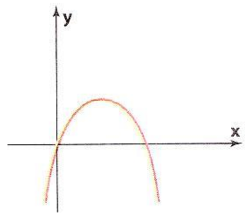
(B)



(C)



(D)



Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (5)

Título: Os zeros da função quadrática (Parte 1)

Objetivo: Compreender o significado algébrico dos zeros de uma função quadrática, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$.

Orientações ao professor: Para a realização desta atividade, os estudantes devem ter o domínio do seguinte conteúdo matemático, denominado de pré-requisito necessário: resolução de uma equação do 2º grau. Além disso, ressalto que, embora tenha sido pensado e organizado inicialmente para essa atividade, três intervenções avaliativas, sugiro verificar a real necessidade desse número, no decorrer do processo de aplicação.

Material: Roteiro da atividade, lápis e papel.

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada questão a seguir, determine o que se pede.

1) ***[I_r]*** Quais os valores de ***x*** do domínio das funções quadráticas a seguir, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, que tornam a imagem ***f(x)*** igual a zero?

a) $f(x) = x^2 – 4x + 3$ {1, 3}

b) $f(x) = - x^2 – 3x - 2$ {-1, -2}

c) $f(x) = 2x^2 – 4x + 2$ {1, 1}

d) $f(x) = x^2 + 2x + 5$ Não existe

2) ***[I_e]*** Complete corretamente os espaços seguintes, de acordo com as reflexões feitas anteriormente.

Os valores de __x___ do domínio da função quadrática, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, que tornam a imagem _f(x)_ igual ao zero, são chamados de __zeros__ da função quadrática.

A seguir o professor deve formalizar o que significam os zeros de uma função quadrática, como segue:

[I_f] Os valores de ***x*** do domínio da função quadrática, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, que tornam a imagem ***f(x)*** igual ao zero, são chamados de zeros da função quadrática.

Intervenções avaliativas

3) ***[IA_r]*** Determine, se existirem, os zeros das seguintes funções quadráticas, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2 – 2x – 3$ {3, -1}

c) $f(x) = x^2 + 6x + 9$ {-3, -3}

b) $f(x) = x^2 – 9$ {3, -3}

d) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ Não existe

4) ***[IAa]*** (DANTE, 2014) Sendo $r = f(0)$ para a função $f(x) = - 3x + 2$ e $s = g(0)$ para a função $g(x) = 4x^2 – 4x + 1$, determine o valor de $r + s$. 3

5) ***[IAa]*** (UFPB/PSS – adaptado) A função $L(x) = - 100x^2 + 1200x – 2700$ representa o lucro de uma empresa, em milhões de reais, onde x é a quantidade de unidades vendidas. Quantas unidades desse produto a empresa deve vender para não ter lucro nem prejuízo? 3 ou 9

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (6)

Título: Os zeros da função quadrática (Parte 2)

Objetivo: Compreender o significado geométrico dos pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: resolução de uma equação do 2º grau, zeros de uma função, par ordenado e plano cartesiano.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e os aplicativos “QUADRÁTICO3” e “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”.

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada função quadrática, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$ a seguir, determine:

- ***[I_e]*** os coeficientes “a”, “b” e “c”;
- ***[I_e]*** os zeros da função com o auxílio da calculadora “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”;
- ***[I_e]*** digite os valores dos coeficientes no espaço destinado no aplicativo “QUADRÁTICO3”;
- ***[I_e]*** observe o gráfico e anote os valores correspondentes às abscissas dos pontos de intersecção com o eixo das abscissas.

Função Quadrática	Coeficientes			Zeros	Abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo x
	a	b	c		
f(x) = $x^2 - 5x + 6$	1	-5	6	2 e 3	2 e 3
f(x) = $- x^2 + 2x + 3$	-1	2	3	-1 e 3	-1 e 3
f(x) = $2x^2 - 4x$	2	-4	0	0 e 2	0 e 2
f(x) = $- 3x^2 - 9x$	-3	-9	0	0 e -3	0 e -3
f(x) = $x^2 - 4$	1	0	-4	-2 e 2	-2 e 2
f(x) = $- x^2 + 1$	-1	0	1	-1 e 1	-1 e 1
f(x) = x^2	1	0	0	0 e 0	0
f(x) = $- x^2$	-1	0	0	0 e 0	0
f(x) = $- x^2 - 1$	-1	0	-1	Não existe	Não existe
f(x) = $x^2 + 2x + 3$	1	2	3	Não existe	Não existe

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) ***[I_r]*** Os valores, caso existam, dos “zeros” de cada função anterior, são iguais ou diferentes aos valores das abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo x? Iguais

2) ***[I_r]*** Quando a função quadrática não admite “zeros” reais, a parábola intersecta o eixo x? Não

3) ***[I_e]*** Complete corretamente os espaços seguintes, de acordo com as reflexões feitas anteriormente.

As abscissas correspondentes aos pontos de intersecção da parábola com o eixo ___x____ correspondem aos __zeros___ da função quadrática.

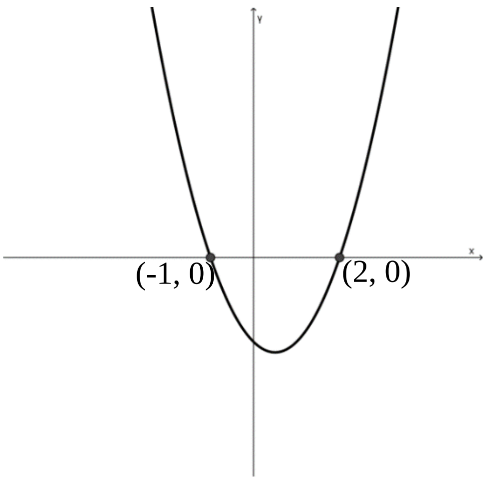
Após as reflexões feitas pelos grupos, o professor deve formalizar o significado dos pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas.

[I_f] As abscissas correspondentes aos pontos de intersecção da parábola com o eixo *x* correspondem aos **zeros** da função quadrática.

Intervenções avaliativas

4) ***[IA_r]*** Os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com o eixo das abscissas são (1, 0) e (3, 0). Quais são os zeros dessa função? 1 e 3

5) ***[IA_r]*** O gráfico seguinte é de uma função quadrática. Quais são os zeros dessa função? -1 e 2



6) ***[IA_r]*** Seja f uma função quadrática definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Sabemos que sua representação geométrica não intersecta o eixo das abscissas. Assim, é correto afirmar que a função f (Letra C)

(A) admite dois "zeros" reais e diferentes.

(B) admite dois "zeros" reais e iguais.

(C) não admite "zeros" reais.

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (7)

Título: Os zeros da função quadrática (Parte 3)

Objetivo: Relacionar a quantidade de zeros da função quadrática, a partir da análise de sua representação geométrica, com o discriminante.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: saber calcular o discriminante *delta* de uma equação do 2º grau, ponto de intersecção, par ordenado e plano cartesiano. Além disso, ressalto que, embora tenha sido pensado e organizado inicialmente para essa atividade, quatro intervenções avaliativas, sugiro verificar a real necessidade desse número, no decorrer do processo de aplicação.

Material: Roteiro da atividade, papel, lápis e aplicativo “QUADRÁTICO4”.

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada função quadrática seguinte:

- ***[I_e]*** determine os coeficientes “a”, “b” e “c”;
- ***[I_e]*** digite os coeficientes no espaço destinado, respectivamente, no aplicativo “QUADRÁTICO4”;
- ***[I_e]*** determine a quantidade de pontos de intersecção do gráfico com o eixo x;
- ***[I_e]*** determine o discriminante com o auxílio da calculadora “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”.

Função quadrática	a	b	c	Intersecção da parábola com o eixo das abscissas			Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$	O *delta* é...		
				Nenhuma	Uma	Duas		Δ>0	Δ<0	Δ=0
$f(x) = x^2 - 4x + 3$	1	-4	3			x	4	x		
$f(x) = - x^2 - 3x - 2$	-1	-3	-2			x	1	x		
$f(x) = 2x^2 - 4x + 2$	2	-4	2		x		0			x
$f(x) = -2x^2 + 4x - 4$	-2	4	-4	x			-16		x	
$f(x) = 3x^2 - 9x$	3	-9	0			x	81	x		
$f(x) = - x^2 + 4x$	-1	4	0			x	16	x		
$f(x) = x^2 - 9$	1	0	-9			x	36	x		
$f(x) = 2x^2 + 4$	2	0	4	x			-32		x	
$f(x) = 4x^2$	4	0	0		x		0			x
$f(x) = - 3x^2$	-3	0	0		x		0			x

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) ***[I_r]*** Nos casos em que obteve-se Δ>0, qual foi o número de intersecção da parábola com o eixo das abscissas obtido?

