Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Dérick de Carvalho Conceição

Ducival Carvalho Pereira

UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FERRAMENTA METODOLÓGICA DE ENSINO

BELÉM/PA
2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho e PEREIRA, Ducival Carvalho. Uma alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio: resolução de problemas como ferramenta metodológica de ensino. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Resolução de problemas; Análise combinatória.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Notamos que há vários métodos de pesquisa e linhas de raciocínio que buscam entender como acontece de fato a aprendizagem matemática. Há no meio acadêmico várias contribuições nesse âmbito. Algumas pesquisas se destacam para percebermos novas alternativas para a dinâmica educacional. Nesse sentido, objetivamos entender como tal dinâmica é proposta dentro da academia. Dessa forma, para o escopo desse trabalho, fizemos uma leitura dos trabalhos que tratem sobre o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Para tanto, em diálogo com os PCN's, buscamos compreender como tais trabalhos investigam e propõem novos caminhos para o ensino dessa disciplina importantíssima da matemática. Ao longo da pesquisa, percebemos que algumas dessas propostas buscam conciliar o mundo matemático e empírico do aluno. Em outras palavras, as alternativas encontradas nasceram com o intuito de transpor barreiras entre a vida cotidiana e o ensino de matemática, fazendo com que o alunado perceba que a realidade que o circunscreve está permeada por uma lógica matemática, e que essa disciplina não é apenas conceitos. Tais alternativas utilizadas fazem com que os discentes vivam a matemática. Nesse sentido nossa intenção está em desenvolver diferentes métodos de ensino de Análise Combinatória voltadas para as escolas, pois acreditamos que há poucos trabalhos neste campo de pesquisa. Segundo Sturm, 1999, ele foi motivado a realizar um estudo acerca do ensino de Análise Combinatória após ter lido que apontavam que não existiam, no Brasil, de nenhuma tese ou dissertação que tivesse como objeto de investigação o ensino de Análise Combinatória no nível escolar.

> "... outra razão é a dificuldade de se encontrar textos relativos ao ensino de Análise Combinatória.", (Sturm, 1999 - Dissertação de mestrado)

Sobre esse olhar, busco pesquisar sobre a seguinte questão: Uma sequência didática, destacando a resolução de problemas como modelo introdutório, proporciona condições favoráveis para que sejam internalizados conceitos, levando o aluno desenvolver habilidades triviais para solucionarem os situações problemas de Análise Combinatória?

Em busca de respostas às questões de pesquisa, elaborei uma Sequência Didática e a experimentarei junto aos alunos do ensino médio, com o objetivo de investigar a possibilidade de ser realizada a sequência de ensino para inserir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de Situações Didáticas, utilizando a resolução de situações- problemas como ponto de partida.

Começamos com os trabalhos que investigaram como a sequência didática de ensino de Análise Combinatória influencia nos resultados. Em segundo lugar, compreenderemos um pouco mais da didática empregada para o ensino de matemática e suas problemáticas. Em seguida, investigaremos como esses trabalhos tratam a metodologia e a resolução dos problemas e, por último, partimos dos trabalhos que investigam estratégias alternativas para o ensino da disciplina e as consequentes dificuldades dos alunos.

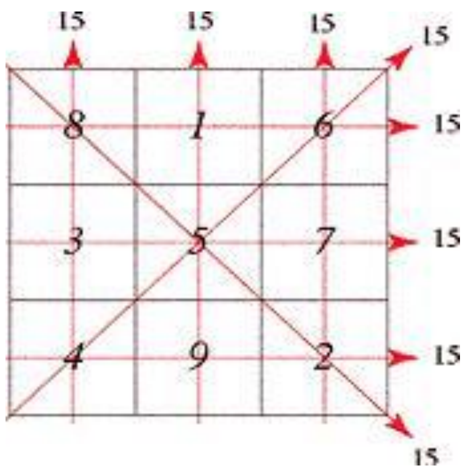
Com isso, desenvolvemos este produto final, que é fruto de uma dissertação de Conceição (2019), na qual o autor tinha o objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, sobre a participação e o desempenho na resolução de questões de Análise Combinatória. Para isso colocaremos em prática a metodologia do Ensino de Matemática por atividade segundo Sá (2009) e o Uso de Jogos. Apresentamos uma sequência didática para professores, sobre a introdução aos conceitos básicos de Análise Combinatória´, para o 2º ano do Ensino Médio, essa sequência visa trabalhar, através da resolução de problemas, situações que, ao nosso ver, instigam o aluno a pensar como a Análise Combinatória funciona, sem se prender a fórmulas e formalização de conceitos. Ressaltamos ainda que esperamos que o aluno, ao final desta aplicação, seja capaz de interpretar e resolver situações envolvendo:

- O conceito de fatorial de um número;
- O Princípio da Adição;
- O Princípio Fundamental da Multiplicação;
- Permutações Simples;
- Permutações com Repetição;
- Combinação Simples

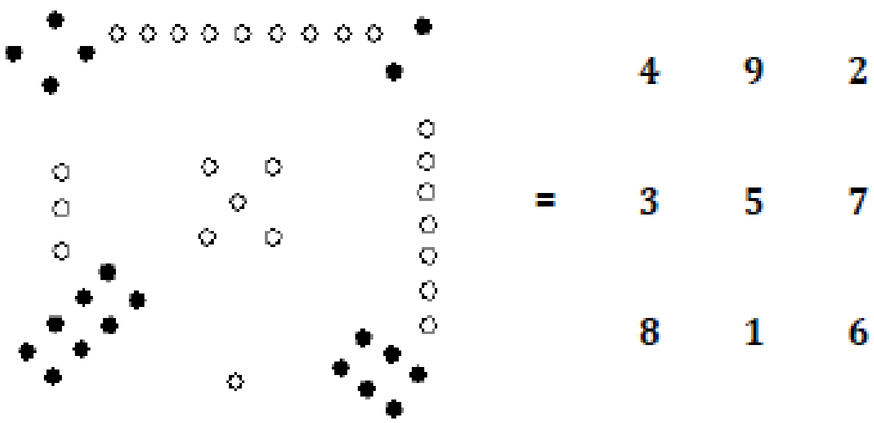
2 ASPECTOS HISTÓRICOS

A Análise Combinatória foi considerada completamente desligada do cálculo aritmético, por muito tempo. Segundo Rey Pastor (1939) “o conceito moderno do número é, porém uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas”.

Segundo Wieleitner o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. Chamamos de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números $1, 2, 3, \cdots, n^2$ em um quadrado $n \times n$ de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Como vemos abaixo:



O primeiro quadrado mágico conhecido é o Lo Shu, que segundo Needham (1959) data do século I d.C., mas que pode ser tão antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (Berge, 1971):



Este diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde vários ritos eram realizados, sendo que a substituição destes símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado Saturn. Este quadrado causava uma grande fascinação para a maioria das pessoas, pois nesta época, mesmo a mais simples aritmética era algo espantoso. Acredita-se que a idéia dos quadrados mágicos foi transmitida pelos chineses para os árabes, que fizeram grandes contribuições e construíram quadrados maiores que o antigo Lo Shu.

Há ainda, uma poesia infantil que parece ter sobrevivido em várias culturas e que serve para introduzir o campo de problemas combinatórios (Biggs, 1979):

> Quando eu estava indo para St. Ives, eu encontrei um homem com sete mulheres, cada mulher tem sete sacos, cada saco tem sete gatos, cada gato tem sete caixas. Caixas, gatos, sacos e mulheres, quantos estavam indo para St. Ives?

Esta poesia data, pelo menos de 1730 e é usualmente interpretada como uma brincadeira, entretanto, poderia se imaginar que por trás dela existiriam propósitos bem mais sérios, pois existe um problema similar no Líber Abaci, “Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?”,escrito por Leonardo de Pisa que dificilmente negaria uma conexão entre este problema e a poesia infantil. As duas citações mostram aspectos artificiais do problema envolvendo a adição e a repetição do número sete, reforçando a memorização do mesmo.

Segundo Wilson (1990), as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos onde era destacada a elusiva propriedade da memorização, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue: Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens têm ao todo? Ou também o problema da construção de quadrados mágicos.

Alguns quadrados mágicos maiores que o Lo Shu foram encontrados por um grupo de estudantes árabes conhecido como os Ikhwan-al-Safa, que apresentaram os quadrados de ordem 4, 5 e 6 e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9.

A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

O matemático francês Frénicle (1693) apresentou todos os 880 quadrados de ordem 4, e nesta mesma época seu compatriota, De La Loubère (1691) descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar conhecido como "método de fronteira" que aprendeu com o povo de Sião.

Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos" enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como "*o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si*".

Segundo Berge (1971) a definição de combinatória depende de conceitos de "configurações", pois instintivamente os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados.

Há, em geral, quatro aspectos da combinatória moderna: listar, contar, estimar e existir – muitos dos quais podem ser ilustrados pelo problema de dispor n distinguíveis objetos em uma fileira.

Para Biggs (1979) há dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que podem também ser considerados como a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação, sendo que o 1º diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividir isso em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Isso é fato da experiência do dia a dia. Já no 2º princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, $x \times y$.

Na análise combinatória estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: *arranjos, permutações* e *combinações*, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

Ainda no princípio do século XIX não havia significado preciso para o emprego dos termos *arranjo* e *permutação*. Leibniz designava as permutações por *variações*, que é a palavra hoje utilizada por alguns autores para indicar *arranjos*.

Quando num problema figura uma coleção de elementos, é possível que a solução desse problema vá depender da maneira por que se escolhe alguns desses elementos e também da ordem em que os mesmos se dispõem.

Se considerarmos uma coleção ou um conjunto de elementos quaisquer e, tomarmos um, dois, três, ... desses elementos, temos um agrupamento. Um agrupamento é simples quando o mesmo elemento não figura nele mais de uma vez; caso contrário, o agrupamento é denominado com repetição.

Ao agrupamento em que o número de objetos de cada grupo é menor que o total, e um elemento figura uma só vez em cada grupo, e dois agrupamentos diferem pela *natureza* ou pela *ordem* dos elementos que neles figuram, chamamos *arranjo simples* e quando o agrupamento formado difere apenas pela natureza de pelo menos um elemento temos uma *combinação simples*. Já ao agrupamento formado por todos os elementos do conjunto, diferindo dois agrupamentos apenas pela ordem dos elementos, chamamos *permutação*.

Durante o desenvolvimento da análise combinatória muitos matemáticos adotaram diferentes simbologias para denominar as mesmas operações. O símbolo $\pi(n)$ foi instituído por Gauss (1777-1855) para representar o produto dos n primeiros números naturais (fatorial de n), A. M. Legendre (Paris, 1811) usava o símbolo $\Gamma(n+1)$; a notação $n!$ é devida a Cristian Kramp (Colônia, 1808) e ⌊n usada por outros autores. A Arbogast (Strasburgo, 1800) deve-se a denominação *fatorial*.

A Análise Combinatória serve hoje de base a várias teorias da Análise Matemática: probabilidades, determinantes, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, etc. Tal assunto é foco de muita atenção, pois na literatura não existe uma definição satisfatória desta ciência e de suas ramificações.

3 ASPECTOS MATEMÁTICOS

A Análise Combinatória é um conteúdo matemático que apresenta grande dificuldade em relação à formulação e, principalmente, interpretação dos seus enunciados. É um ramo da Matemática que permite que se escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto, sem que haja necessidade de enumerá-los.

Cada um desses problemas é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los. As operações combinatórias são essenciais para o desenvolvimento cognitivo, por isso seria de extrema importância que o aluno tivesse contato com esse tópico desde os primeiros anos da escola básica, para familiarizar-se com problemas de contagem, descrevendo os casos possíveis e contando-os através de uma representação por ele escolhida, sem regras em princípio, de modo que ele adquirisse um método sistemático e gradativo para a resolução dos problemas, visando uma posterior formalização no ensino médio.

a) Agrupamento simples é aquela em que cada elemento do conjunto figura uma única vez, isto é, em que não se considera a repetição, no mesmo grupo, de um elemento do conjunto. Em caso contrário, os agrupamentos denominam-se com repetição ou completos.

b) Taxa ou classe do agrupamento é o número de elementos do conjunto considerados em cada grupo.

c) Fatorial é um número inteiro positivo, o qual é representado por $n!$. O fatorial de um número é calculado pela multiplicação desse número por todos os seus antecessores até chegar ao número 1. E nesses produtos, o zero é excluído.

d) Princípio Fundamental da Contagem é um princípio de contagem o qual diz que se há um acontecimento com várias etapas diferentes e se a primeira pode ocorrer de uma maneira (n_1), a segunda de outra maneira (n_2), a terceira de outra maneira (n_3), e assim por diante. Então o número de maneiras total (T) de ocorrer esse acontecimento é a multiplicação das possibilidades, ou seja, $T = n_1 \times n_1 \times n_1$.

3.1 Fatorial

Fatorial de um número é o produto dos números inteiros positivos de 1 a n que se representa pelo símbolo $n!$. Assim, seja n um número inteiro positivo. Então definimos o fatorial de n como:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

Define-se ainda:

$0! = 1$

$1! = 1$

3.2 Principio fundamental da contagem

Se um experimento é composto por eventos $A, B, C, \cdots, Z$ e cada evento pode ter $n_A, n_B, n_C, \cdots, n_Z$, resultados diferentes, então o total de resultados possíveis (sequências de resultados dos eventos) para o experimento é dado por:

$$n_A \times n_B \times n_C \times \cdots \times n_Z$$

3.3 Agrupamento simples

Os agrupamentos simples são, essencialmente, de três tipos: arranjos ou disposições simples, permutações e combinações simples.

3.3.1 Arranjo simples

São os agrupamentos em que o número de objetos de cada grupo é menor que o total, um elemento figura uma só vez em cada grupo (**não** há repetição de elementos), e dois agrupamentos diferem pela natureza ou pela ordem dos elementos que neles figuram. O número total de arranjos de n elementos com p elementos em cada sequência (arranjo de n elementos tomados p a p), é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3.3.2 Permutação

As permutações são um tipo específico de arranjos simples, onde, o número de elementos a serem tomados para compor o resultado é igual ao número de elementos existentes no conjunto. Em outras palavras, as permutações são os arranjos de n elementos tomados n a n. Portanto::

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

3.3.3 Combinação simples

São agrupamentos em que o número de elementos de cada grupo é menor que o total, em que cada grupo um elemento figura uma só vez e dois agrupamentos diferem pela *natureza* de, pelo menos, um elemento. Ou seja, **a ordem** dos elementos que compõem um resultado **não importa**, um resultado ABC é considerado igual a um resultado ACB. Neste caso, fala-se das combinações de n elementos tomados p a p, e esta quantidade é calculada como:.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

3.4 Permutação com repetição

A cada um dos agrupamentos que podemos formar com certo número de elementos, onde ao menos um deles ocorre mais de uma vez, tal que a diferença entre um agrupamento e outro se dê pela mudança de posição entre seus elementos, damos o nome de permutação com elementos repetidos. Se em um dado conjunto um elemento é repetido a vezes, outro elemento é repetido b vezes e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos obter é dada por:

$$P_n^{(a,b,\cdots)} = \frac{n!}{a!\,b!\cdots}$$

3.5 Relação de Stifel.

Seja um conjunto de n elementos e a, um desses elementos. O número de combinações com a taxa p pode ser decomposto em dois grupos:

1ª) combinações que figura o elemento a.

2ª) combinações que não figura o elemento a

De acordoo com as duas últimas propriedades, no primeiro grupo o número de combinações será:

$$C_{n-1}^{p-1}$$

e no segundo

$$C_{n-1}^{p}$$

Como a soma dá todas as combinações dos n elementos com a taxa p, teremos:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_{n}^{p}$$

Está relação é conhecida por *relação de stifel* e pode ser também escrita:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

4 ASPECTOS CURRICULARES

NA proposta curricular mantém a Matemática como uma área de conhecimento especifica, diferentemente do que é proposto pelos parâmetros curriculares nacionais - PCN’s, o qual trouxe aproximação Matemática com área de Ciências Naturais com o objetivo de desenvolver competências especificas dos alunos. A idealização da Matemática como uma área específica facilita a “incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos de que dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação da informação em conhecimento”, como firmado nos PCN’s.

A Proposta Curricular de Matemática tem como maior objetivo desenvolver as competências dos alunos discriminados por três pares de eixos complementares: o eixo expressão/compreensão, o eixo argumentação/decisão e o eixo contextualização/abstração. A Matemática, de acordo com a Proposta, detém maior destaque em cada um desses eixos. Inicialmente ele é considerada como instrumento de exemplificação e de entendimento da realidade a partir dos objetos que lhe são próprios como números, formas, relações e gráficos. Por outro lado, a Matemática é vista como instrumento de desenvolvimento do pensamento lógico e da análise racional em questões de sistematização de problemas e decisões; enfim é confirmada privilegiada para a diferenciação e otimização das articulações entre abstrações e a realidade concreta, embora os diversos instrumentos matemáticos sejam considerados categoricamente abstratos. A Proposta Curricular apresenta a Matemática como uma coleção de elementos em constante mobilidade e comunicação com as diferentes formas, linguagens e representações da nossa realidade e complementa sua importância no desenvolvimento das competências básicas reclamadas ao cidadão de hoje.

Em uma perspectiva curricular que se estenda ao Ensino Médio, podemos compor esse eixo, também, com o estudo das matrizes, bastante utilizado na programação de computadores, nos planejamentos de uma pesquisa estatística na qual utilizamos técnicas de elaboração de questionários e amostragem, a investigação de temas de estatística descritiva e de inferência estatística, o estudo de estratégias de contagem e do cálculo de probabilidades.

5 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nossa proposta de ensino é fundamentada no Ensino de Matemática por Atividades segundo Sá (2009) e no uso de Jogos.

Este material didático foi elaborado com a preocupação de garantir não apenas a abordagem do conteúdo Análise Combinatória, mas também o desenvolvimento de um processo de ensino-aprendizagem onde haja a parceria de alunos e professores, estes como sujeitos mais experientes. Assim, objetivou-se nessa sequência de ensino desenvolver um material por meio de situações didáticas, que enfatizam a resolução de problemas como ponto de partida, para firmar conceitos combinatórios. O PCN nos revela que

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os 24 instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 2000, p.52).

5.1 O ensino de matemática por atividades

A sala de aula necessita ser a oficina do amanhã. Diante de tão grande responsabilidade precisamos realmente parar e ponderar sobre as ações que historicamente vêm sendo atribuídas ao professor no Ensino de Matemática. O perfil do professor atual é daquele que apresenta a atitude interdisciplinar caracterizada pela busca, pela ousadia, pela pesquisa, pois essas atitudes possibilitam o enriquecimento da integração dos elementos do conhecimento.

O processo pedagógico da alfabetização Matemática deve ser pensado como um desafio diário não só para o aluno, mas também para o professor. O mundo educativo passa dinamicamente por diversas linguagens e inovações tecnológicas, e nesse cenário, a aquisição de conhecimento matemático não deve se furtar de acompanhar e promover estratégias que se relacione com diversas teorias e práticas da aprendizagem. A ousadia interdisciplinar deve-se fazer valer através da pesquisa e dos estudos da Matemática. Isso significa incentivar e promover os conteúdos de uma forma construtiva, dando mais qualidade de recursos a seres humanos, que se capacitam na lógica da Matemática.

Um dos objetivos da educação é promover o conhecimento, levar o cidadão a se apropriar do mundo circundante, existindo uma relação direta entre o sujeito que conhece e algo a ser conhecido. Temos informações de todos os lados e não podemos esquecer os outros mediadores que a sociedade dispõe, vivemos cercados de mídias e o conhecimento é muito rápido e dinâmico. Dessa maneira, renovamos sistematicamente tudo que aprendemos, algumas coisas ganham importância e outras se tornam absolutamente obsoletas.

Em Sanchis e Mahfoud (2007), encontramos que

> Piaget, através desses conceitos, discutia as relações entre a possibilidade de conhecimento e o sujeito conhecedor. Um sujeito epistêmico, nas suas palavras, abstrato e universal, presente em todos os sujeitos reais, que se constitui na sua relação com o mundo. Essa relação não é uma relação qualquer, mas uma interação com o (s) objeto (s) do conhecimento mediada pela ação do próprio sujeito, que dessa forma assimila – não o objeto puro, mas o resultado da interação – e acomoda-se, construindo, assim, novas estruturas de compreensão da realidade. Através de um processo dialético, as estruturas são reconstruídas, assim como também as estruturas do mundo na medida em que este adquire significado para o sujeito (SANCHIS e MAHFOUD, 2007, p.173).

O Ensino de Matemática por Atividade tem uma proposta que faz com que o aluno seja o construtor de seu conhecimento, o ajudando a entender transformações que lhe ajudarão a construir sua autonomia de pensamento, muito valorizada nos dias atuais.

Em Sá (2009), temos que

> A proposição do ensino de Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. Isso é evidenciado a partir da elaboração da mesma, até a sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante servirá de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção. Cabe, porém, ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso poderá ser decisivo no processo de aprendizagem do aluno (SÁ, 2009, p.18).

Para que o processo de ensino seja bem elaborado, consideramos importante ressaltar três aspectos:

1º. Aprendizagem: Todo processo de aprendizagem envolve conhecimento. Esse processo se dá a partir do momento que começamos a nos desenvolver de forma física, biológica, mental e emocional. A vida passa a ser um permanente ensaio de acertos e erros. Nesse contexto, a caminhada educativa envolve momentos de desequilíbrios, haja vista que novas informações vão sendo checadas a nível mental pelo educando, ou seja, o que se aprendeu ontem interage com o que se aprende hoje.

O desiquilíbrio é salutar, e deve ser visto como algo necessário para a aprendizagem. Envolve maturidade mental, tão importante para construção do conhecimento humano.

2º. Sala de aula: O padrão de desenvolvimento normal em um indivíduo começa a partir de seu nascimento. É no convívio familiar que a aprendizagem surge. O contato social é importantíssimo, mas é no espaço escolar que o estudo da realidade do mundo vai lhe servir de grandes provocações de conflitos interiores. A leitura e a escrita fundamentam o alicerce no curriculum sociocultural educativo da aprendizagem.

A troca de experiências, somadas ao meio ambiente dá o aporte tão necessário para que alunos e professores se integrem aos momentos em sala de aula.

3º. Conhecimento: O ser humano nasce com capacidade para aprender e externar esse conhecimento. Há uma necessidade muito grande de se adquirir conhecimento. O pensamento construtivo tem sede de se desenvolver e isso é muito dinâmico. As interações que se apresentam no dia a dia vão se juntando a outras experiências adquiridas em um processo permanente.

A partir dos três aspectos ressaltados anteriormente, segundo Sá (2009), temos cinco sugestões essenciais para elaboração das atividades de ensino, que servirão para a construção do conhecimento do aluno. Assim descritos:

- As atividades devem apresentar-se de maneira auto orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
- Toda atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;

- As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre alunos, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
- As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
- De acordo com o modelo proposto por Dockweiller (1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (apud SÁ, 2009, p.18).

5.2 O uso de jogos no ensino de matemática

Hoje em dia, podemos dizer que têm sido feitos inúmeros esforços, por partes dos docentes, estudiosos e instituições de pesquisa, para acompanhar e mesmo estar à frente de todas essas mudanças que vêm ocorrendo na relação professor-aluno, em sala de aula. O Ensino da Matemática está sendo visto com outros olhos. Vivemos um momento de reformulação nos currículos, de alteração de estratégias e, sobretudo, de utilização de metodologias e técnicas educativas.

Nessa concepção, o professor deve criar possibilidades de intervenção que visem à ampliação do conhecimento dos alunos. Por tanto, deve considerar que todo e qualquer material utilizado para o ensino é uma ferramenta que pode expandir a ação pedagógica. Neste sentido, o lúdico completa o processo educativo, com sua proposta de prazer, imaginação e aprendizado que favorece a participação durante as aulas.

Com isso, a inserção, em sala de aula, de atividades lúdicas que envolvam jogos desperta nos alunos o interesse tanto pelo tema como pelo material a ser utilizado. Eles são motivados a aprender Matemática, passando a lidar com símbolos e regras que com frequência são aplicadas no mundo social. Sendo importante como recurso didático que venha somar aos demais no avanço da aprendizagem Matemática, potencializando o desenvolvimento do discente.

Para estimular discursões, respeitando as diferentes opiniões e a capacidade de sintetizar conclusões, devemos sugerir atividades abertas, que, apesar de balizadas por algum aspecto do conteúdo matemático, não impõem uma única direção a seguir nem uma única porta final. Os jogos podem ser o "pontapé" para esse tipo de atividade, e cabem a nós sua escolha e proposição, além de atenção e condução do processo.

Para Cabral (2006),

> A busca da compreensão de regras, a tentativa de aproximação das ações adultas vividas no jogo estão em acordo com pressupostos teóricos construtivistas, que asseguram ser necessário a promoção de situações de ensino que permitam colocar o aluno diante de atividades que lhe possibilitem a utilização de conhecimentos prévios para a construção de outros mais elaborados. Por tratar-se de ação educativa, ao professor cabe organiza-la de uma maneira que estimule a auto estruturação do aluno, desta maneira, é que a atividade possibilitará tanto a formação do aluno como a do professor, que deve estar atento aos "erros" e "acertos" dos alunos, poderá buscar o aprimoramento do seu trabalho pedagógico (CABRAL, 2006, p.18).

Em um contexto escolar, os jogos em grupo colaboram para o desenvolvimento cognitivo, emocional e social. Entretanto, é preciso que o professor fique atento, realizando intervenções e garantindo que a atividade possa colaborar no desenvolvimento de seu raciocínio lógico e na construção da aprendizagem Matemática. Dessa forma, é necessária que a atividade esteja adequada a série e que seus objetivos sejam bem definidos.

Outro aspecto relevante na prática da utilização de jogos, na sala de aula durante as aulas de Matemática, é o desafio enfrentado pelos alunos, pois lhes possibilitam tomar decisões com base na análise e na reflexão sobre o problema proposto.

A lógica dos problemas matemáticos é por si só, desafiadora e intrigante. Por isso, é importante considerar que o aprendizado dos conceitos pode passar pela utilização dos jogos e desafios que estimulam os alunos e que propiciem a aplicação de conceitos auxiliando-o a exercitarem não só o aprendizado do conteúdo, mas também a tomada, por ele mesmo, de decisões e de estabelecimento de regras internas para a fluência do trabalho. Nada mau para uma atividade lúdica! Melhor ainda é pensar que, enquanto jogamos, raciocinamos com alegria.

Cabral (2006) nos diz:

> Penso que através de jogos, é possível desenvolvermos no aluno, além de habilidades matemáticas, a sua concentração, a sua curiosidade, a consciência de grupo, o coleguismo, o companheirismo, a sua autoconfiança e a sua autoestima. Para tanto, o jogo passa a ser visto como um agente cognitivo que auxilia o aluno a agir livremente sobre suas ações e decisões fazendo com que ele desenvolva além do conhecimento matemático também a linguagem, pois em muitos momentos será instigado a posicionar-se criticamente frente a alguma situação. Além disso, na sociedade em que vivemos, designados por alguns como a sociedade da informação ou a sociedade do conhecimento, novas habilidades passam a ser exigidas não só no mercado de trabalho como, também, na vida social dos cidadãos (CABRAL, 2006, p.20).

Hoje em dia, devemos procurar novas metodologias de ensino, utilizar recursos como vídeos, calculadoras, computadores e jogos. Não fazê-los pode significar incorporar a educação clássica, valorizando a aula expositiva, centrada no professor. O papel do discente torna-se, dessa forma, muito mais dinâmico que outrora, e também mais importante, uma vez que cabe a nós selecionar, ditar e acompanhar o uso correto de toda essa produção. Através dos jogos, pretendemos fortalecer o conhecimento aprendido através das resoluções das atividades, criando um ambiente favorável e descontraído dentro da sala de aula.