( ) Nenhuma. ( ) Uma. (x) Duas.

2) ***[Ir]*** Nos casos em que obteve-se Δ<0, qual foi o número de intersecção da parábola com o eixo das abscissas obtido?

(x) Nenhuma. ( ) Uma. ( ) Duas.

3) ***[Ir]*** Nos casos em que obteve-se Δ=0, qual foi o número de intersecção da parábola com o eixo das abscissas obtido?

( ) Nenhuma. (x) Uma. ( ) Duas.

4) ***[Ir]*** Vimos, na Atividade 5, que a quantidade de intersecção da parábola com o eixo das abscissas corresponde à quantidade de "zeros" de uma função quadrática, isto é, se a parábola intersectar uma vez o eixo das abscissas, a função quadrática admitirá um "zero", se intersectar duas vezes admitirá dois "zeros" e, se não intersectar, a função quadrática não admitirá "zeros" reais. Neste sentido, que relação podemos estabelecer entre a quantidade de "zeros" de uma função quadrática, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, e o discriminante Δ (delta) desta mesma função?

Δ<0 – a função não possui zeros; Δ=0 – a função possui um zero; Δ>0 – a função possui dois zeros

Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deve formalizar a ideia que relaciona o discriminante com a quantidade de zeros de uma função quadrática definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$.

[If] Para toda função quadrática *f(x)* = $ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$, temos que:

Se Δ > 0, então a função possui dois "zeros" e a parábola intersecta o eixo x em dois pontos distintos.

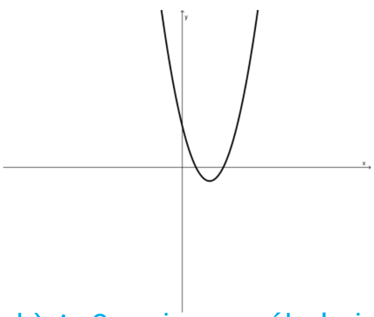
Se Δ= 0, então a função possui apenas um "zero" e a parábola intersecta o eixo x em um único ponto.

Se Δ < 0, então a função não possui "zeros" reais e a parábola não intersecta o eixo x.

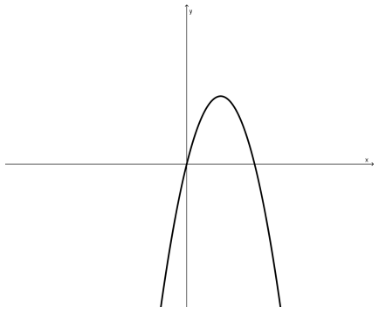
Intervenções avaliativas

5) ***[IAr]*** Os gráficos seguintes representam geometricamente a função *f(x)* = $ax^2 + bx + c$ definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$. Para cada uma das representações diga se o Δ > 0, Se Δ= 0 ou Se Δ < 0. Justifique sua resposta.

a)

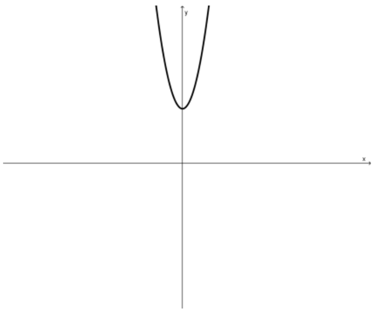


b)

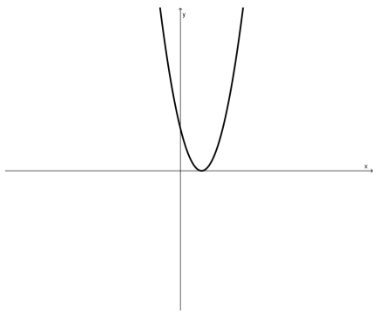


a) e b) Δ>0, pois a parábola intersecta o eixo x em dois pontos distintos.

c)

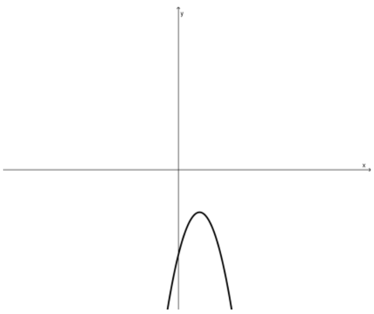


d)

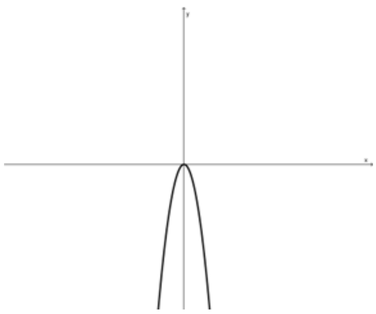


c) e e) Δ<0, pois a parábola não intersecta o eixo x.

e)



f)



d) e f) Δ=0, pois a parábola intersecta o eixo x em um ponto.

6) ***[IA$_r$]*** (DANTE, 2014) Para que valores reais de m a função $f(x) = (m - 1)x^2 - 4x - 1$ não admite zeros reais? $m < -3$

7) ***[IA$_r$]*** (DANTE, 2014) Para que valores reais de k a função $f(x) = kx^2 - 6x + 1$ admite zeros reais e diferentes? $k < 9$

8) ***[IA$_r$]*** Para que valores de n a função $f(x) = (n - 1)x^2 - 3x + 1$ admite zeros reais e iguais? $n = 13/4$

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (8)

Título: Um dos elementos da parábola

Objetivo: Compreender o que significa o ponto mais alto ou mais baixo de uma parábola.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: identificação dos coeficientes numéricos "a", "b" e "c" de uma função quadrática, par ordenado e plano cartesiano.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e o aplicativo "QUADRÁTICO5".

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada função quadrática, definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a seguir:

- ***[I_e]*** determine os valores dos coeficientes;
- ***[I_e]*** digite esses valores nos espaços disponíveis, respectivamente, no aplicativo "QUADRÁTICO5";
- ***[I_e]*** preencha o restante da tabela seguinte de acordo com o gráfico gerado no aplicativo.

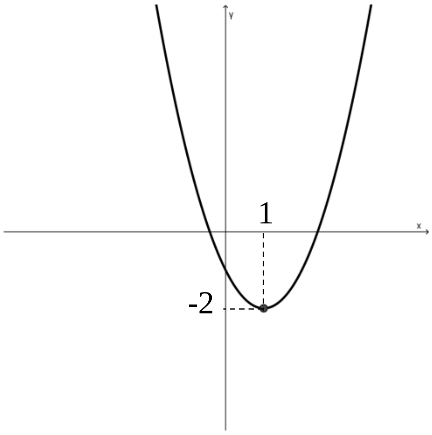
Função quadrática	Coeficientes			*[I_r]* A parábola apresenta um ponto mais alto ou mais baixo?	*[I_r]* Quais são as coordenadas desse ponto?
	a	b	c		
f(x) = x^2 – 6x + 5	1	-6	5	Mais baixo	(3, -4)
f(x) = - x^2 - 4x – 3	-1	-4	-3	Mais alto	(-2, 1)
f(x) = x^2 + 2x + 1	1	2	1	Mais baixo	(-1, 0)
f(x) = - x^2 + 2x - 1	-1	2	-1	Mais alto	(1, 0)
f(x) = 2x^2 – 4x	2	-4	0	Mais baixo	(1, -2)
f(x) = - x^2 + 4x	-1	4	0	Mais alto	(2, 4)
f(x) = 2x^2 + 1	2	0	1	Mais baixo	(0, 1)
f(x) = - 3x^2 – 1	-3	0	-1	Mais alto	(0, -1)
f(x) = x^2	1	0	0	Mais baixo	(0, 0)
f(x) = - x^2	-1	0	0	Mais alto	(0, 0)

[I_f] O ponto mais alto ou mais baixo de uma parábola é chamado de **vértice** da parábola. O vértice representa o ponto de **máximo** ou de **mínimo** da função quadrática.

Intervenções avaliativas

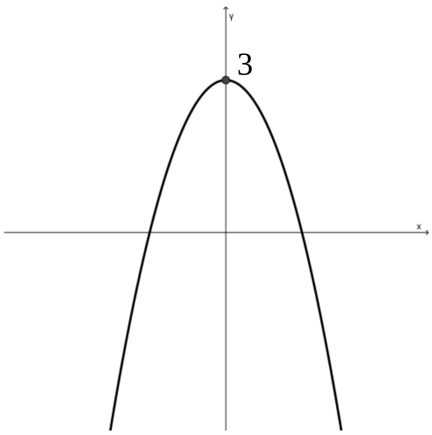
1) ***[IA_r]*** Para cada parábola a seguir diga se a mesma apresenta ponto de máximo ou de mínimo e as coordenadas do vértice.

a)



Ponto de mínimo V(1, -2)

b)



Ponto de máximo V(0, 3)

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (9)

Título: A abscissa do vértice (Parte 1)

Objetivo: Descobrir uma maneira de obter a abscissa do vértice de uma parábola.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: identificação dos coeficientes numéricos “a”, “b” e “c” de uma função quadrática, divisão com números reais, par ordenado e plano cartesiano. Além disso, ressalto que, embora tenha sido pensado e organizado inicialmente para essa atividade, duas intervenções avaliativas, sugiro verificar a real necessidade desse número, no decorrer do processo de aplicação.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e o aplicativo “QUADRÁTICO5”.

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada função quadrática definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$ a seguir:

- ***[I_e]*** determine os coeficientes “a”, “b” e “c”;
- ***[I_e]*** determine o valor da razão $-\frac{b}{2a}$;
- ***[I_e]*** digite os coeficientes no espaço destinados aos mesmos no aplicativo “QUADRÁTICO5”;
- ***[I_e]*** observe a parábola gerada pelo aplicativo e preencha o restante da tabela seguinte de acordo com o que está sendo pedido.

Função quadrática	**Coeficientes**			$-\frac{b}{2a}$	**Valor da abscissa do vértice.**
	a	**b**	**c**		
$f(x) = x^2 – 6x + 5$	1	-6	5	3	3
$f(x) = - x^2 - 4x – 3$	-1	-4	-3	-2	-2
$f(x) = x^2 + 2x + 1$	1	2	1	-1	-1
$f(x) = - x^2 + 2x - 1$	-1	2	-1	1	1
$f(x) = 2x^2 – 4x$	2	-4	0	1	1
$f(x) = - x^2 + 4x$	-1	4	0	2	2
$f(x) = 2x^2 + 1$	2	0	1	0	0
$f(x) = - 3x^2 – 1$	-3	0	-1	0	0
$f(x) = x^2$	1	0	0	0	0
$f(x) = - x^2$	-1	0	0	0	0

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) ***[I_r]*** Os valores obtidos para a razão $-\frac{b}{2a}$ e para a abscissa do vértice, para cada função quadrática, são iguais ou diferentes? São iguais

2) ***[Ir]*** Podemos afirmar, intuitivamente, que a razão $-\frac{b}{2a}$ permite determinar a abscissa do vértice de uma parábola, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$? Sim

Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deve formalizar uma das maneiras de determinar a abscissa do vértice de uma parábola conhecendo a sua representação algébrica.

[If] Para toda função quadrática *f(x)* = *ax*^{2} + *bx* + *c*, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ \mathbb{R}\ \ sendo\ a \neq 0$, temos que a abscissa do vértice da parábola que a representa geometricamente pode ser calculada pela expressão $-\frac{b}{2a}$, onde "*a*" e *"b"* são coeficientes da referida função.

Intervenções avaliativas

3) ***[IAr]*** Determine a abscissa do vértice de cada função quadrática seguinte, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2 – 4x + 1$ $x_v = 2$

b) $f(x) = - 2x^2 + 8x$ $x_v = 2$

c) $f(x) = x^2 – 2x + 4$ $x_v = 1$

d) $f(x) = - x^2 + 8$ $x_v = 0$

4) ***[IAr]*** Qual é o valor real de *k* na função *f(x)* = *x*^{2} – *kx* + *3*, sabendo que a abscissa do vértice da parábola que a representa é igual a 4? k = 8

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (10)

Título: A abscissa do vértice (Parte 2)

Objetivo: Relacionar os zeros da função quadrática com a abscissa do vértice da parábola.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: identificação dos coeficientes numéricos “a”, “b” e “c” de uma função quadrática, identificação dos zeros de uma função quadrática a partir de sua representação geométrica, cálculo da média aritmética simples, par ordenado e plano cartesiano. Além disso, ressalto que, embora tenha sido pensado e organizado inicialmente para essa atividade, duas intervenções avaliativas, sugiro verificar a real necessidade desse número, no decorrer do processo de aplicação.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e aplicativo “QUADRÁTICO6”

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada função quadrática definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$ a seguir, determine:

- ***[I_e]*** os coeficientes e, em seguida, digite-os nos espaços destinados aos mesmos no aplicativo “QUADRÁTICO6”;
- ***[I_e]*** os zeros da função com o auxílio do aplicativo “QUADRÁTICO6”;
- ***[I_e]*** a média aritmética simples dos zeros da função;
- ***[I_e]*** o valor da abscissa do vértice da parábola com auxílio do aplicativo “QUADRÁTICO6”.

Função quadrática	**Coeficientes**			**Zeros**		$\frac{x_1+x_2}{2}$	**Valor da abscissa do vértice.**
	a	**b**	**c**	**x_1**	**x_2**		
$f(x) = x^2 - 6x + 5$	1	-6	5	1	5	3	3
$f(x) = - x^2 - 4x - 3$	-1	-4	-3	-3	-1	-2	-2
$f(x) = x^2 + 2x + 1$	1	2	1	-1	-1	-1	-1
$f(x) = - x^2 + 2x - 1$	-1	2	-1	1	1	1	1
$f(x) = 2x^2 - 4x$	2	-4	0	0	2	1	1
$f(x) = - x^2 + 4x$	-1	4	0	0	4	2	2
$f(x) = x^2 - 1$	1	0	-1	-1	1	0	0
$f(x) = - x^2 + 4$	-1	0	4	-2	2	0	0
$f(x) = x^2$	1	0	0	0	0	0	0
$f(x) = - x^2$	-1	0	0	0	0	0	0

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) ***[I_r]*** O valor obtido para $\frac{x_1+x_2}{2}$ (média aritmética simples dos zeros da função quadrática), é igual ou diferente do valor da abscissa do vértice em cada caso? Igual

2) ***[I$_r$]*** Podemos afirmar portanto, de forma intuitiva, que o valor da abscissa do vértice de uma parábola é igual a média aritmética simples dos zeros da função quadrática que a representa? Sim

3) ***[I$_r$]*** Seja uma função f definida de $\mathbb{R}\, em\, \mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}\ sendo\ a \neq 0$, sempre será possível determinarmos a abscissa do vértice da parábola que a representa, por meio da média aritmética simples dos zeros da mesma? Justifique. Não, pois há casos em que a função não possui zeros.

Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deve formalizar a outra possibilidade para determinar a abscissa do vértice de uma parábola conhecendo os zeros da função quadrática correspondente à mesma.

[I$_f$] Para toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R}\, em\, \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}\ sendo\ a \neq 0\ e\ \Delta \geq 0$, temos que a abscissa do vértice da parábola que a representa geometricamente pode ser determinada pela média aritmética dos zeros da referida função.

Intervenções avaliativas

4) ***[IA$_r$]*** Sabendo-se que os zeros de uma função quadrática são 2 e 4, então quanto vale a abscissa do vértice da parábola que a representa? $x_v = 3$

5) ***[IA$_r$]*** Sabe-se que um dos zeros de uma função quadrática vale – 2 e que a abscissa do vértice da parábola que a representa é 1. Quanto vale o outro zero dessa mesma função admitindo que a mesma admita dois zeros reais e diferentes? 4

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (11)

Título: A ordenada do vértice (Parte 1)

Objetivo: Descobrir uma maneira de obter a ordenada do vértice de uma parábola.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: identificação dos coeficientes numéricos “a”, “b” e “c” de uma função quadrática, cálculo do discriminante *delta* de uma equação do 2º grau, divisão com números reais, par ordenado e plano cartesiano. Além disso, ressalto que, embora tenha sido pensado e organizado inicialmente para essa atividade, quatro intervenções avaliativas, sugiro verificar a real necessidade desse número, no decorrer do processo de aplicação.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e aplicativos “QUADRÁTICO5” e “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”.