Em Carvalho (2009), foi dito que

> O uso de jogos como um recurso às aulas de matemática favorece um ambiente adequado para resolução de problemas, aplicação e exploração de conceitos matemático e/ou para aprofundamentos destes. Assim, torna-se relevante a prática de jogos nas aulas de matemática, pois esses propiciam momentos de desbloqueios dos estudantes que, normalmente, apresentam aversão a disciplina. (CARVALHO, 2009, p.31).

É importante que os jogos façam parte das atividades de ensino e aprendizagem. O recurso de jogos não constitui apenas diferente modo de ensinar e aprender mais propicia a interação entre os alunos. Ao planejar as práticas que envolverão esse recurso, é preciso refletir sobre algumas questões, como: O que é possível aprender com a atividade? Que conhecimento pode ser ampliado? O funcionamento da atividade está adequado com o conhecimento que será sistematizado?

5.3 Sequência didática

Este material pedagógico, destinado a turmas do ensino médio, foi elaborado com a preocupação de garantir não apenas a abordagem do conteúdo Análise Combinatória, mas também o desenvolvimento de um processo de ensino-aprendizagem onde haja a parceria de alunos e professores, estes como sujeitos mais experientes. Nessa perspectiva, procuramos organizar as atividades dos alunos para a busca do conhecimento, a partir do conhecido, contribuindo como mediador na preparação de planos para descoberta ou investigação de fatos.

As atividades propostas, em geral, podem ser feitas por diferentes caminhos. Espera-se que a exposição de opiniões e a apresentação de justificativas sejam parte integrante desse processo, além de instigar alunos e professores sobre os resultados alcançados.

Quadro 5.1 – Uma sequência de ensino de Análise Combinatória.

TEMA DA AULA	FORMAÇÃO DOS ALUNOS NA SALA	NÚMERO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA	TEMPO ESTIMADO PARA AULA	OBJETIVOS	JOGO UTILIZADO
PRINCIPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)	Grupos	8	90 Minutos	Introduzir o conceito do princípio fundamental da contagem	
EXERCÍCIOS	Grupos	20	90 Minutos	Desenvolver a habilidade de resolver problemas envolvendo o P.F.C.	
FATORIAL	Grupos	6	90 minutos	Introduzir o conceito de fatorial	PIF-PAF da Análise Combinatória
EXERCÍCIOS	Grupos	5	90 minutos	Desenvolver a habilidade de resolver exercícios envolvendo Fatorial.	
CÁLCULO DA PERMUTAÇÃO SIMPLES	Grupos	5	90 Minutos	Introduzir o conceito de permutação e a noção de fatorial	Carta da Combinatória
EXERCÍCIOS	Grupos	16	90 Minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas envolvendo a permutação simples	
INTRODUZIR A DIFERENÇA ENTRE ARRANJO E COMBINAÇÃO	Grupos	6	90 Minutos	Introduzir o conceito de arranjo e combinação; fazer o aluno perceber a diferença entre arranjo e combinação e apresentar a representação $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$	Dominö combinatório
CÁLCULO DE ARRANJO SIMPLES	Grupos	6	90 Minutos	Fazer o aluno perceber que $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$	
EXERCÍCIOS	Grupos	20	90 Minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas de Arranjo simples	
CÁLCULO DE COMBINAÇÃO SIMPLES	Grupos	6	90 Minutos	Fazer o aluno perceber que $C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$	Dominö combinatório
EXERCÍCIOS	Grupos	20	90 Minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas que envolvam a Combinação simples	
CÁLCULO DA PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO	Grupos	6	90 Minutos	Fazer o aluno perceber que $P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}$	
EXERCÍCIOS	Grupos	14	90 minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas que envolvam a permutação com repetição.	

Fonte: (Adaptada de Pinheiro, 2008, p.65)

A seguir apresentaremos as atividades e nossas orientações em relação a cada uma delas. O preenchimento das tabelas nas atividades é de fundamental importância para o entendimento e verificação dos padrões (fórmulas) que serão verificados, facilitam a construção das conclusões e de modo geral dos conhecimentos aprendidos pelos alunos.

5.3.1 Atividade 1 de ensino

ATIVIDADE 1

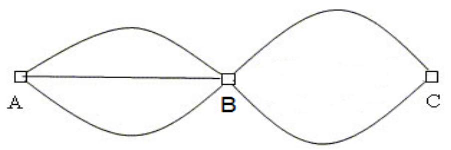
Título: Princípio Fundamental da contagem
Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de contagem.
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões
Procedimento:
• Leia atentamente cada questão da lista de questões;
• Resolva cada questão de lista;
• Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Um estudante possui 2 blusas diferentes da escola (Branca e Preta) e 2 calças distintas (Jeans e Preta). De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para ir à escola?
RESOLUÇÃO:

02. Para montar seu sanduiche na cantina da escola, Creuza precisa escolher somente um pão e somente um recheio, entre dois tipos de pães (careca ou de forma) e quatro tipos de recheios (queijo, carne, presunto ou salsicha). Quantos tipos de sanduíches Creuza pode montar?
RESOLUÇÃO:

03. Três cidades A, B e C são ligadas por estradas e rios. Uma estrada e dois rios ligam A e B. Dois rios ligam as cidades B e C. Não há estradas ou rios ligando A e C diretamente. De quantos modos diferentes pode-se viajar de A até C, passando por B?
RESOLUÇÃO:



04. No lançamento de duas moedas idênticas, quantos são os resultados possíveis? Lembre-se que os resultados em uma moeda podem ser Cara (C) ou Coroa (K).
RESOLUÇÃO:

05. Creuza irá para um aniversário de 15 anos onde o Buffet (jantar) será servido em três etapas: **entrada, prato principal e sobremesa**. De quantas maneiras distintas ela poderá compor o seu jantar (uma entrada, um prato principal e uma sobremesa), se há como opções 3 entradas, 2 pratos principais e 2 sobremesa?
RESOLUÇÃO:

06. Uma das parte de um teste psicotécnico é constituído por 3 questões do tipo "verdadeiro ou falso". Qual é o número total de gabaritos que podem ser marcados, nessas três questões?
RESOLUÇÃO:

07. Uma senha eletrônica é constituída de uma vogal (**a, e, i, o** ou **u**) no primeiro dígito e um algarismo ímpar (**1, 2, 3, 4** ou **5**) no segundo dígito. Qual o número total de senhas que podem ser formadas?
RESOLUÇÃO:

Quadro 5.2 - Quadro a ser preenchido na Atividade 1

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª						
2ª						
3ª						
4ª						
5ª						
6ª						
7ª						

Descubra uma maneira prática para obter os resultados.

Conclusão:

Orientações didáticas

Na Atividade 1, separe a turma em grupos de preferência com quatro alunos, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas e a partir delas preencham o Quadro 5.2, para que percebam uma relação entre o número de possibilidades em cada etapa e o total de possibilidades de se realizar o evento, chegando a uma conclusão geral de como se resolver os problemas do P.F.C. de uma maneira prática, sem ter que dispor de todas as possibilidades.

As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Como resolver as questões? Oriente, de modo geral e nos grupos, que uma das maneiras de resolução é montar as possibilidades. Listando-as ou através da árvore de possibilidades. E a partir daí, segue-se para o preenchimento do Quadro 5.2.

2º) Ao preenchimento do Quadro 5.2.

Os alunos podem querer saber o que significa as palavras evento, etapa e a expressão “evento independente”. Explique cada uma delas e isso será de fundamental importância para o desenvolvimento de todas as outras atividades. Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a da figura 5.1.

Figura 5.1 - Quadro preenchido da atividade 1.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	Quantas maneiras ele pode se vestir	2	2	2	X	$2 \times 2 = 4$
2ª	Quantos tipos de sanduiches ela pode montar	2	2	4	X	$2 \times 4 = 8$
3ª	Quantos modos diferentes pode-se viajar de A a C passando por B	2	3	2	X	$3 \times 2 = 6$
4ª	Quantos resultados são possíveis sendo cara ou coroa.	2	2	2	X	$2 \times 2 = 4$
5ª	Opções diferentes de jantar	3	3	2	2	$3 \times 2 \times 2 = 12$
6ª	O número total de gabaritos	3	2	2	2	$2 \times 2 \times 2 = 8$
7ª	Qual o número total de senhas que podem ser formados	2	5	3	X	$5 \times 3 = 15$

Fonte: Pesquisa de campo, 2018.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O P.F.C.

01. Em um concurso realizado numa universidade, apresentaram-se 4 candidatos para disputar a única vaga existente. A banca examinadora é constituída de 3 membros, devendo cada examinador escolher um candidato. De quantas maneiras diferentes podem ser dados os votos desses examinadores?

RESOLUÇÃO:

02. Ao chegar a frente de um prédio, uma pessoa observa que existem 3 portas de entrada que dão para um amplo hall onde existem dois elevadores. Se para visitar alguém que mora no 8º andar, esta pessoa precisa se utilizar das portas e dos elevadores, de quantas maneiras diferentes ela pode atingir o 8º andar e retornar ao ponto inicial, sem utilizar o mesmo elevador nem a mesma porta de entrada/saída duas vezes?

RESOLUÇÃO:

03. Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor. O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é

a) 64
b) 24
c) 12
d) 4

04. O grupo de estudantes Ana, Beto, Caio, Deise, Ester, Fábio e Gabriela foi assistir a uma palestra no auditório da Fatec-São Paulo e ocupou os lugares de uma fileira com exatamente sete cadeiras, de modo que cada um dos rapazes sentou-se entre duas moças do grupo.

- Na situação descrita, o número de modos distintos que esse grupo poderia ocupar esses sete lugares é

a) 144.
b) 360.
c) 720.
d) 1 240.
e) 2 520.

05. O setor de terapia intensiva de um hospital conta com 12 enfermeiros, 20 técnicos em enfermagem e 6 médicos, que se revezam em turnos de trabalho. Em cada turno devem trabalhar 5 enfermeiros, 10 técnicos em enfermagem e 3 médicos. A tabela a seguir indica alguns dos funcionários que deverão trabalhar no turno da terapia intensiva desse hospital no sábado.

Enfermeiros	Paulo, Rita, Marina, Cláudia.
Técnicos em enfermagem	Maria, Celina, Alberto, Luís, Laura, Moisés, Telma, Cristina, Caio.
Médicos	Eunice, Sérgio

- O número de possibilidades distintas para completar a equipe de trabalho desse turno de sábado é igual a

RESOLUÇÃO:

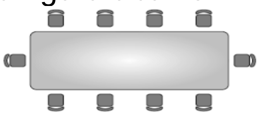
06. pa.lin.dro.mo*: adj+sm* (*pálin+dromo*) Diz-se de verso ou frase que tem o mesmo sentido da esquerda para a direita ou ao contrario.
Disponível em: http://michaelis.uol.com.br.
Acesso em: 13 nov. 2013 (adaptado).

Naturalmente, o conceito pode ser estendido para números inteiros: um número inteiro é palíndromo se ele é o mesmo lido da esquerda para a direita ou ao contrário. Por exemplo, 212 353 212 é palíndromo.

- Quantos são os números palíndromos de cinco algarismos que possuem três algarismos distintos?

a) 648
b) 720
c) 900
d) 27 216
e) 52 488

07. Na sala de reuniões de certa empresa há uma mesa retangular com 10 poltronas dispostas da forma como é mostrado na figura abaixo.

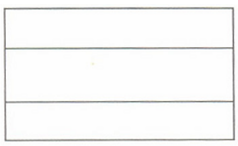


Certo dia, sete pessoas foram convocadas para participar de uma reunião a ser realizada nessa sala: o presidente, o vice-presidente, um secretário e quatro membros da diretoria. Sabe-se que:

- o presidente e o vice-presidente deverão ocupar exclusivamente as poltronas das cabeceiras da mesa;
- o secretário deverá ocupar uma poltrona ao lado do presidente.

- Considerando que tais poltronas são fixas no piso da sala, de quantos modos as sete pessoas podem nelas se acomodar para participar de tal reunião?
a) 3360
b) 2480
c) 1680
d) 1240
e) 840

08. Observe a figura. Nessa figura está representada uma bandeira que deve ser pintada com duas cores diferentes, de modo que a faixa do meio tenha cor diferente das outras duas faixas. O número de maneiras distintas de pintar a bandeira desse modo, utilizando as cores azul, preta, vermelha, amarela, verde e branca é:

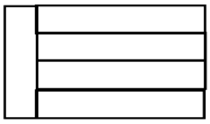


a) 15
b) 30
c) 45
d) 60

09. Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?
RESOLUÇÃO:
10. Atual tendência alimentar baseada no maior consumo de legumes, verduras e frutas impulsiona o mercado de produtos naturais e frescos sem agrotóxicos e uma diminuição no consumo de produtos que levam glúten, lactose e açúcar. Uma empresa especializada no preparo de refeições, visando a esse novo mercado de consumidores, disponibiliza aos seus clientes uma “quentinha executiva” que pode ser entregue no local de trabalho na hora do almoço. O cliente pode compor o seu almoço escolhendo entradas, pratos principais e sobremesas. Se essa empresa oferece 8 tipos de entradas, 10 tipos de pratos principais e 5 tipos de sobremesas, o número de possiblidades com que um cliente pode compor seu almoço, escolhendo, dentre os tipos ofertados, uma entrada, um prato principal e uma sobremesa é
RESOLUÇÃO:

11. Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em quatro paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede, é:
a) 24
b) 30
c) 120
d) 360
e) 400

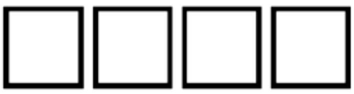
12. A figura abaixo mostra uma bandeira com cinco faixas. A proposta é pintar cada faixa dessa bandeira com uma cor, de modo que duas faixas com uma linha fronteira comum não poderão ter a mesma cor. Se dispusermos de 4 cores diferentes, o número de modos distintos de que essa bandeira poderá ser pintada será



a) 24.
b) 36.
c) 96.
d) 72.