Procedimento:

(I$_i$ – CP) Para cada função quadrática definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$ a seguir:

- ***[I$_e$]*** determine os coeficientes “a”, “b” e “c”;
- ***[I$_e$]*** determine o valor da razão $-\frac{\Delta}{4a}$, caso necessário, utilizar a calculadora “EQUAÇÃO DO 2º GRAU” para calcular o *delta*;
- ***[I$_e$]*** digite os coeficientes no espaço destinados aos mesmos no aplicativo “QUADRÁTICO5”;
- ***[I$_e$]*** observe a parábola gerada na tela do aplicativo e preencha o restante da tabela seguinte de acordo com o que está sendo pedido.

Função Quadrática	**Coeficientes**			$-\frac{\Delta}{4a}\ (\Delta = b^2 - 4ac)$	**Valor da ordenada do vértice.**
	a	**b**	**c**		
f(x) = $x^2 - 6x + 5$	1	-6	5	-4	-4
f(x) = $- x^2 - 4x - 3$	-1	-4	-3	1	1
f(x) = $x^2 + 2x + 1$	1	2	1	0	0
f(x) = $- x^2 + 2x - 1$	-1	2	-1	0	0
f(x) = $2x^2 - 4x$	2	-4	0	-2	-2
f(x) = $- x^2 + 4x$	-1	4	0	4	4
f(x) = $2x^2 + 1$	2	0	1	1	1
f(x) = $- 3x^2 - 1$	-3	0	-1	-1	-1
f(x) = x^2	1	0	0	0	0
f(x) = $- x^2$	-1	0	0	0	0

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) ***[I$_r$]*** O valor obtido para a razão $-\frac{\Delta}{4a}$ é igual ou diferente ao valor da ordenada do vértice em cada caso? Igual

2) ***[I$_r$]*** Podemos afirmar, intuitivamente, que a razão $-\frac{\Delta}{4a}$ permite determinar a ordenada do vértice de uma parábola, definida de $\mathbb{R}\; em\; \mathbb{R}$ por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $com\; a, b\; e\; c\; \epsilon\; \mathbb{R}\;\; sendo\; a \neq 0$? Sim

Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deverá formalizar uma das maneiras de determinar a ordenada do vértice de uma parábola conhecendo a sua representação algébrica.

[I$_f$] Para toda função quadrática *f(x)* = *ax^2* + *bx* + *c*, definida de $\mathbb{R}\; em\; \mathbb{R}, com\; a, b\; e\; c\; \epsilon\; \mathbb{R}\;\; sendo\; a \neq 0$, temos que a ordenada do vértice da parábola que a representa geometricamente pode ser calculada pela expressão $-\frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ e *"a", "b"* e *"c"* são os coeficientes da referida função.

Intervenções avaliativas

3) ***[IA$_r$]*** Determine a ordenada do vértice de cada função quadrática seguinte, definidas de $\mathbb{R}\; em\; \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ $y_v = -3$

b) $f(x) = -2x^2 + 8x$ $y_v = 8$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ $y_v = 3$

d) $f(x) = -x^2 + 8$ $y_v = 8$

4) ***[IA$_r$]*** Qual deve ser o valor de *m* na função *f(x) = x^2 – 4x + m*, para que a ordenada do vértice da parábola que a representa seja igual a -4? m = 0

Unidade Articulada de Reconstrução Conceitual (12)

Título: A ordenada do vértice (Parte 2)

Objetivo: Descobrir uma maneira de determinar a ordenada do vértice a partir da abscissa do mesmo.

Orientações ao professor: Para o desenvolvimento desta atividade, os estudantes devem ter o domínio dos seguintes conteúdos matemáticos, denominados de pré-requisitos necessários: identificação dos coeficientes numéricos “a”, “b” e “c” de uma função quadrática, cálculo do valor da imagem a partir do valor do domínio, vértice de uma parábola, par ordenado e plano cartesiano. Além disso, ressalto que, embora tenha sido pensado e organizado inicialmente para essa atividade, nove intervenções avaliativas, sugiro verificar a real necessidade desse número, no decorrer do processo de aplicação.

Material: Roteiro da atividade, lápis, papel e o aplicativo “QUADRÁTICO5”

Procedimento:

(I_i – CP) Para cada função quadrática a seguir, determine:

- ***[I_e]*** os coeficientes;
- ***[I_e]*** a abscissa do vértice;
- ***[I_e]*** a imagem da abscissa do vértice;
- ***[I_e]*** com o auxílio do aplicativo “QUADRÁTICO5”, o valor da ordenada do vértice.

Função Quadrática	Coeficientes			Abscissa do vértice x_v	$f(x_v)$	Valor da ordenada do vértice.
	a	b	c			
$f(x) = x^2 - 6x + 5$	1	-6	5	3	-4	-4
$f(x) = -x^2 - 4x - 3$	-1	-4	-3	-2	1	1
$f(x) = x^2 + 2x + 1$	1	2	1	-1	0	0
$f(x) = -x^2 + 2x - 1$	-1	2	-1	1	0	0
$f(x) = 2x^2 - 4x$	2	-4	0	1	-2	-2
$f(x) = -x^2 + 4x$	-1	4	0	2	4	4
$f(x) = 2x^2 + 1$	2	0	1	0	1	1
$f(x) = -3x^2 - 1$	-3	0	-1	0	-1	-1
$f(x) = x^2$	1	0	0	0	0	0
$f(x) = -x^2$	-1	0	0	0	0	0

Agora, faça o que se pede de acordo com a tabela anterior:

1) ***[I_r]*** O valor obtido para **$f(x_v)$**, para cada função quadrática, é igual ou diferente do valor da ordenada do vértice? Igual

2) ***[I_r]*** Podemos afirmar que a ordenada do vértice **(y_v)** de uma parábola, corresponde a imagem da abscissa **(x_v)** da mesma, isto é, $f(x_v) = y_v = ax_v^2 + bx_v + c$? Sim

3) ***[Iₑ]*** Descreva com suas palavras, como podemos determinar a ordenada do vértice de uma parábola sem fazer o uso da relação $-\frac{\Delta}{4a}$. Resposta pessoal

Após a socialização das reflexões feitas pelos grupos, o professor deve formalizar a outra possibilidade de determinação da ordenada do vértice de uma parábola a partir da abscissa do vértice.

> ***[I_f]*** Para toda função quadrática *f(x)* = *ax²* + *bx* + *c*, definida de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}, com\ a, b\ e\ c \in \mathbb{R}\ sendo\ a \neq 0$, temos que a ordenada do vértice da parábola que a representa geometricamente pode ser determinada substituindo o valor da abscissa do vértice na lei da função, ou seja, determinando $f(x_V)$. A ordenada do vértice representa o valor máximo ou mínimo da função.