13. O código de abertura de um cofre é formado por seis dígitos (que podem se repetir, e o código pode começar com o dígito 0). Quantos são os códigos de abertura com pelo menos um dígito 7?
a) 468.559
b) 468.595
c) 486.595
d) 645.985
e) 855.964

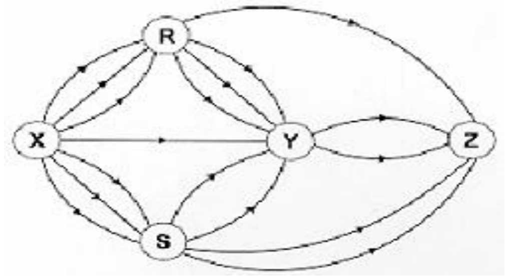
14. Um jovem descobriu que o aplicativo de seu celular edita fotos, possibilitando diversas formas de composição, dentre elas, aplicar texturas, aplicar molduras e mudar a cor da foto. Considerando que esse aplicativo dispõe de 5 modelos de texturas, 6 tipos de molduras e 4 possibilidades de mudar a cor da foto, o número de maneiras que esse jovem pode fazer uma composição com 4 fotos distintas, utilizando apenas os recursos citados, para publicá-las nas redes sociais, conforme ilustração abaixo, é



a) 24×120^4
b) 120^4
c) 24×120
d) 4×120
e) 120

15. Se os produtos de uma empresa, para fins de informatização, são codificados com números de três algarismos, inclusive começando com zero, então o número de produtos, que poderão ser codificados, será calculado por
A) 9^3
B) 9.8.7
C) 10.9.8
D) 10.4.3
E) 10^3

16. Observe o diagrama. O número de ligações distintas entre X e Z é:



a) 39
b) 41
c) 35
d) 45

17. O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.
Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

- O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há
a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

RESOLUÇÃO:

18. O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho), Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

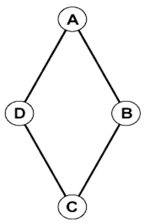
Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br.
Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado)

- De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?
a) 14
b) 18
c) 20
d) 21
e) 23

19. O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.
- Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

a) 24.
b) 31.
c) 32.
d) 88.
e) 89.

20. Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.
Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.
A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



- Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?
a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 36

5.3.2 Atividade 2 de ensino

ATIVIDADE 2

Título: Fatorial
Objetivo: Conceituar fatorial
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões
Procedimento:
• Leia atentamente cada questão da lista de questões;
• Resolva cada questão de lista;
• Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Estão indo à fila do caixa, da lanchonete de uma escola, cinco alunos. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?
RESOLUÇÃO:

02. Utilizando-se dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantas senhas podemos formar com seis dígitos distintos?
RESOLUÇÃO:

03. Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer “palavra” (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Quantos são os anagramas da palavra **FUTEBOL**?
RESOLUÇÃO:

04. Uma competição de natação é realizada com oito atletas. De quantas maneiras diferentes podemos obter os oito primeiros colocados?
RESOLUÇÃO:

05. Nove amigos resolveram se posicionar, para bater uma foto e postar nas redes sociais. De quantas maneiras diferentes, esses jovens poderão se posicionar, um ao lado do outro, para a foto?
RESOLUÇÃO:

06. De quantas maneiras podemos organizar Dez dvd’s diferentes em uma prateleira?
RESOLUÇÃO:

Quadro 5.3 - Quadro a ser preenchido na Atividade 2

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da										Cálculo necessário para se obter o resultado
			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?	6ª etapa?	7ª etapa?	8ª etapa?	9ª etapa?	10ª etapa?	
1ª													
2ª													
3ª													
4ª													
5ª													
6ª													

No estudo de problemas de análise combinatória, frequentemente nos deparamos com produtos em que os termos são números naturais consecutivos e positivos. Para facilitar a representação de alguns desses produtos, foi criada a notação fatorial.

O produto 5.4.3.2.1 é denominado de fatorial de 5.
A expressão fatorial de 5 é representada por 5!

CONCLUSÃO:

Orientações didáticas

Na Atividade 2, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que o procedimento será parecido com o da Atividade 1, onde a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 5.3, para que percebam uma característica no cálculo necessário para se obter os resultados e dessas informações deixadas abaixo do Quadro 5.3, cheguem a uma conclusão geral do que seria o fatorial de um número natural “n”.

Pela nossa experiência poucas dúvidas devem acontecer nas resoluções das questões e preenchimento do Quadro 5.3. As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Talvez algum grupo queira tentar montar as possibilidades. Caso isso aconteça, peça que se lembrem do que foi aprendido na atividade anterior.

2º) Ao preenchimento do quadro 5.3.

Os alunos podem querer saber, ainda, o que significa as palavras evento, etapa e a expressão “evento independente”, explique cada uma delas novamente, isso será de fundamental importância para o desenvolvimento da atividade. Fique atento para o preenchimento da última coluna, lá deve constar o cálculo necessário para se obter o resultado e não o total de possibilidades. Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida como a Figura 5.2.

Figura 5.2 - Quadro preenchido da atividade 2

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da										Cálculo necessário para se obter o resultado
			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?	6ª etapa?	7ª etapa?	8ª etapa?	9ª etapa?	10ª etapa?	
1ª	5	5	5	4	3	2	1	X	X	X	X	X	5×4×3×2×1 = 120= 5!
2ª	6	6	6	5	4	3	2	1	X	X	X	X	6×5×4×3×2×1 = 720= 6!
3ª	7	7	7	6	5	4	3	2	1	X	X	X	7×6×5×4×3×2×1 = 5040= 7!
4ª	8	8	8	7	6	5	4	3	2	1	X	X	8×7×6×5×4×3×2×1 = 40320= 8!
5ª	9	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	X	9×8×7×6×5×4×3×2×1 = 362880= 9!
6ª	10	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10×9×8×7×6×5×4×3×2×1 = 3628800= 10!

Fonte: Pesquisa de campo, 2018.

Questão

1) Represente cada produto a seguir na forma de fatorial .

a) $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$

b) $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$

c) $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$

d) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 =$

2) Escreva na forma de produto (multiplicação) os seguintes fatoriais

a) $2! =$

b) $3! =$

c) $4! =$

d) $5! =$

3) Calcule o que se pede a seguir.

a) $\frac{5!}{3!} =$

b) $\frac{9!}{8!} =$

c) $\frac{10!}{(12-4)!} =$

d) $\frac{12!}{8!(12-8)!} =$

e) $2! + 3! =$

f) $2! \times 3! =$

g) $4! - 3! =$

h) $(3!)^2 =$

4) Represente cada produto na forma de quociente (divisão) entre fatoriais.

a) $5 \times 4 \times 3 =$

b) $6 \times 5 \times 4 =$

c) $7 \times 6 =$

d) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 =$

e) $8 \times 7 \times 6 =$

f) $10 \times 9 \times 8 =$

g) $12 \times 11 =$

h) $3 \times 2 =$

5) Colocando os símbolos de **( )**, **+** e/ou **!**, transforme a sentença em verdadeira.

a) $1 \quad 1 \quad 1 = 6$

b) $2 \quad 2 = 24$

5.3.3 Atividade 3 de ensino

ATIVIDADE 3

Título: Permutação Simples
Objetivo: conceituar permutação simples
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões
Procedimento:

- Leia atentamente cada questão da lista de questões;
- Resolva cada questão de lista;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Deseja-se confeccionar uma bandeira, com 3 faixas horizontais, dispondo de 3 cores (Azul, Branca e Vermelha), sem que haja repetição de cor. De quantas maneiras isto é possível?
RESOLUÇÃO:

02. Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer "palavra" (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Um torcedor fanático, ao homenagear o filho, deu o nome do garoto de OMER, fazendo apenas a inversão das letras da palavra REMO. Porém, com essas letras, qual é o total de anagramas que poderiam ser formados?
RESOLUÇÃO:

03. Um colégio resolve fazer uma programação de Cinema, de Segunda a Sexta. Para isso, os organizadores escolhem cinco filmes (Aventura, Comédia, Ficção, Romance e Terror), que serão exibidos um por dia, sem repetição.
- Nesse caso, qual é o número de maneiras DIFERENTES de se fazer a programação nesses dias?
RESOLUÇÃO:

04. Seis amigos (**A**imê, **B**arbara, **J**ean, **L**éo, **P**aulo e **R**enato) resolveram passear pela orla de Belém, alugando uma bicicleta de 6 lugares.
- De quantas maneiras diferentes, os 6 amigos (**A**imê, **B**arbara, **J**ean, **L**éo, **P**aulo e **R**enato) podem se sentar, na bicicleta, para dar uma passeio?
RESOLUÇÃO:

05. Quantas senhas são possíveis formar, de sete dígitos, com as letras da palavra ENIGMAS?
RESOLUÇÃO:

Quadro 6.60 - Quadro a ser preenchido na Atividade 3

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento?	Qual nº "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual é o número de possibilidades da							Qual o total de possibilidades?	Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado?
				Sim	Não	1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?	6ª etapa?	7ª etapa?		
1ª														
2ª														
3ª														
4ª														
5ª														

Conclusão:

Orientações didáticas

Na Atividade 3, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 5.4, para que percebam uma característica no cálculo necessário para se obter os resultados e dessas informações cheguem a uma conclusão geral do que seria a Permutação Simples de "n" elementos.

Pela nossa experiência poucas dúvidas devem acontecer nas resoluções das questões e preenchimento do Quadro 5.4. As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Como o raciocínio das questões e parecido com os das atividades anteriores, os grupos podem não ter dificuldades, possivelmente já estarão habituados em resolvê-las.

2º) Ao preenchimento do quadro 5.4.

Os grupos podem querer saber, o que significa as expressões etapas "n", número "p" de elementos e a agrupamento, querendo informações do que fazer na coluna relacionada a essa palavra. Explique cada uma delas, isso será de fundamental importância para o desenvolvimento da atividade. Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a Figura a seguir.

Figura 5.3 - Quadro preenchido da atividade 3.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas "n" (escolhas para realizar o evento) independentes no evento?	Qual o número "p" de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual é o número de possibilidades da							Qual o total de possibilidades?	Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado?
				Sim	Não	1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?	6ª etapa?	7ª etapa?		
1ª	Quantas maneiras se poderá pintar a bandeira	3	3	X		3	2	1	X	X	X	X	3	$3 \times 2 \times 1 = 6 = 3!$
2ª	O total de anagramas da palavra REMO	4	4	X		4	3	2	1	X	X	X	4	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 = 4!$
3ª	O número de maneiras que pode se programar os dias	5	5	X		5	4	3	2	1	X	X	5	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 = 5!$
4ª	Quantas maneiras 6 amigos poderiam sentar na bicicleta	6	6	X		6	5	4	3	2	1	X	6	$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 = 6!$
5ª	Quantas senhas são possíveis formar a partir de 7 digitos.	7	7	X		7	6	5	4	3	2	1	7	$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 = 7!$

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA PERMUTAÇÃO SIMPLES

01. A partir da palavra NÚMEROS (o acento sempre acompanhará a letra u), responda:
a) Quantos anagramas são possíveis de serem formados?
b) Quantos anagramas têm como primeira letra uma vogal?
c) Quantos anagramas começam e terminam em vogal?
d) Quantos anagramas começam com n?
e) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n e u juntas e nessa ordem?
f) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras u e n juntas?
g) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m junta-se nessa ordem?
h) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m juntas?

02. O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:
a) 24 b) 48
c) 96 d)120
e)144

03. Quatro jogadores saíram de Manaus para um campeonato em Porto Alegre, num carro de 4 lugares. Dividiram o trajeto em 4 partes e aceitaram que cada um dirigiria uma vez. Combinaram também que, toda vez que houvesse mudança de motorista, todos deveriam trocar de lugar. O número de arrumações possíveis dos 4 jogadores, durante toda a viagem, é:
a) 4 b) 8
c) 12 d) 24
e) 162

04. Seis pessoas em fila gastam 10 segundos para mudarem de ordem. O tempo necessário para todas as mudanças possíveis é:
a) 4h b) 2h
c) 3h d) 5h
e) 6h

05. De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?
a) 6 b) 12
c) 48 d) 18

06. Arranjam-se os dígitos 1, 2, 3 e 4 de todos os modos possíveis, formando-se 24 números de 4 dígitos distintos. Listam-se, em ordem crescente, os 24 números formados.
- Nessa lista, o número 3.241 ocupa a
a) 14ª posição. b) 13ª posição.
c) 16ª posição. d) 15ª posição.

07. Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é
a) 9.(9!) b) 8.(9!)
c) 8.(8!) d) $\frac{10!}{2}$
e) $\frac{10!}{4}$

08. Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas vermelhas e cinco vestem camisas verdes.
Deseja-se formar uma fila com essas pessoas de forma que as três primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as seguintes mantenham a sequência de cores dada pelas três primeiras.
- Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode fazer tal fila?
a) $3(5!)^3$ b) $(5!)^3$
c) $(5!)^3(3!)$ d) $\frac{15!}{3!5!}$

09. O número de anagramas da palavra BRASIL em que as vogais ficam lado a lado, e as consoantes também, é
a) 24 b) 48

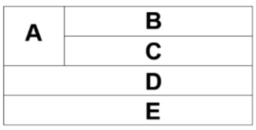
c) 96 d) 240
e) 720

10. Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais, Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é
a) 288 b) 296
c) 864 d) 1728

11. Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar uma tirar a foto?
a) 24 b) 96
c) 720 d) 48
e) 120

12. Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em quatro paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede, é:
a) 24 b) 30
c) 120 d) 360
e) 400

13. A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.



Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor. O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é
a) $2! \times 2!$ b) $3! \times 2!$
c) $3! \times 3$ d) $3! \times 2^2$
e) 3×2^4

14. Um cliente de uma vídeo-locadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a vídeo-locadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.
De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?
a) $20 \times 8! + (3!)^2$ b) $8! \times 5! \times 3!$
c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$ d) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$
e) $\frac{16!}{2^8}$

15. Ao permutarmos, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, obtemos números de seis dígitos diferentes. Ordenando estes números, em ordem crescente, o número que ocupa a 239ª posição é
a) 265431. b) 265413.
c) 265314. d) 264531.