Intervenções avaliativas

4) ***[IA_r]*** Sabendo-se que a abscissa do vértice da função quadrática $f(x) = x^2 - 2x + 3$ é igual a 1, determine a ordenada do vértice dessa mesma função. $y_V = 2$

5) ***[IA_r]*** Determine a ordenada do vértice das seguintes funções quadráticas, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, sem fazer o uso da relação $-\frac{\Delta}{4a}$.

a) $f(x) = x^2 - x + 1$ $y_V = 3/4$

b) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ $y_V = 1/4$

c) $f(x) = x^2 + 4x$ $y_V = -4$

d) $f(x) = -2x^2 + 8$ $y_V = 8$

6) ***[IA_r]*** Determine o valor máximo ou o valor mínimo das seguintes funções quadráticas, definidas de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$ Valor mínimo = $y_V = -6$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ Valor máximo = $y_V = 1$

7) ***[IA_r]*** (DANTE, 2014) Determine o vértice V da parábola que representa a função quadrática:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ V(1, 2)

b) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$ V(3/2, -11/4)

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ V(2, -1)

d) $y = x^2$ V(0, 0)

e) $y = (x - 2)^2 + 3$ V(2, 3)

8) ***[IA_a]*** A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura *h*, em metros, *t* segundos após o chute, seja dada por $\boldsymbol{h = -t^2 + 6t}$.

a) O vértice da parábola, nessa situação, é o ponto mais alto ou ponto mais baixo do gráfico? Justifique sua resposta. Ponto mais alto, pois o coeficiente a<0.

b) Quais são as coordenadas do vértice da parábola que representa essa função? V(3, 9)

c) Em que instante a bola atinge a altura máxima? 3 s

d) Qual é a altura máxima atingida pela bola? 9 m

9) ***[IAa]*** Sabe-se que o custo *C* para produzir *x* unidades de certo produto é dado por $C = x^2 - 80x + 3000$. Nessas condições, responda:

a) O vértice da parábola, nessa situação, é o ponto mais alto ou ponto mais baixo do gráfico? Justifique sua resposta. Ponto mais baixo, pois o coeficiente a>0.

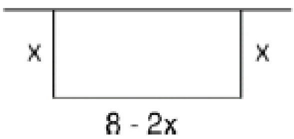
b) Quais são as coordenadas do vértice da parábola que representa essa função? V(5, -15)

c) Qual deve ser a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo? 5 unidades

d) Qual é o valor mínimo do custo? -15

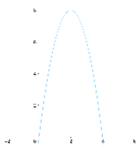
10) ***[IAa]*** (DANTE, 2014) Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R$ 20,00 mais R$ 2,00 por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? 25

11) ***[IAa]*** (MESQUITA, 2009) Deseja-se cercar um canteiro retangular dispondo de 8 metros de tela. O terreno já possui uma parede construída, então será necessário cercar apenas três lados do retângulo como mostra a figura seguinte:



a) Qual é a fórmula que expressa a área desse canteiro em função de *x*, que é a medida de um dos lados do retângulo? $A(x) = 8x - 2x^2$

b) Atribua alguns valores para *x* (medida de um dos lados do retângulo) e construa o gráfico da área do canteiro.



c) Verifique qual deve ser a medida do lado do retângulo para que a área do canteiro seja máxima. E qual é a área máxima? Lados: 4m e 2m; $A_{máx} = 8\ m^2$

12) ***[IAa]*** (UFPR – adaptado) O lucro diário *L* é a receita gerada *R* menos o custo de produção *C*. Supondo que, em certa fábrica, a receita gerada e o custo de produção sejam dados, em reais, pelas funções $R(x) = 60x - x^2$ e $C(x) = 10(x + 40)$, sendo *x* o número de itens produzidos no dia. Sabendo que a fábrica tem capacidade de produzir até 50 itens por dia, quantos itens devem ser produzidos por dia para que a fábrica obtenha lucro máximo? 25 itens.

REFERÊNCIAS

ALVES, Fábio José da Costa. PEREIRA, Cinthia Cunha Maradei (Org.). **Objetos de aprendizagem no Geogebra**. Curitiba: CRV, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. **Lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as Diretrizes da Educação Nacional. Diário Oficial da União, Brasília, n. 248, p. 27.833 – 27.841, 23 de dez. de 1996.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC-SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC-SEMTEC, 1999.

_______.Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

_______.Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

_______.Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Básico. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.

_______.Ministério da Educação. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília: MEC, 2015.

_______.Ministério da Educação. **Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB/Prova Brasil.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília: MEC, 2015.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas:** estruturação e elaboração. Belém: SBEM-PA, 2017.

CABRAL, Natanael Freitas. **O Papel das Interações Professor-aluno na Construção da Solução Lógico-aritmética Otimizada de um jogo com regras.** Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Pará. Belém (PA), 2004. Disponível em:<http://www.repositorio.ufpa.br:8080/jspui/bitstream/2011/1760/1/Dissertacao_PapelInteracoesProfessoraluno.pdfpdf>. Acesso em: 21 de set. 2017.

CHAQUIAM, Miguel. **Uso e implicações das linguagens no ensino de matemática**. Coleção educação matemática na Amazônia. Belém: SBEM, SBEM-PA, 2015.

COSTA, Ricardo Carvalho. **A formação de Professores de Matemática para uso das Tecnologias de Informação e Comunicação: uma abordagem baseada no ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo graus.** 119f. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). São Paulo, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Múltiplo. Matemática: ensino médio**. São Paulo: Ática, 2014.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. **Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento.** In: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. (Orgs.). Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado das Letras, 2014.

FERREIRA, Ronaldo Dias. **Contribuições do GeoGebra para o estudo de funções afim e quadrática em um curso de Licenciatura em Matemática.** 229f. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). São Paulo, 2013.

GOÉS, Maria Cecília Rafael de. **A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural:** uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. v. 20, Campinas: Cadernos Cedes, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v20n50/a02v2050.pdf >. Acesso em: 02 de Nov. 2017.

GONÇALVES, Fábio Barros. et al. **Função quadrática: uma visão de alunos do Ensino Médio**. In: ENCONTRO PARAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, Belém-Pa, 2017.

GONÇALVES, Fábio Barros; SANTOS, Maria de Lourdes Silva; CHAQUIAM, Miguel. **Alunos de uma escola de Ensino Médio respondem: o que “ficou” de função quadrática um ano depois?**. Anais do Seminário de Cognição e Educação Matemática. UEPA, 2017a.

GONÇALVES, Fábio Barros; SANTOS, Maria de Lourdes Silva; CHAQUIAM, Miguel. **Função quadrática: uma visão de alunos do Ensino Médio**. Anais do XI EPAEM. SBEM-PA, 2017b.

GONÇALVES, Fábio Barros. **Uma Sequência Didática para o ensino de função quadrática**. 2019, 288 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do ensino médio**. Coleção do professor de matemática. Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. Coleção do professor de matemática. 3ª.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LOPES, Sandra Pereira. **Uma sequência didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico.** 148f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). São Paulo, 2014.

LOPES, Sandra Pereira. **Registros de Representações Semióticas no estudo da Funções polinomiais de segundo grau.** XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba. Julho, 2013.

MAIA, Diana. **Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional.** 141f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). São Paulo, 2007.

MELO, Luciano Augusto da Silva. **Dois jogos de linguagem: a Informática e a Matemática na aprendizagem de função quadrática.** 154f. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática (Universidade Federal do Pará). Belém, 2013.

MESQUITA, Maria Aparecida Nunes. **Ensinar e aprender funções polinomiais do 2º grau, no Ensino Médio: construindo trajetórias.** 181f. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). São Paulo, 2009.

MOREIRA, Marco Antônio. **Ensino e aprendizagem: enfoques teóricos.** 3ª ed. São Paulo: editora Moraes, s.a.

MORTIMER, Eduardo F. & SCOTT, Phill. **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino.** Investigações no ensino de ciências, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2002. Disponível em: www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista. Acesso em: 23 de Out. 2017.

MPAKA, Nlandu. **O ensino e a aprendizagem do gráfico da função quadrática com e sem o auxílio do software Winplot.** 140f. Dissertação de Mestrado em Ciências da Educação (Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias). Lisboa, 2010.

NETO, Aref Antar, et al. **Noções de matemática: conjuntos e funções**. Fortaleza: ed. Vestseller, 2009, v. 1.

PENTEADO, Miriam Godoy. **Redes de trabalho: Expansão das possibilidades da informática na Educação Matemática da Escola Básica**. In BICUDO, M. A. V. & BORBA, M. C. (orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. 2ª ed. revisada. São Paulo: Cortez, 2005.

RÊGO, Teresa Cristina Rebolho. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação.** Petrópolis: Vozes, 1995.

SANTOS, Antônio dos. **Revisando as funções do 1º e do 2º grau com a interatividade de um hiperdocumento.** 117f. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). São Paulo, 2005.

SANTOS, Cristiane do Socorro Ferreira dos. **Objetos de aprendizagem para funções afim e quadrática**.2010. 199 f. TCC (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2010.

SANTOS, Cristiane do Socorro Ferreira dos. **Ensino das funções afim e quadrática por atividades.** 2013. 312 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2013.