16. As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é
a) PROVA. b) VAPOR.
c) RAPOV. d) ROVAP.
e) RAOPV

5.3.4 Atividade 4 de ensino

ATIVIDADE 4

Título: Diferença entre Arranjo e Combinação
Objetivo: Descobrir uma maneira prática de diferenciar arranjo simples de combinação **simples.**
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões
Procedimento:
Leia atentamente cada questão da lista de questões;
Resolva cada questão de lista;
Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Três amigos marcaram de se encontrar às 17 horas, na biblioteca da escola onde estudam, para realizar um trabalho de matemática. Chegando no local marcado, cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez. Quantos apertos de mãos foram dados?
RESOLUÇÃO:

02. Em um colégio, 4 alunas se candidataram a “miss” dos jogos. Sabendo-se que a 1ª e 2ª colocadas mais votadas, receberão os títulos de Rainha e princesa dos jogos, respectivamente. Quantas são as possibilidades de escolha dessas duas garotas?
RESOLUÇÃO:

03 Quatro funcionários de uma empresa devem ser divididos em duplas, para a realização de algumas tarefas. De quantas maneiras isso poderá ser feito?
RESOLUÇÃO:

04. Creuza deseja pintar as unhas e para isso possui 5 cores distintas de esmalte, de quantas maneiras diferentes Creuza poderá escolher dois esmaltes, entre os que possui?
RESOLUÇÃO:

05. Uma escola tem sete professores de matemática. Três deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de três professores são possíveis formar?
RESOLUÇÃO:

06. Em um torneio internacional de natação participaram oito atletas. De quantos modos distintos poderão ser distribuídas uma medalhas de ouro, uma de prata e outro de bronze entre os atletas?
RESOLUÇÃO:

Quadro 5.5 - Quadro a ser preenchido na Atividade 4

Questão	O que a questão pedia?	A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento?		Justificativa
		Sim	Não	
1ª				
2ª				
3ª				
4ª				
5ª				
6ª				

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento não altera o agrupamento a questão é um exemplo de combinação dos elementos.

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento altera o agrupamento a questão é um exemplo de **arranjo dos elementos.**

Quais das questões apresentadas são de arranjo? Quais das questões apresentadas são de combinação?

Simbolicamente a combinação de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representada por:: $C_{5,2}$ ou C_2^5

Simbolicamente o arranjo de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representado por:: $A_{5,2}$ ou A_2^5

Represente as seis questões na forma simbólica.

Orientações didáticas

Na Atividade 4, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 5.5, para que percebam quando a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento e dessas informações cheguem a uma justificativa revelando se a questão é de Arranjo Simples ou Combinação Simples. Após a conclusão do Quadro 5.5, os alunos deverão ler e responder algumas informações deixadas que definam quando uma questão é de Arranjo Simples ou Combinação Simples e suas respectivas representações. As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões

Atenção para as resoluções, os grupos podem estar habituados a resolver as questões pelo P.F.C., com isso poderá ocorrer erros nas questões de Combinação Simples. Oriente, de modo geral e nos grupos, que montem as possibilidades e comparem com as resoluções feitas pelo P.F.C., perguntando em cada agrupamento formado, se a troca de elementos de posição altera o agrupamento.

2º) Ao preenchimento do Quadro 5.5

Os grupos podem querer saber o que colocar nas justificativas, oriente-os a escrever porque a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento. Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a Figura a seguir.

Figura 5.4 - Quadro preenchido da atividade 4.

Questão	O que a questão pedia?	A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento?		Justificativa
		Sim	Não	
1ª	Quantidades de apertos		X	A ordem dos apertos não influencia no resultado
2ª	Quantas são as possibilidades de escolha de duas garotas	X		A orden de quem ganha influencia no resultado
3ª	Quantas maneiras poderá se formar uma dupla		X	A ordem das duplas não influencia no resultado
4ª	Quantas maneiras diferentes poderá escolher dois esmaltes		X	A ordem dos esmaltes não altera
5ª	Quantos professores poderão representar	X		A ordem dos professores altera
6ª	Quantas maneiras poderão ser distribuidas as medalhas	X		A ordem das pessoas que irão ganhar altera

5.3.5 Atividade 5 de ensino

ATIVIDADE 5

Título: Arranjo Simples
Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de Arranjo.
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões
Procedimento:
• Leia atentamente cada questão da lista de questões;
• Resolva cada questão de lista;
• Com as informações obtidas preencha o quadro 3.

QUESTÕES

01. Um torneio de futsal será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, Itália, Espanha, Paraguai e Argentina. De quantas maneiras distintas o pódio (três primeiros colocados) poderá ser formado?
RESOLUÇÃO:

02. As finalistas do concurso Miss Universo, são Miss Brasil, Miss Japão, Miss Venezuela, Miss Itália e Miss França. De quantas formas os juízes poderão escolher a primeira e a segunda colocada neste concurso?
RESOLUÇÃO:

03. A senha de um celular é configurada por um teclado numérico, conforme ilustrado na figura.

TECLADO NUMÉRICO

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**
	0	

- Um professor que nasceu em **03/1978**, deseja criar uma senha com apenas três algarismos distintos (diferentes), dentre os que compõem o mês e ano de seu nascimento. Quantas senhas o professor poderia criar a sua disposição?
RESOLUÇÃO:

04. Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em duas paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede?
RESOLUÇÃO:

05. Maria deve criar uma senha de apenas 4 dígitos (algarismos) para sua conta bancária, somente com os algarismos 2, 4, 1, 9, 8 e 7 por representarem o dia e o ano de seu nascimento na ordem que aparecem e um mesmo algarismo não pode aparecer mais de uma vez (não pode haver repetição). De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?
RESOLUÇÃO:

06. Uma escola tem quatro professores de matemática. Para participar de um projeto, devem ser indicados um professor chefe e um professor assistente.
- Com base nessa informação, de quantas maneiras distintas esses dois professores podem ser escolhidos?
RESOLUÇÃO:

Quadro 5.6 - Quadro a ser preenchido na Atividade 5

Questão	Qual nº **"n"** de elementos a disposição do evento da situação?	Qual o nº **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual é o número de possibilidades da				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial	Expresse o resultado em função dos valores **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?				
1ª												
2ª												
3ª												
4ª												
5ª												
6ª												

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO:

Orientações didáticas

Na Atividade 5, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 5.6, para que se chegue a fórmula geral de Arranjo Simples.

As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Como o raciocínio das questões e parecido com os das atividades um, dois e três, os grupos podem não ter dificuldades, possivelmente já estarão habituados em resolvê-las. Mas oriente que verifiquem se a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento, afinal eles precisarão para preencher o Quadro 5.6.

2º) Ao preenchimento do quadro 5.6.

Os grupos poderão ter dúvidas nas duas últimas colunas do Quadro 5.6. Faça com que eles completem essas colunas e consequentemente chegue à fórmula, realizando a seguinte postura para orientá-los.

- Preenchimento da antepenúltima coluna:

1ª – Pergunte para os grupos, o que falta para o resultado na antepenúltima coluna virar um número fatorial;

2º - Após completarem o resultado, transformando-o em um número fatorial, pergunte o que eles fariam para corrigir aquela multiplicação que eles tinham feito em excesso, alterando o resultado (Neste momento, lembre-os da 4ª questão realizada na atividade 2, na lista de questões sobre fatorial).

- Preenchimento da última coluna:

1º - Peça para que os grupos identifiquem quem era o “n” e o “p” em cada questão;

2º - Solicite que eles identificassem se no resultado, já estam aparecendo os valores de “n” e/ou “p”;

3º - Peça aos grupos para verificarem no resultado que, aonde não estiver em função de “n” e/ou “p”, o que eles poderiam fazer para colocá-los, sem alterar o resultado.

Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a Figura a seguir.

Figura 5.5 - Quadro preenchido da atividade 5.

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento da situação?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual é o número de possibilidades da				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial	Expresse o resultado em função dos valores **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?				
1ª	5	3	X		5	4	3	X	60	5x4x3	$\frac{5x4x3x2x1}{2x1} = \frac{5!}{2!}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$
2ª	5	4	X		5	4	X	x	20	5x4	$\frac{5x4x3x2x1}{3x2x1} = \frac{5!}{3!}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$
3ª	6	3	X		6	5	4	X	120	6x5x4	$\frac{6x5x4x3x2x1}{2x1} = \frac{6!}{3!}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$
4ª	6	2	X		6	5	x	X	30	6x5	$\frac{6x5x4x3x2x1}{4x3x2x1} = \frac{6!}{4!}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$
5ª	6	4	X		6	5	4	3	360	6x5x4x3	$\frac{6x5x4x3x2x1}{2x1} = \frac{6!}{2!}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$
6ª	4	2	X		4	3	x	X	12	4x3	$\frac{4x3x2x1}{2x1} = \frac{4!}{2!}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O ARRANJO SIMPLES

01. Visando obter mais informações sobre a denúncia de que uma tribo da região Amazônica estava sendo dizimada, um repórter recorreu a seu computador para acessar a Internet, entretanto não lembrou a senha de acesso, que era composta por três algarismos. Lembrava apenas que a senha era composta por três dos cinco algarismos: 1, 3, 5, 6 e 9. Para encontrar a senha, o repórter escreveu num papel todos os possíveis agrupamentos com esses algarismos. O número de agrupamentos escritos por esse repórter, na tentativa de encontrar a senha de acesso à Internet, é:

a) 120 b) 108 c) 84
d) 60 e) 56

02. Dez pontos são marcados num plano de modo que não existem 3 pontos colineares. O número máximo de quadriláteros que podemos construir utilizando esses pontos é:
a) 120 b) 210 c) 720
d) 2.100 e) 5.040

03. Pode-se permutar **m** objetos de 24 maneiras diferentes. Suponha que se pretenda arranjar esses **m** objetos dois a dois. Nesse caso, de quantas maneiras diferentes esses **m** objetos poderão ser arranjados?

a) 10 b) 12
c) 14 d) 16

04. Considere os números inteiros maiores que 64000 que possuem 5 algarismos, todos distintos, e que não contém os dígitos 3 e 8. A quantidade desses números é:
a) 2 160 b) 1 320
c) 1 440 d) 2 280

05. Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países , as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo : 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Argentina ; 3º lugar, Colômbia). Se , em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69 b) 2.024 c) 9562
d) 12.144 e) 13.824

06. Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

- Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria

a) inferior ao dobro.
b) superior ao dobro e inferior ao triplo.
c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.
d) superior ao quádruplo e inferior ao quíntuplo.
e) mais que o quíntuplo.

07. Uma loja de um shopping Center na cidade de Manaus divulga inscrições para um torneio de Games. Para realizar essas inscrições, a loja gerou um código de inscrição com uma sequência de quatro dígitos distintos, sendo o primeiro elemento da sequência diferente de zero. A quantidade de códigos de inscrição que podem ser gerados utilizando os elementos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} é

a) 4.500 b) 4.536 c) 4.684
d) 4.693 e) 5.000

08. Os clientes de um banco, ao utilizarem seus cartões nos caixas eletrônicos, digitavam uma senha numérica composta por cinco algarismos. Com o intuito de melhorar a segurança da utilização desses cartões, o banco solicitou a seus clientes que cadastrassem senhas numéricas com seis algarismos.

- Se a segurança for definida pela quantidade de possíveis senhas, em quanto aumentou percentualmente a segurança na utilização dos cartões?

a) 10% b) 90% c) 100%
d) 900% e) 1900%

09. Usando-se apenas as letras A, B, C e D e os algarismos do sistema decimal de numeração, o número de placas de automóveis usadas no Brasil (exemplo: BBA 0557) possíveis de serem formadas é no máximo igual a

a) 120000 b) 240000 c) 360000

d) 480000 e) 640000

10. A Série Arte e Matemática na escola, que será apresentada pela TV ESCOLA, no Programa Salto para o Futuro, é constituída por cinco programas que pretendem oferecer um espaço de reflexão, interação e discussão sobre as múltiplas relações matemáticas existentes nas diversas linguagens.

(Fonte:www.tvebrasil.com.br/SALTO/boletins2002/ame/ameimp.htm

Considere que os programas acima sejam exibidos em três turnos: o primeiro pela manhã, o segundo pela tarde, e o terceiro pela noite. Então, o número de maneiras distintas que a sequência de programas pode ser exibida é:

a) 10 b) 30 c) 60
d) 80 e) 120

11 - Para se cadastrar em um site de compras, cada cliente digitava uma senha com quatro algarismos. Com o objetivo de aumentar a segurança, todos os clientes foram solicitados a adotar novas senhas com cinco algarismos. Se definirmos o nível de segurança com a quantidade possível de senhas, então a segurança nesse site aumentou em

a) 10% b) 25% c) 125%
d) 900% e) 1.100%

12 - Duas amigas foram a uma loja comprar guarda-chuvas. Na loja, havia apenas 5 guarda-chuvas do modelo desejado, cada um de uma cor diferente. Considerando que cada uma comprará apenas um guarda-chuva, o número de maneiras diferentes de elas escolherem seus guarda-chuvas é

a) 16. b) 18. c) 20.
d) 22. e) 24.

13 - Uma determinada agência bancária adotou, para segurança de seus clientes, uma senha de acesso de 7 (sete) dígitos, em que os três primeiros dígitos são 3 (três) letras distintas e os quatro últimos dígitos são 4 (quatro) números distintos.

- Considerando o alfabeto de 26 (vinte e seis) letras e o conjunto de números de 0 (zero) a 9 (nove), o número possível de senhas distintas que podem ser criadas é:

a) $26! \times 10!$ b) $C_{26,3} \times C_{10,4}$
c) $A_{26,3} \times A_{10,4}$ d) $A_{36,7}$
e) $C_{36,7}$

14 - Supondo-se que do campeonato ilustrado na tirinha, apenas Mônica, Cebolinha, Magali, Cascão e Chico Bento tenham participado e que tenha ocorrido premiação apenas para os três primeiros colocados, pode-se afirmar que o número de maneiras distintas que essa premiação poderia ser distribuída é

a) 60 b) 68 c) 72
d) 84 e) 120

15 - Diante do caixa eletrônico de um banco, Mariana não conseguia lembrar-se da sua senha de seis dígitos. Lembrava-se , apenas dos dois primeiros (mês do seu nascimento) e dos dois últimos (sua idade atual). Supondo que levou cerca de um minuto em cada tentativa de completar a senha e que esgotou todas as alternativas distintas possíveis , somente acertando na última, Mariana retirou os reais desejados após cerca de ...

a) 1h40min b) 1h30min c) 1h21min
d) 1h. e) 45min

16 - A Série A do campeonato brasileiro de futebol é disputada por vinte equipes. De quantas formas, classificando o primeiro, o segundo e o terceiro colocados, poderá ser concluído o campeonato? Observe que a classificação após o terceiro lugar não importa.

a) 60. b) 1140.
c) 2280. d) 6840.

17 - Nas Olimpíadas PUCRS 2009, foram inscritas 12 equipes de futsal feminino. O número de resultados diferentes para os dois primeiros colocados é:

a) 6 b) 12 c) 66
d) 132 e) 264

18 - De quantas maneiras diferentes é possível escolher o primeiro, o segundo e o terceiro colocados, em uma competição artística da qual participam 15 pessoas, todos com a mesma chance de ganhar?

a) 45 b) 225
c) 455 d) 2730

19 - Se um alfabeto contém 6 vogais e 20 consoantes, qual o número máximo de palavras com 4 caracteres que se pode formar, contendo pelo menos uma consoante e pelo menos uma vogal?

a) 295678 b) 295680 c) 295682
d) 295684 e) 295686

20 - Em uma tribo indígena o pajé conversava com seu totem por meio de um alfabeto musical. Tal alfabeto era formado por batidas feitas em cinco tambores de diferentes sons e tamanhos. Se cada letra era formada por três batidas, sendo cada uma em um tambor diferente, pode-se afirmar que esse alfabeto possuía:

a) 10 letras. b) 20 letras. c) 26 letras.
d) 49 letras e) 60 letras

5.3.6 Atividade 6 de ensino

ATIVIDADE 6

Título: Combinação Simples
Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de Combinação Simples.
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões
Procedimento:
Leia atentamente cada questão da lista de questões;
Resolva cada questão de lista;
Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Um teste consta de 5 questões, das quais o aluno deve escolher apenas duas para resolver. De quantas formas diferentes ele poderá escolher as duas questões?
RESOLUÇÃO:

02. Desejamos formar um trio de alunos entre os cinco melhores de um colégio, para representar a escola em uma gincana de matemática, na cidade. Quantos trios diferentes poderiam ser formados?
RESOLUÇÃO:

03. Seis amigos marcaram de se encontrar às 15 horas, na biblioteca da escola onde estudam, para realizar um trabalho de matemática. Chegando no local marcado, cada amigo cumprimenta todas as outras uma única vez. Quantos apertos de mãos foram dados?
RESOLUÇÃO:

04. Dos seis funcionários de uma empresa, quatro devem ser escolhidos para uma viajem. De quantas maneiras diferentes isso poderá ser feito?
RESOLUÇÃO:

05. Creuza deseja viajar e levar 5 pares de sapatos, sabendo que ela possui em sua sapateira 7 pares, de quantas maneiras diferentes Creuza poderá escolher os pares de sapatos para a viagem?
RESOLUÇÃO:

06. Nos jogos estudantis de uma escola, apenas quatro competidores se escreveram para disputar um campeonato de xadrez, em que cada competidor joga uma vez com todos os outros. Quantos jogos serão realizados nesse campeonato?
RESOLUÇÃO:

Quadro 5.7 - Quadro a ser preenchido na Atividade 6.

Questão	Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para realizar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial **(p!)**	Qual é o número de possibilidades da						Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial	Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação?
			Sim	Não		1ª escolha para o agrupamento?	2ª escolha para o agrupamento?	3ª escolha para o agrupamento?	4ª escolha para o agrupamento?	5ª escolha para o agrupamento?	6ª escolha para o agrupamento?				
1ª															
2ª															
3ª															
4ª															
5ª															
6ª															
7ª															

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Orientações didáticas

Na Atividade 6, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 5.7, para que se chegue a fórmula geral de Combinação Simples.

As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Atenção para as resoluções, os grupos podem estar habituados a resolver as questões pelo P.F.C. e mesmo tento trabalhado a diferença entre Arranjo Simples e Combinação Simples na Atividade 4, algum grupo pode ainda esquecer de verificar se a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento. Oriente, de modo geral e nos grupos, que comparem e identifique se o problema e de Arranjo ou Combinação. Com eles ainda não sabem resolver problemas de Combinação adote a seguinte postura.

- Postura para orientá-los a responder as questões e gerar a fórmula de Combinação Simples.

1º - Deixe que resolvam as questões como se fosse de Arranjo Simples, depois solicite que montem todas as possibilidades listando-as.

1º - Peça para que verifiquem, se o resultado feito por Arranjo, coincide com o número de agrupamentos que foram montados;

2º - Questione se a resolução por meio de Arranjo Simples, esta fazendo com que se crie agrupamentos a mais;

3º - Pergunte para eles, se era necessário ter feito a permutação dos elementos dentro de cada arupamento, ou seja, se a troca de elementos alterava o agrupamento;

4º - Pergunte o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estam em excesso e se chegue ao resultado encontrado com a listagem das possibilidades.

2º) Ao preenchimento do quadro 5.7.

As perguntas anteriores, podem levá-los a completar a tabela até a antepenúltima coluna, que deverá ser parte mais dificultosa da construção, pois expressa o cálculo necessário para se obter o resultado. A partir daí, as dúvidas poderão diminuir, devido as duas últimas colunas terem a ideia da atividade anterior, de completar fatorial e escrever em função de “n” e “p”, respectivamente.

Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a Figura a seguir.

Figura 5.6 - Quadro preenchido da atividade 6.

Questão	Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação?	Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!)	Qual é o número de possibilidades da						Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial	Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação?
			Sim	Não		1ª escolha para o agrupamento?	2ª escolha para o agrupamento?	3ª escolha para o agrupamento?	4ª escolha para o agrupamento?	5ª escolha para o agrupamento?	6ª escolha para o agrupamento?				
1ª	5	2		X	2! = 2X1 =2	5	4	X	X	X	X	10	$\frac{5x4}{2!} = 10$	$\frac{5!}{2!(5-2)!}$	$\frac{n!}{P!(n-p)!}$
2ª	5	3		X	3X2X1 = 6	5	4	3	X	X	X	20	$\frac{5x4x3}{3!} = 10$	$\frac{5!}{3!(5-3)!}$	$\frac{n!}{P!(n-p)!}$
3ª	6	2	X		2! = 2X1 =2	6	5	X	X	X	X	15	$\frac{6x5}{2} = 15$	$\frac{6!}{5!(6-5)!}$	$\frac{n!}{P!(n-p)!}$
4ª	6	4	X		4X3X2X1 = 24	6	5	4	3	X	X	90	$\frac{6x5x4x3}{4} = 90$	$\frac{6!}{4!(6-4)!}$	$\frac{n!}{P!(n-p)!}$
5ª	7	5	X		5X4X3X2 = 120	7	6	5	4	3	X	504	$\frac{7x6x5x4x3}{5!} = 504$	$\frac{7!}{5!(7-5)!}$	$\frac{n!}{P!(n-p)!}$
6ª	4	2	X		2! = 2X1 =2	4	3	X	X	X	X	6	$\frac{4x3}{2} = 6$	$\frac{4!}{2!(4-2)!}$	$\frac{n!}{P!(n-p)!}$

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O COMBINAÇÃO SIMPLES

01. Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

02. Se existem 11 pessoas em uma sala e cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez, o número de apertos de mão dados será igual a

a) 55 b) 65
c) 110 d) 121

03. Formam-se comissões de três professores entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formados é:

a) 35 b) 45 c) 210
d) 7^3 e) 7!

04. Numa congregação de 30 professores, 14 lecionam matemática, O número de comissões com 14 professores que podem ser formadas de modo que, em cada uma, tenha apenas um professor de matemática é

a) 7540 b) 7840
c) 8040 d) 8340

05. Um técnico de futebol de salão tem à disposição 8 jogadores de linha e 2 goleiros. Um time deve ter quatro jogadores de linha e um goleiro. O número de times distintos que o técnico pode escalar é:

a) 60 b) 70 c) 80
d) 120 e) 140

06. Por ocasião dos festejos da Semana da Pátria, uma escola decidiu exibir seus melhores atletas e as respectivas medalhas. Desses atletas, em número de oito e designados por a_1, a_2, a_3, …, a_8, serão escolhidos cinco para, no momento do desfile, fazerem honra à Bandeira Nacional. Do total de grupos que podem ser formados, em quantos o atleta a_2 estará presente?

07. Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.

08. Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

09. Durante uma viagem, foram sorteados, entre os 300 passageiros do navio, três brindes, que eram viagens para 3 diferentes lugares. Pelo critério da empresa, a pessoa que ganhasse um brinde era eliminada para o outro sorteio Dessa forma, o número de maneiras distintas de realização do sorteio é dado por:

a) A_{300}^{3} b) $C_{300,3}$ c) 300^3
d) 300! e) $C_{300}^{3}.C_{299}^{2}.C_{298}^{3}$

10. Maria tinha 6 palpites de números para jogar no concurso da MEGASENA (6 números) da Caixa econômica Federal. Quantas cartelas (jogos) ela conseguirá formar?

11. Uma empresa realizou um concurso para preencher 2 vagas de agente administrativo, 3 para técnico em informática, e 1 para serviços gerais. Dos candidatos inscritos, 8 concorreram ao cargo de agente administrativo, 10 ao de técnico em informática e 7 ao de serviços gerais. Qual das alternativas abaixo, indica o número de maneiras distintas que estas vagas podem ser preenchidas pelos candidatos?

12. A graviola é uma fruta que possui diversos nutrientes, como as Vitaminas C, B1 e B2 e os Sais Minerais: Cálcio, Fósforo, Ferro, Potássio e Sódio. Uma indústria química deseja fabricar um produto a partir da combinação de 4 daqueles nutrientes, entre vitaminas ou sais minerais, encontrados na graviola. A quantidade de produtos que poderá ser fabricada, se forem utilizados no máximo 2 tipos de vitaminas, será de

a) 26 b) 30 c) 32
d) 60 e) 65

13. Um fisioterapeuta recomendou a um paciente que fizesse, todos os dias, três tipos diferentes de exercícios e lhe forneceu uma lista contendo sete tipos diferentes de exercícios adequados a esse tratamento. Ao começar o tratamento, o paciente resolve que, a cada dia, sua escolha dos três exercícios será distinta das escolhas feitas anteriormente. O número máximo de dias que o paciente poderá manter esse procedimento é

a) 35 b) 38 c) 40
d) 42 e) 60

14. Na agenda de um médico, há dez horários diferentes disponíveis para agendamento de consultas, mas ele irá disponibilizar dois desses horários para o atendimento de representantes de laboratórios. O número de maneiras diferentes que esse médico poderá escolher os dois horários para atender os representantes é

a) 40. b) 43. c) 45.
d) 38. e) 35.

15. Maria foi a uma lanchonete que oferece seis frutas diferentes para o preparo de sucos (laranja, maracujá, morango, abacaxi, acerola e goiaba) e permite que o cliente escolha duas frutas diferentes para o preparo de cada suco. Sabendo que Maria não mistura goiaba com outras frutas e não gosta de morango com acerola, o número de maneiras diferentes de Maria escolher as duas frutas para o seu suco é

a) 6. b) 7. c) 8.
d) 9. e) 10.

16. Em uma sala estão presentes n pessoas, com n>3. Pelo menos uma pessoa da sala não trocou aperto de mão com todos os presentes na sala, e os demais presentes trocaram apertos de mão entre si, e um único aperto por dupla de pessoas. Nessas condições, o número máximo de apertos trocados pelas n pessoas é igual a

a) $\frac{n^2+3n-2}{2}$ b) $\frac{n^2-n+2}{2}$ c) $\frac{n^2+2n-2}{2}$
d) $\frac{n^2-3n+2}{2}$ e) $\frac{n^2-n-2}{2}$

17. Um farmacêutico dispõe de 3 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais. Deseja combinar 3 desses nutrientes para obter compostos químicos.

- O número de compostos químicos distintos que poderá ser preparado usando, no máximo, duas vitaminas é igual a

a) 9 b) 10 c) 18
d) 19 e) 20

18. Para aumentar as chances de ganhar no sorteio da mega-sena da virada, um grupo de dez amigos se juntou e fez todos os jogos possíveis de seis “dezenas” diferentes, escolhidas dentre quinze “dezenas” distintas previamente escolhidas. Qual o total de jogos que foram realizados por este grupo de amigos?

a) 5.000 b) 5.005 c) 5.010
d) 5.015 e) 5.020

19. Os sintomas mais comuns do vírus ebola são febre, diarreia, dores de cabeça, fraqueza, dor de garganta, dores nas articulações e calafrios. Em um hospital, depois que alguns pacientes foram examinados, constatou-se que cada um deles tinha exatamente três dos sete sintomas desse vírus, mas quaisquer dois deles não apresentavam os mesmos três sintomas.

- A partir dessas informações, infere-se que o número máximo de pacientes examinados foi

a) superior a 30 e inferior a 40.
b) superior a 40.
c) inferior a 20.
d) superior a 20 e inferior a 30.

20. Geralmente os alunos que terminam o Ensino Médio fazem uma festa de formatura, e durante o ano esses alunos realizam bingos, festas, etc para arrecadar fundos para a festa. Em uma escola há somente uma turma com 20 alunos, que se reuniram para formar uma comissão com 3 membros.

- Quantos grupos diferentes podem ser formados, sabendo que a líder da classe terá de fazer parte do grupo?

5.3.7 Atividade 7 de ensino

ATIVIDADE 7

Titulo: Permutação com Repetição
Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de Permutação com repetição.
Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões
Procedimento:

- Leia atentamente cada questão da lista de questões;
- Resolva cada questão de lista;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ANA?
Solução:

02. Um cacique, ao homenagear a filha, deu o nome à nossa querida fruta (AÇAI), fazendo apenas a inversão das letras da palavra IAÇA. Porém, com essas letras, qual é o total de anagramas que poderiam ser formados?
Solução:

03. Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra ERRAR?
Solução:

04. Um aluno, que nasceu em 1999, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição?
Solução:

05. Um torcedor fanático pelo Paissandu escreveu a seguinte frase "**#OPAPA**TITULODONORTE". A expressão em negrito é um dos anagramas da palavra PAPAO. Porem com essa palavra, quantos anagramas podemos formar?
Solução:

06. De quantas formas três sinais de + (mais) e dois sinais de – (menos), podem ser colocados **entre** os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, ficando cada um entre dois algarismos. (Exemplo: 1 + 2 + 3 + 4 – 5 – 6)?
Solução:

Quadro 5.8 - Quadro a ser preenchido na Atividade 7.