SANTOS, Sérgio Aparecido dos. **Ambiente informatizado: para o aprofundamento da função quadrática por alunos da 2ª série do Ensino Médio.** 162f. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). São Paulo, 2009.

SILVA, Andreza Santana da. **Função quadrática sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica: análise de um livro didático de matemática.** XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo. Julho, 2016.

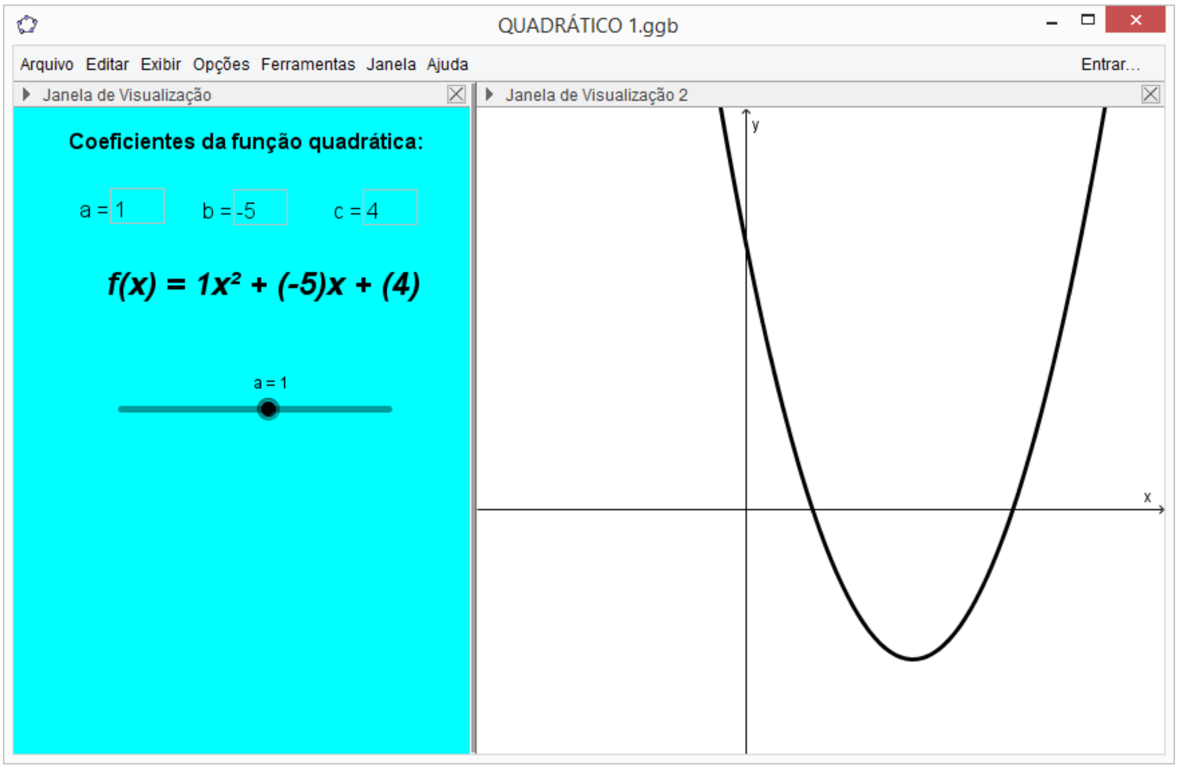
SILVA, Alessandra Azzolini da. **A noção de função quadrática na transição entre os Ensinos Fundamental, Médio e Superior.** 179f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática (Universidade Bandeirantes de São Paulo). São Paulo, 2012.

SIQUEIRA, Fábio Rodrigues de. **A programação no Ensino Médio como recurso de aprendizagem dos zeros da função polinomial do 2º grau.** 125f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). São Paulo, 2012.

STEWART, James. **Cálculo,** volume 1. Tradução técnica Antônio Carlos Moretti, Antônio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

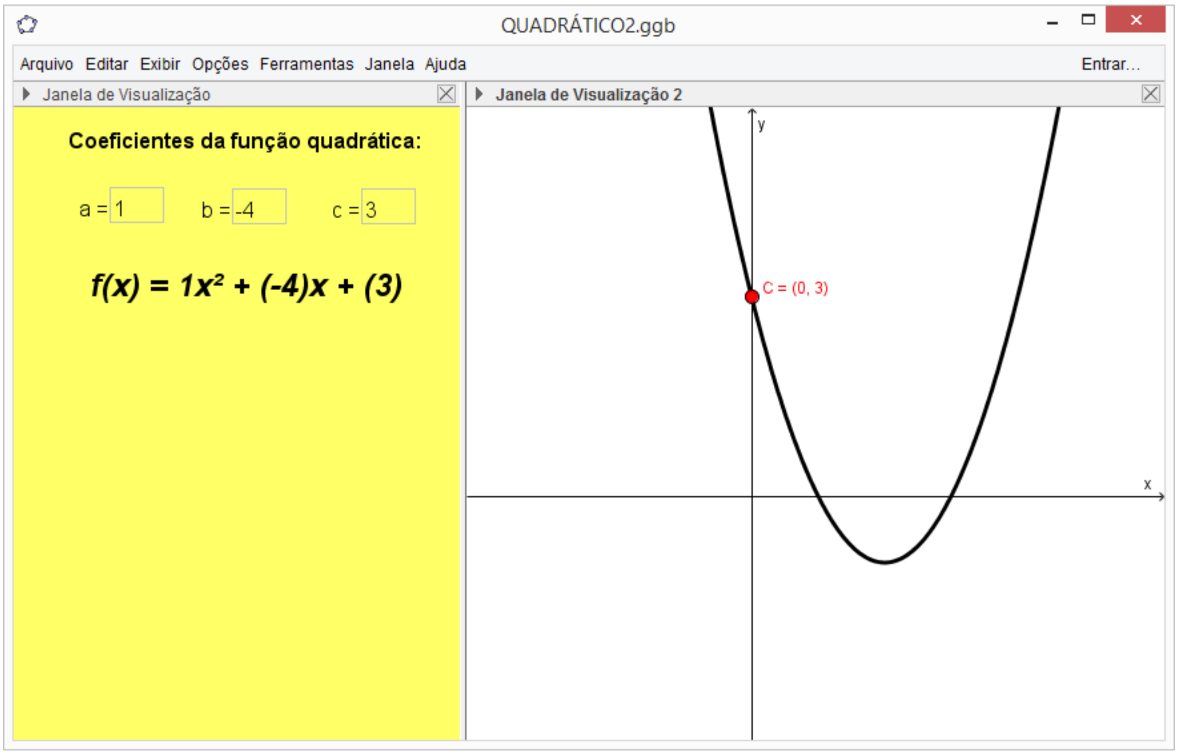
APÊNDICES

Apêndice 1: Objeto de aprendizagem QUADRÁTICO1



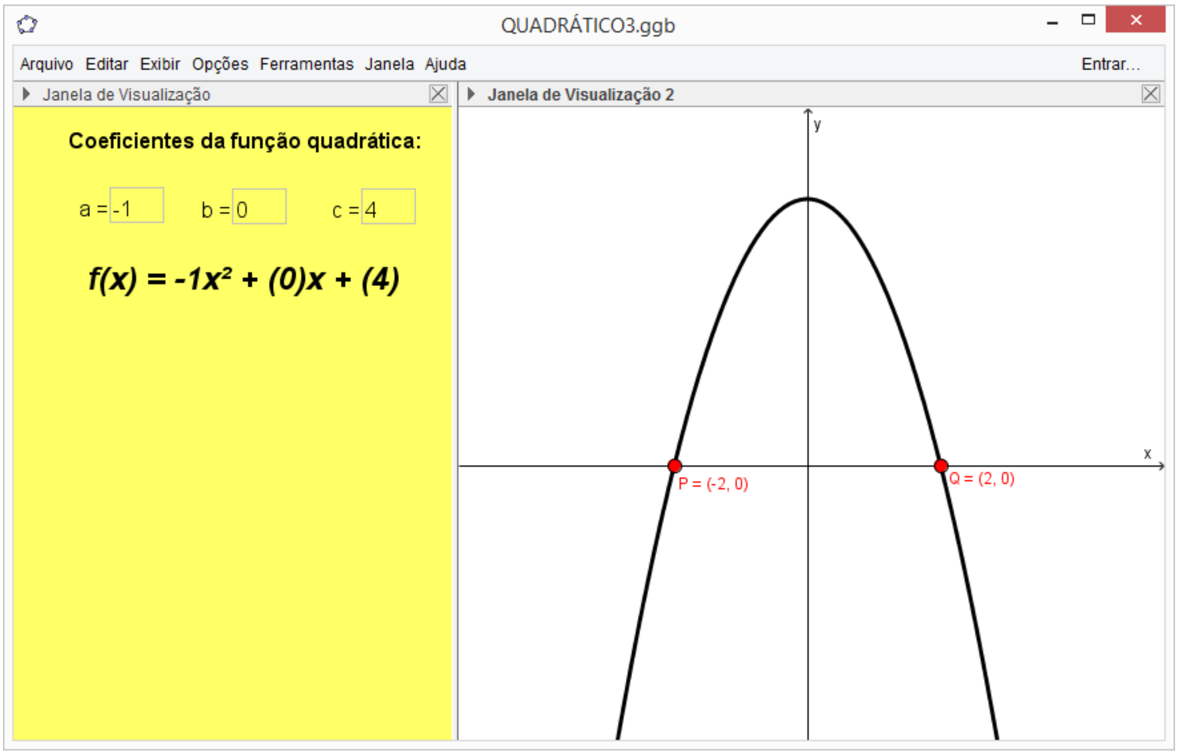
Fonte: Elaborado pelo Autor (2016).