Questão	Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação?	Qual o número de etapas **p** (escolhas para realizar o evento) independentes no evento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial **(p!)**	Permute os elementos repetidos em cada situação e escreva o resultado em forma de fatorial	Qual é o número de possibilidades da					Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial
			Sim	Não			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?			
1ª														
2ª														
3ª														
4ª														
5ª														
6ª														
7ª														

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Orientações didáticas

Na Atividade 7, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas e a partir delas preencham o Quadro 5.8, para que se chegue a fórmula geral de Permutação com Elementos Repetidos.

As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Atenção para as resoluções, os grupos podem estar habituados em resolvê-las pelo P.F.C., quando não há elementos repetidos. Adote a seguinte postura para ajudá-los em suas conclusões.

- Postura para orientá-los a responder as questões e gerar a fórmula de Permutação com Elementos Repetidos.

1º - Deixe que resolvam as questões como se fossem de Permutação Simples e solicite que montem todas as possibilidades listando-as.

2º - Peça para que verifiquem, se o resultado feito por Permutação Simples coincide com o número de agrupamentos que foram montados;

3º - Questione se a resolução por meio de Permutação Simples, estava fazendo com que se crie agrupamentos a mais;

4º - Pergunte para eles, se era necessário ter feito a permutação dos elementos repetidos dentro de cada arupamento, ou seja, se a troca de posição desses elementos alterava o agrupamento;

5º - Pergunte o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estam em excesso e se chegue ao resultado correto, encontrado com a listagem das possibilidades.

2º) Ao preenchimento do Quadro 5.8.

As perguntas anteriores, podem os levar a completar a tabela até a penúltima coluna, que será a parte mais dificultosa da construção, pois expressa o cálculo necessário para de obter o resultado. A partir daí, faltará preencher a última coluna e pelas experiências adquiridas anteriormente, os alunos podem não ter dificuldades em escrever o cálculo por meio de fatorial. Após a tabela ser preenchida, peça para que eles verifiquem se os fatoriais na última coluna estão em função do número total de elementos e do número de elementos repetidos de cada questão, ou seja, se foi gerado um padrão. A 6ª coluna (Permute os elementos repetidos em cada situação e escreva o resultado em forma de fatoriial), a ser preenchida, também poderá causar dúvidas, peça que considere cada elemento repetido como se fossem diferentes (como X, X, X, ...) e que apenas dessa maneira poderá permutá-los.

Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a Figura a seguir.

Figura 5.7 - Quadro preenchido da atividade 7.

Questão	Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação?	Qual o número de etapas **p** (escolhas para realizar o evento) independentes no evento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!)	Permute os elementos repetidos em cada situação e escreva o resultado em forma de fatorial	Qual é o número de possibilidades da					Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial
			Sim	Não			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?			
1ª	3	2	x		3	2!	3	2	1	x	x	3	$\frac{3!}{2!}$	$\frac{3!}{2!}$
2ª	4	2	x		4	2!	4	3	2	1	x	12	$\frac{4!}{2!}$	$\frac{4!}{2!}$
3ª	5	2	x		5	3!	5	4	3	2	1	20	$\frac{5!}{3!}$	$\frac{5!}{3!}$
4ª	4	2	x		4	4!	4	3	2	1	x	4	$\frac{4!}{3!}$	$\frac{4!}{3!}$
5ª	5	2	x		5	2!x2!	5	4	3	2	1	15	$\frac{5!}{2! x 2!}$	$\frac{5!}{2! x 2!}$
6ª	5	2	x		5	3!x2!	5	4	3	2	1	60	$\frac{6!}{3! x 2!}$	$\frac{6!}{3! x 2!}$
7ª														

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA A PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

01. Quantos números de cinco algarismos podemos escrever apenas com os dígitos 1, 1, 2, 2 e 3, respeitadas as repetições apresentadas?

02. Um cacique, ao homenagear a filha, deu o nome à nossa querida fruta (AÇAI), fazendo apenas a inversão das letras da palavra IAÇA. Porém, com essas letras, o total de anagramas que poderiam ser formados é de:

a) 36 b) 24 c) 18
d) 12 e) 6

03. Quantos anagramas distintos com as letras da palavra PINDAMOIANGABA podemos formar?

04. Quantos anagramas com a palavra ARARA?

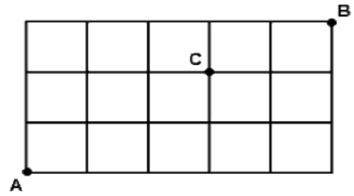
05. É do grande poeta português Fernando Pessoa a belíssima frase

> "Tudo vale a pena se a alma não é pequena"

Tomados pelo espírito dessa frase, queremos formar novas sequências de palavras, permutando-se as palavras do verso, indiferentemente de constituir ou não frases, Por exemplo: "A pena não vale tudo se pequena é a alma" ou "A a é pena não se vale pequena tudo alma". É correto afirmar que o número de sequências distintas de palavras que se pode construir, utilizando-se todas as dez palavras, é igual a

a) 453.600 b) 907.200 c) 1.814.400
d) 3.628.800 e) 7.257.600

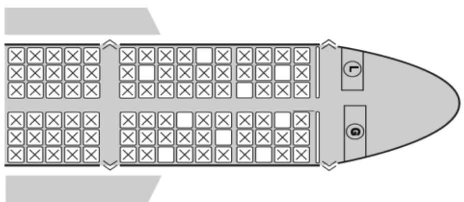
06. No desenho a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões.



A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A e B que passam por C é:

a) 12 c)15 e) 30
b) 13 d)24

07. Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$ b) $\frac{9!}{7!\times 2!}$ c) 7!

d) $\frac{5!}{2!}\times 4!$ e) $\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}$

08. No Boxe, um dos esportes olímpicos, um pugilista tem à sua disposição quatro golpes básicos: o *jab*, o *direto*, o *cruzado* e o *gancho*. Suponha que um pugilista, preparando-se para os Jogos Olímpicos do Rio, em 2016, queira criar uma sequência com 6 golpes, empregando necessariamente dois *jabs*, dois *diretos*, um *cruzado* e um *gancho*.

Assim, o número máximo de sequências que ele poderá criar será de

- Lembre-se de que: Permutação com repetição $P_n^{k_1,k_2,k_3,\ldots} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots}$

a) 180. b) 160. c) 140.

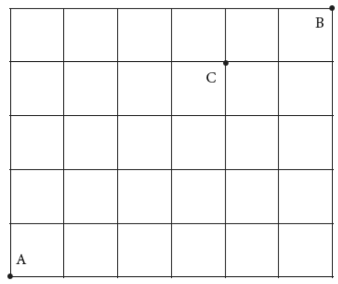
d) 120. e) 100.

09. Se A é a quantidade total de anagramas da palavra EVANGELICA (sem acento) e B a quantidade de anagramas dessa mesma palavra que começam por consoantes, o valor de B dividido por A é

a) 0,2 b) 0,5

c) 0,3 d) 0,6

10. A figura a seguir supostamente representa o mapa da cidade onde se encontra Paulo, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção Leste-Oeste. Se na praça localizada no ponto B ocorre uma manifestação pacífica, organizada por estudantes, e Paulo encontrasse no ponto A, quantos são os trajetos de comprimento mínimo que Paulo pode escolher, a fim de participar dessa manifestação, se ele deseja passar antes na casa do seu tio, que se encontra localizada no ponto C? Assinale a alternativa que contenha a resposta correta:



a) 13 possibilidades b) 462 possibilidades

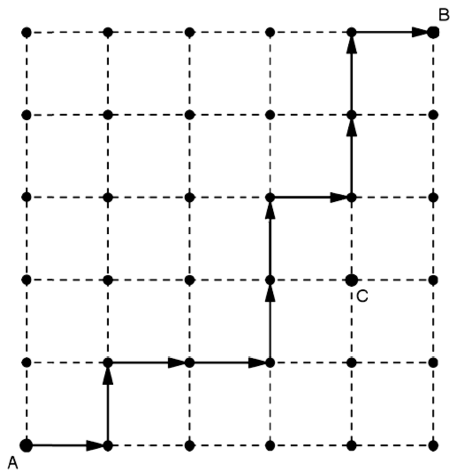
c) 70 possibilidades d) 210 possibilidades

11. A palavra VESTIBULAR pode dar origem a outras palavras (com ou sem sentido) bastando alterar a posição de suas letras. Exemplos: RESTIBULAV, LETRAVIBUS, etc. Se mantivermos as vogais fixas e alterarmos apenas as consoantes, quantas palavras teremos?

a) 24 b) 60 c) 120

d) 240 e) 720

12. Um projeto piloto desenvolvido em um curso de Engenharia Mecânica prevê a construção do robô "Eddie", cujos movimentos estão limitados apenas a andar para frente (F) e para a direita (D). Suponha que Eddie está na posição A e deseja-se que ele se desloque até chegar à posição B, valendo-se dos movimentos que lhe são permitidos. Admita que cada movimento feito por Eddie o leve a uma posição consecutiva, conforme ilustra um esquema a seguir, em que foram realizados 10 movimentos (as posições possíveis estão marcadas por pontos e o percurso executado de A até B, é representado pela sequência ordenada de movimentos D F D D F F D F F D).



- Com base nas informações acima, o número de maneiras possíveis de Eddie se deslocar de A até B, sem passar pelo ponto C, é igual a

a) 192 b) 60

c) 15 d) 252

13. Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR aparecem juntas e nesta ordem.

14. Quantos números diferentes obteremos, permutando os algarismos do número 336 223?

6 LEITURAS RECOMENDADAS

Para maior aprofundamento, relativo ao que descrevemos em nosso produto, recomendamos que leiam com mais propriedade os seguintes textos:

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa Anísio Teixeira – INEP. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf. Acesso em 24 de fevereiro de 2018.

CABRAL, M. A. A Utilização de Jogos no Ensino de Matemática. 52p. Monografia para habilitação em Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2006.

DANTE, L, R. Didática da resolução de problemas. 12 ed. São Paulo: Ática 2002.

MENDES, I. A., CHAQUIAM, M. História nas Aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

SANTOS, José P. de O.; MELO, M. P.; MURARI, I. T. C. Introdução à Análise Combinatória. Editora da UNICAMP, Campinas - SP, 1995.

SÁ, P. F. de. Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental. Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, P. F. de. A resolução de problemas: concepção e sugestões para aula de Matemática. Traço: revista do centro de ciências exatas e tecnologia. Belém: UNAMA, v.7, n.16, p. 63-77, 2005.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho é uma sequência didática desenvolvida na dissertação de Conceição (2019), com base na dissertação de Rosas (2018), que teve por objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, sobre a participação e o desempenho na resolução de questões de Análise Combinatória. Haja vista, que o assunto tem mostrado que professores e alunos sentem dificuldades de se socializar com a mesma, tornando o ensino-aprendizagem pouco satisfatório. Com isso, esperamos que docentes do ensino médio e/ou fundamental, considerem o nosso produto e saibam administrar as atividades garantindo o envolvimento de todos na sala de aula. Que nessa metodologia, o aluno seja estimulado a discutir com seus colegas e professores, atividades e estratégias que julgamos adequadas para compreensão de cada tópico do conteúdo, que desenvolva o pensamento lógico, a criatividade, a intuição e a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação, para ser capaz de questionar a realidade que o cerca.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. “Ingénierie Didactique”. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308, 1988.

______________. Engenharia Didática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Sistema nacional de avaliação da educação superior. Bases para uma Nova proposta da Educação Superior - São Paulo, 2001.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. p. 35-113.

BUSSAB W. O. e MORETTIN P. A. Estatística Básica - 4 Edição, Atual Editora, 1987

CAMPOS, C. E.; Análise Combinatória e Proposta Curricular Paulista: Um Estudo dos Problemas de Contagem-Dissertação de mestrado-PONTÍFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO/PUC-Sp,2011.

CHEN, P. Y. e POPOVICH, P. M. Correlação: medidas paramétricas e não paramétricas . Publicações Sage. 2002.

DOUADY, R. Didactique des Mathématiques. Encyclopedia Universalis, 1985, p.885-889.

FERGUSON, G. A. Statistical analysis in psychology and education. Tokyo: McGraw-Hill Kogagusha, 1981.

GONÇALO, V. L. S.; Análise Combinatória: um olhar no currículo das Instituições de Ensino Superior do Estado de Pernambuco- Artigo X1V CIAEM– Brasil, 2015.

GONÇALVES, R. R. S. Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio: a utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica. Ed. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, PMPMAT, 2014.

HEY, A. U. B.. Uma proposta metodológica para a aprendizagem de estatística – contribuições da engenharia didática. Florianópolis, 2001. 107 folhas. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção. UFSC. 2001.

LARA, I. C. M. de. Jogando com a matemática. 2ª Ed. São Paulo: Réspel, 2003.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). Educação

Matemática: Uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ., 2002. p. 197-208.

MELLO, G. N. de. Currículo da educação básica no Brasil: concepções e políticas. Setembro de 2014. BRASIL. SINAES. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior: da concepção à regulamentação. Brasília, 2004.

PINHEIRO, C.A.M. O ensino de análise combinatória a partir de situações problema. 166 fls. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

ROSAS, L. S. **Ensino de Análise Combinatória por Atividades.** 2018. 315f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

SÁ, P. F. de. A resolução de problemas: concepção e sugestões para aula de Matemática. **Traço**: revista do centro de ciências exatas e tecnologia. Belém: UNAMA, v.7, n.16, p. 63-77, 2005.

SILVEIRA, F. L. Relação do desempenho no concurso vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul com diversas variáveis. Estudos em Avaliação Educacional, São Paulo, 14, pp. 83-103, 1999.