Apêndice 2: Objeto de aprendizagem QUADRÁTICO2



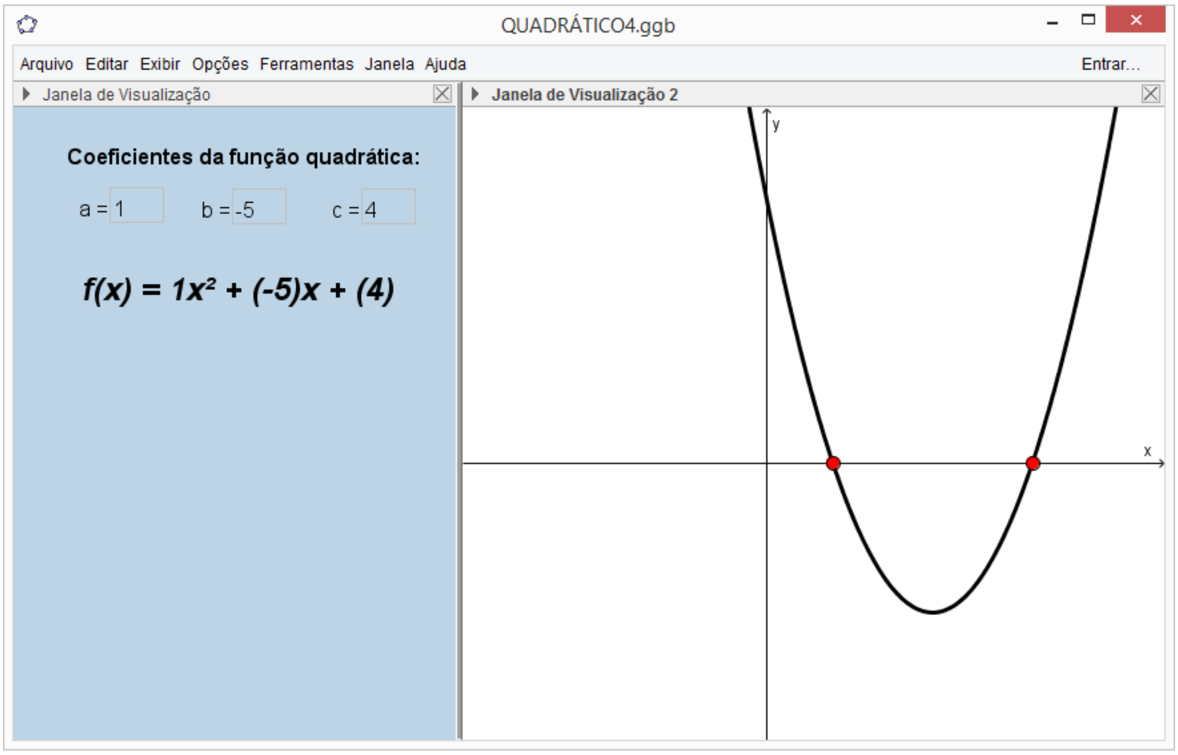
Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Apêndice 3: Objeto de aprendizagem QUADRÁTICO3



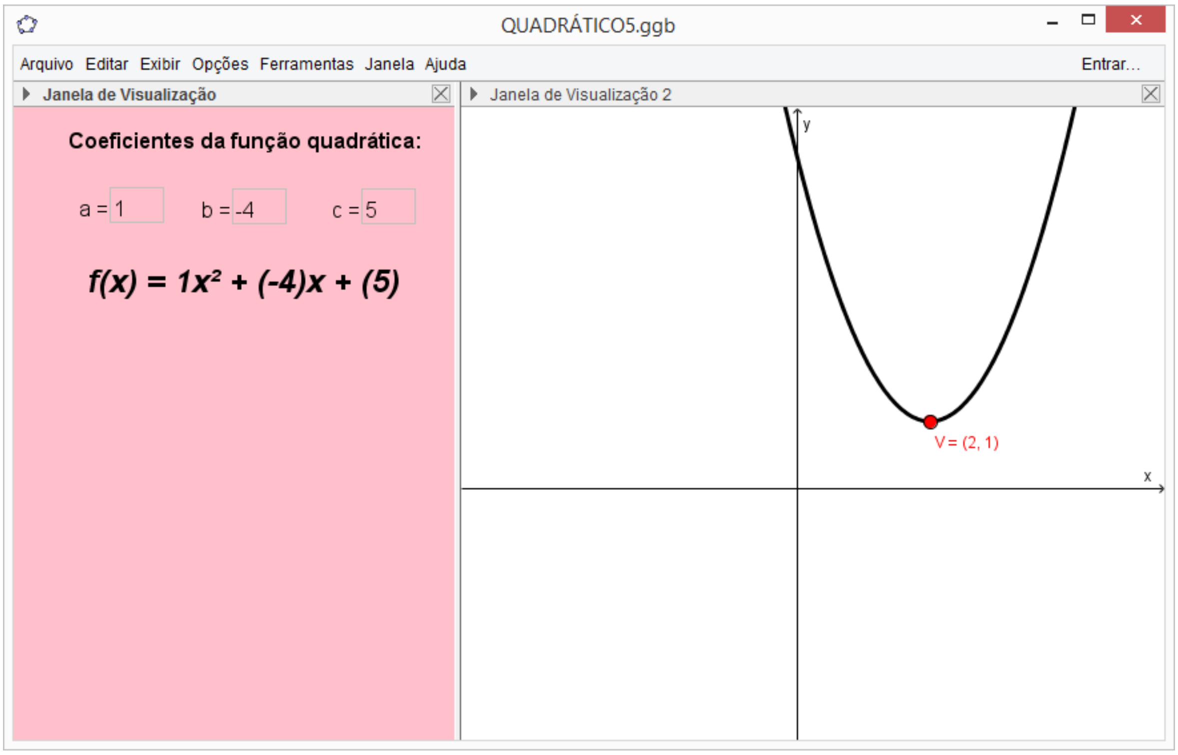
Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Apêndice 4: Objeto de aprendizagem QUADRÁTICO4



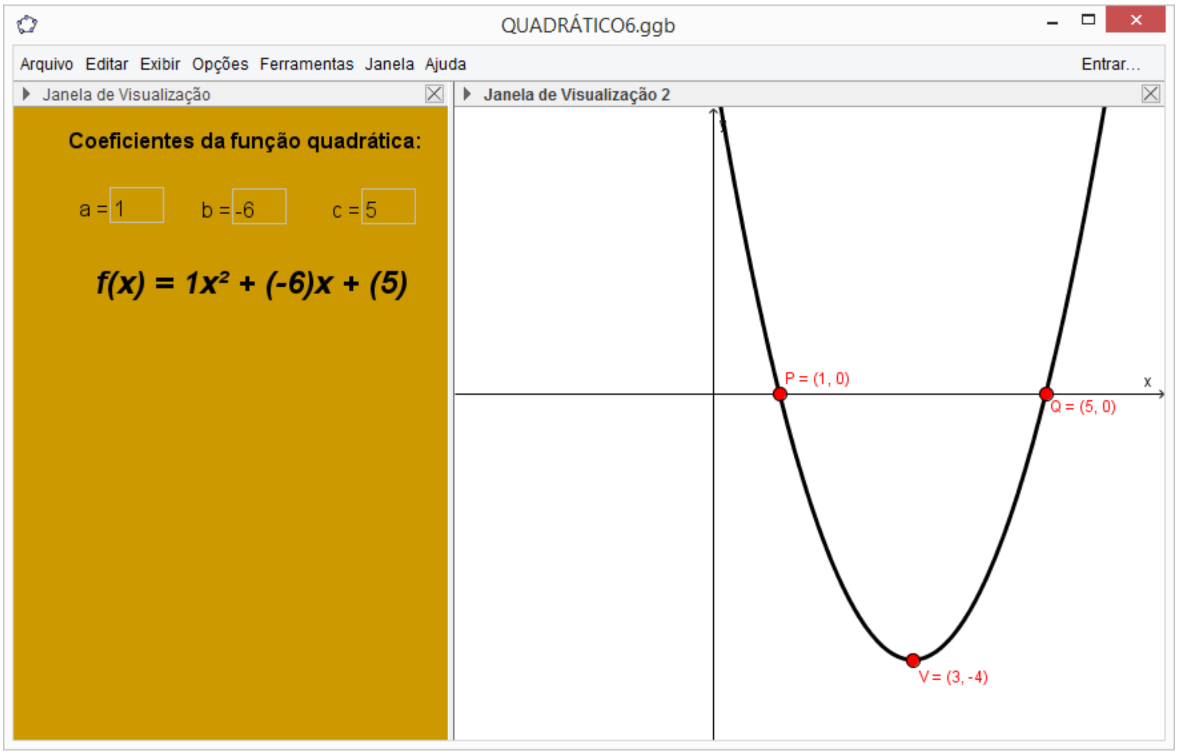
Fonte: Elaborada pelo autor (2016).

Apêndice 5: Objeto de aprendizagem QUADRÁTICO5

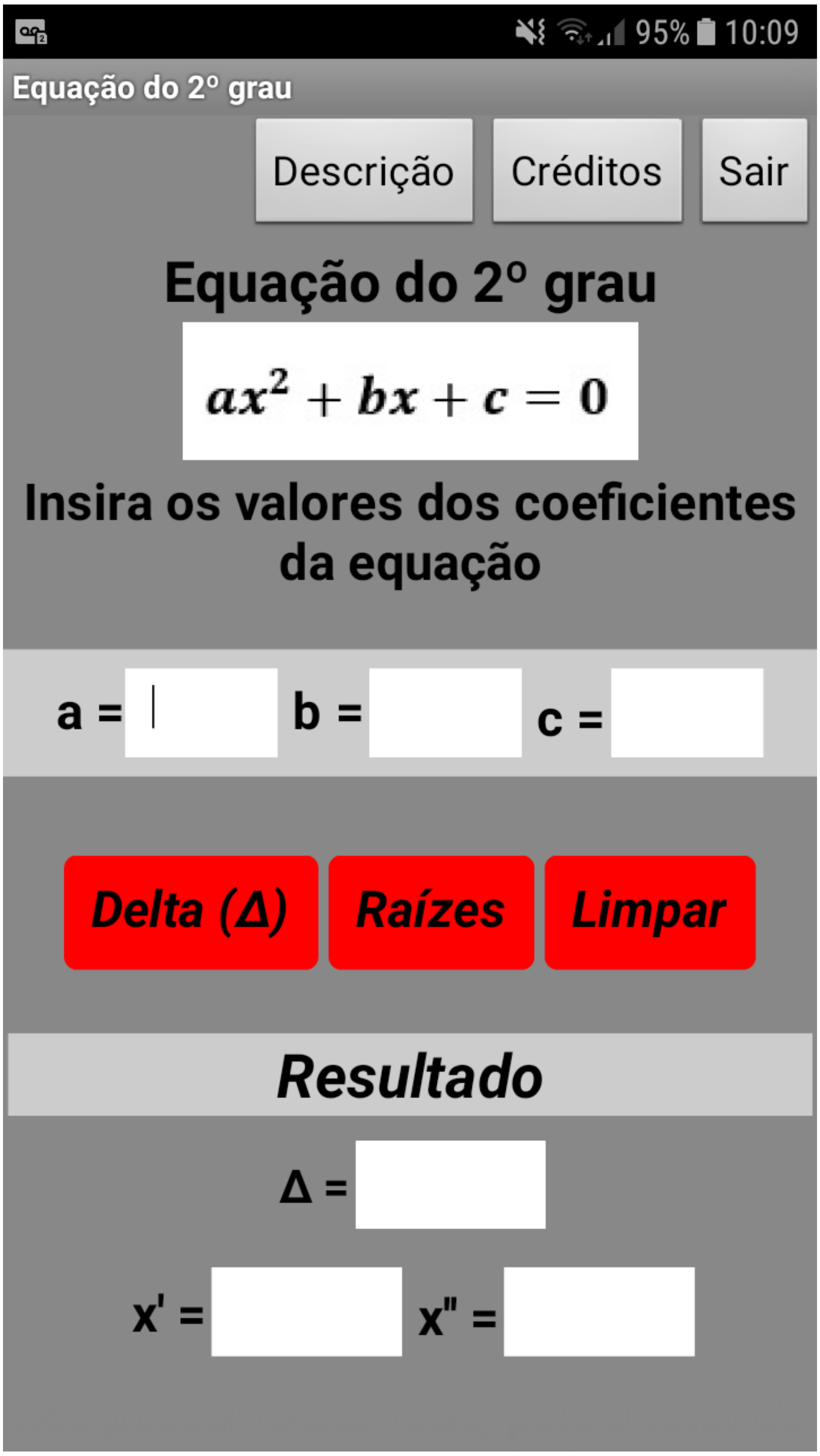


Fonte: Elaborado pelo autor (2016).

Apêndice 6: Objeto de aprendizagem QUADRÁTICO6

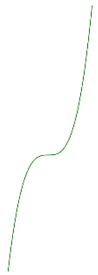
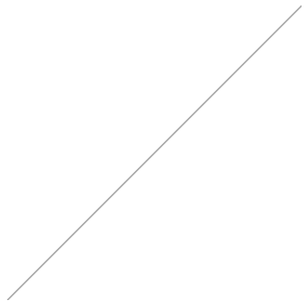
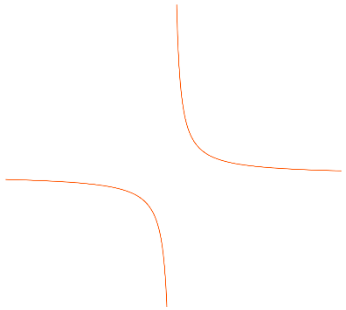
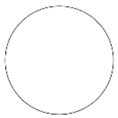
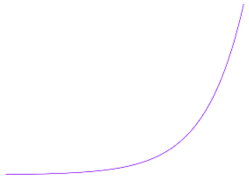
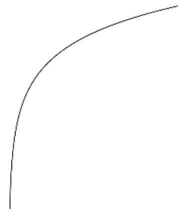
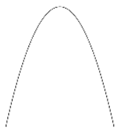
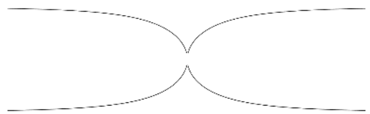
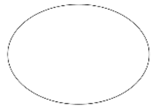


Apêndice 7: Objeto de aprendizagem calculadora “EQUAÇÃO DO 2º GRAU”



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Apêndice 8: Quadro de Curvas

Parábola cúbica	Reta	Parábola côncava para cima	Hipérbole equilátera
			
Circunferência	Curva exponencial	Curva logarítmica	Parábola semicúbica
			
Parábola côncava para baixo	Curva de Gutschoven (Kappa)	Elípse	Curva de Agnesi
			

Fonte: Comunicação oral Professor Dr. Pedro Franco de Sá (UEPA, 2016).

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo 66113 – 200
Belém-Pa