SOUSA, A. B.. A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática. Disponível em: www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf . Acesso em: 23 jul. 2018.

STURM, W. As Possibilidades de um Ensino de Análise Combinatória sob uma Abordagem Alternativa. 132p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1999.

.

APÊNDICE

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – MESTRADO

Prezado (a) aluno (a), Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato. Muito Obrigado!

QUESTIONÁRIO

1-Idade:_______________________________
2- Gênero:_____________________________
3-Nome:_______________________________

4- Quem é o seu responsável masculino?
( )Pai ( )Avô ( )Tio ( )Irmão ( )Não tenho ( )Outro. Quem?__________________________________

5- Quem é a sua responsável feminina?
( )Mãe ( )Avó ( )Tia ( )Irmã ( )Não tenho ( )Outra. Quem? ___________

6- Até que série estudou o seu responsável masculino? ____
E o seu responsável feminino? ________________

7- Seu responsável masculino trabalha?
( ) Não ( ) Sim.
Qual a Profissão?____________________________

8- Seu responsável feminino trabalha?
( ) Não ( ) Sim.
Qual a profissão?_____________________________

9- A escola onde você estuda fica no bairro onde você mora?
( ) Sim ( ) Não
10- Em que turno você estuda?
( ) Manhã ( ) Tarde ( ) Noite
11- Você trabalha de forma remunerada?
( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes
12- Você recebe algum tipo de auxilio, para ajudá-lo (a) nos estudos?
( )Não ( )Sim.
De quem?___________________________________
13- Você faz algum curso?
( ) Informática ( ) Língua estrangeira ( ) Outro. Qual? ______________________________________

14- Você pratica algum esporte? ( ) Não ( ) Sim. Qual? ______________________________________

15- Você gosta de Matemática? ( ) Nenhum pouco ( ) Pouco ( ) Muito ( )

16-Você está em dependência, em Matemática?
( ) Não ( ) Sim

17- Você está repetindo esta série?
( ) Não ( ) Sim

18-Você têm dificuldade para aprender matemática?
( ) Não ( ) Um pouco ( ) Muito

19- Você se distrai nas aulas de matemática?
( ) Não, eu sempre presto atenção
( )Sim, eu não consigo prestar atenção
( )Às vezes, quando a aula está chata
20- Você costuma estudar matemática: ( ) Nunca estudo ( ) Só na véspera da prova ( ) Só nos fins de semana ( )Todo dia ( ) Alguns dias da semana.
Quantos? ______________________________
21- Quem lhe ajuda nas tarefas extraclasse de matemática?
( ) Professor particular ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Irmão ( ) Amigo(a) ( ) Ninguém ( ) Outros.
Quem? ____________________________________

22- Você já estudou Análise Combinatória?
( ) Sim ( ) Não

ANEXOS

ANEXO A – JOGO: PIF-PAF DA COMBINATÓRIA

Participantes: de dois a quatro participantes;

Regras:

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;
- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro as triplas contendo em cada uma delas um enunciado, um processo e um resultado.

Veja os **Exemplos a seguir**:

Sabendo que um salão tem 5 portas, determine o número de maneiras distintas de entrar nele e sair dele sem usar a mesma porta?	5 . 4	20
Uma moça possui 3 blusas e 2 saias. De quantas formas ela pode se vestir?	3 . 2	6

Eis as cartas:

CARTA PROBLEMA 01

Com os números 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números naturais de três algarismo distintos podem ser escritos ?	$\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3}$	$\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3}$	$\boxed{60}$

CARTA PROBLEMA 02

Miranda deseja formar um conjunto calça-blusa para vestir-se. se ele dispõe de 7 calças e 8 blusas para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto?	$\boxed{7 \cdot 8}$	$\boxed{7 \cdot 8}$	$\boxed{56}$

CARTA PROBLEMA 03

No campo do Combinatória Esporte Clube há 10 portas de entrada. Quantas maneiras diferentes existem de um torcedor entrar por uma porta e sair por outra diferente?	$\boxed{10 \cdot 9}$	$\boxed{10 \cdot 9}$	$\boxed{90}$

CARTA PROBLEMA 04

Dionísio vai a um restaurante disposto a comer um prato de carne e uma só sobremesa. o cardápio oferece dez pratos distintos de carne e seis diferentes Tipos de sobremesa. de quantas maneiras diferentes Dionísio pode fazer seu pedido?	$\boxed{10 \cdot 6}$	$\boxed{10 \cdot 6}$	$\boxed{60}$

CARTA PROBLEMA 05

Um "Shopping Center" possui 8 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 2 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?	$\boxed{8 \cdot 5 \cdot 2}$	$\boxed{8 \cdot 5 \cdot 2}$	$\boxed{80}$

CARTA PROBLEMA 06

Uma fechadura de segredo possui 3 contadores que podem assumir valores de 0 a 9 cada um, de tal sorte que, ao girar os contadores, esses números podem ser combinados, para formar o segredo e abrir a fechadura. De quantos modos esses números podem ser combinados para se tentar encontrar o segredo?	$\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$	$\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$	$\boxed{1000}$

CARTA PROBLEMA 07

Uma sorveteria oferece uma taça de sorvete que pode vir coberto com calda de chocolate ou de morango ou de caramelo. Se o sorvete pode ser escolhido entre 10 sabores diferentes, quantos são as opções para um cliente escolher a taça com cobertura?	$\boxed{10 \cdot 3}$	$\boxed{10 \cdot 3}$	$\boxed{30}$

Carta problema 08

De quantas maneiras podemos classificar os 4 empregados de uma micro-empresa nas categorias A ou B, se um mesmo empregado pode pertencer às duas categorias?	$\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$	$\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$	$\boxed{81}$

Carta problema 09

Num concurso de 12 participantes, se nenhum puder ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras poderão ser distribuídos um primeiro e um segundo prêmios?	$\boxed{12 \cdot 11}$	$\boxed{12 \cdot 11}$	$\boxed{132}$

Carta problema 10

Dez atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1^0 , 2^0 e 3^0 lugares?	$\boxed{10 \cdot 9 \cdot 8}$	$\boxed{10 \cdot 9 \cdot 8}$	$\boxed{720}$

ANEXO B – JOGO: CARTA DA COMBINATÓRIA

Participantes: de dois a quatro participantes;

Objetivo desse jogo é fixar o conceito de permutação e a noção de fatorial têm suas regras iguais ao do Pif-Paf da Combinatória, no entanto possui um número menor de cartas e como já foi citada objetivo diferente.

Regras:

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;
- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro as triplas contendo

ANEXO C – JOGO: DOMINÓ COMBINATÓRIO

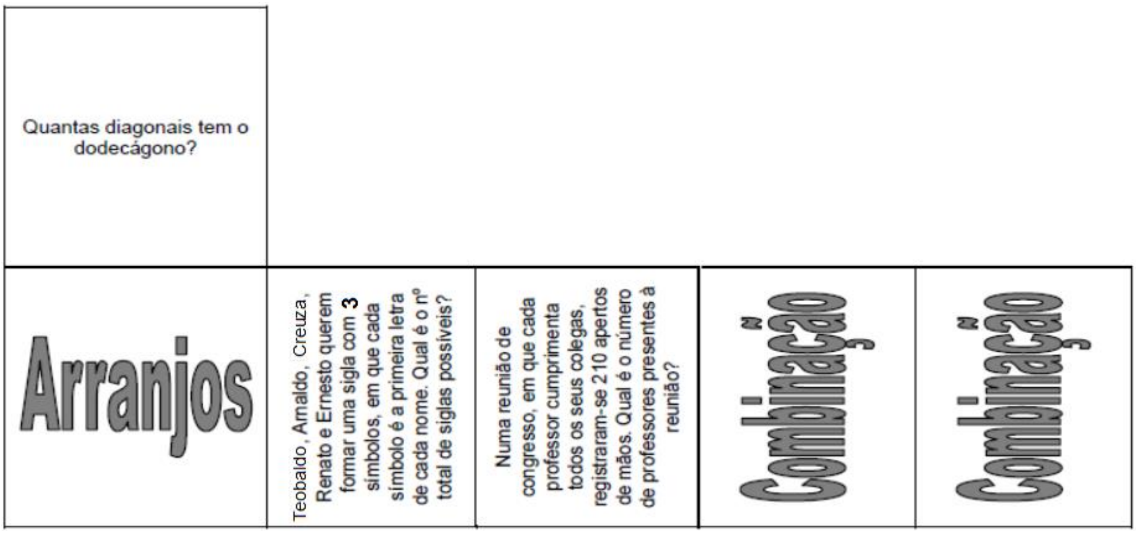
Este jogo consiste em 30 cartas. Algumas contêm um par de situações que representam COMBINAÇÃO/ARRANJO, COMBINAÇÃO/COMBINAÇÃO, ARRANJO/ARRANJO, que serão associadas às demais cartas nas quais estão os seguintes pares de palavras: COMBINAÇÃO/COMBINAÇÃO, ARRANJO/ARRANJO, COMBINAÇÃO/ARRANJO.

Objetivo: Livrar-se de todas as suas cartas, deitando-as na mesa, uma em cada rodada, associando uma situação de combinação (texto) à palavra COMBINAÇÃO; ou uma situação de arranjo (texto) à palavra ARRANJO.

Participantes: no mínimo dois.

Regras:

- As cartas devem ser distribuídas em quantidades iguais para cada participante.
- Para definir quem dará início à partida sugerimos a maior jogada no dado, zerinho um, par ou ímpar, enfim o que melhor convier aos participantes.
- As cartas deverão ser despejadas na mesa formando uma sequência de cartas que deverão sempre ser associadas da seguinte forma: um texto de combinação à palavra COMBINAÇÃO, um texto de arranjo à palavra ARRANJO.
- Caso um participante associe uma carta errada, este terá sua carta de volta e perderá a chance de despejar outra carta.
- O participante que primeiro conseguir despejar todas as suas cartas de forma correta, será o vencedor.



A seguir as peças do Dominó Combinado;

Um examinador dispõe de 6 questões de Álgebra e 4 de Geometria para montar uma prova de 4 questões. Quantas provas diferentes ele pode montar usando 2 questões de Álgebra e 2 de Geometria?	Combinação	Arranjos
Combinação	Arranjos	Arranjos
Entre quatro alunos de uma turma será escolhida a diretoria do grêmio, formada por presidente, secretário e tesoureiro. De quantas maneiras tal diretoria pode ser formada com esses elementos?	Combinação	Combinação
Combinação	Arranjos	Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas com 7 alunos de uma escola?
Numa reunião de congresso, em que cada professor cumprimentou todos os seus colegas, registraram-se 210 apertos de mãos. Qual o número de professores presentes à reunião?	Combinação	Uma empresa quer constituir uma comissão de empregados. Dentre os dez mais cotados e atuantes devem ser escolhidos três. De quantas maneiras essa comissão pode ser constituída?
Alfredo, Otavio, Ricardo, Sergio e Luiz querem formar uma sigla com 3 símbolos, em que cada símbolo é a primeira letra de cada nome. Qual é o numero total se siglas possíveis?	Combinação	Combinação

Quantas palavras de três vogais não repetidas podemos formar com as vogais a, e, i, o, u?	Você faz parte de um grupo de 12 pessoas, 5 das quais deverão ser selecionadas para formar um grupo de trabalho. De quantos modos você poderá fazer parte do grupo a ser formado?	Combinação
Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, quantos números três algarismos distintos podem ser formados?	Arranjos	Em um colégio, há três estudantes concorrendo à presidência ou vice-presidência do grêmio: Bia, Cláudia e David. De quantas formas esses dois cargos podem ser preenchidos?

Arranjos	Dispomos de 7 frutas para fazer uma salada de frutas. De quantas maneiras diferentes podemos preparar a sala com apenas 5 frutas?	Combinação
Uma empresa possui 8 sócios, dos quais serão escolhidos 2 para os cargos de presidente e vice-presidente. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a escolha?	Arranjos	Duas pessoas entram num ônibus que tem 7 lugares vagos. De quantas maneiras diferentes as 2 pessoas podem ocupar esses lugares?

Dez pessoas disputam uma corrida. Quantos são os possíveis resultados para as três primeiras colocações, sabendo que não pode haver empates?	Arranjos	Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listas, cada lista com um cor. De quantas formas isso pode ser feito?
Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele	Arranjos	Combinação

Combinação	Arranjos	Uma prova consta de 10 questões, dais quais o aluno deve resolver 5. De quantas formas diferente ele poderá escolher as 5 questões?
Arranjos	Combinação	Quantas palavras de três letras podemos formar com as letras da palavra ESCOLA?

Arranjos	Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas a partir de um grupo de 10 pessoas?	Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?
Em um campeonato de boxe há doze inscritos. Quantas lutas podem ser realizadas?	Numa urna existem 100 cartelas numeradas de 1 a 100. São extraídas, ao acaso, três cartelas para serem distribuídos três prêmios diferentes. Quantas maneiras diferentes existem para distribuir os prêmios entre as 100 pessoas	Uma organização dispõe de 10 economistas. De quantas maneiras diferentes os dirigentes podem escolher três economistas para desenvolver um projeto econômico para o governo?

Num determinado setor de um hospital trabalha 10 enfermeiras. De quantas maneiras diferentes podemos escolher três enfermeiras para um plantão extra no hospital?	Dispondo de 5 latas de tinta de cores diferentes e necessitando pintar três paredes de um quarto, cada uma com cor diferente, quantas escolhas são possíveis?	Com 15 jogadores, quantos times de futebol de salão podem ser formados, sabendo-se que qualquer jogador poderá ocupar a posição do goleiro?
Arranjos	Combinação	Formam-se comissões de três professores escolhidos entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formadas é:

Uma papelaria tem 8 cadernos de cores diferentes, e quero comprar 3 de cores diferentes. Quantas possibilidades de escolha eu tenho?	Uma agência de publicidade necessita de 2 rapazes e 3 moças para fazer um comercial para a TV. Dispondo de 4 rapazes e 5 moças, quantas opções a agência tem para formar o grupo necessário?	**Arranjos**
Uma empresa possui 16 funcionários administrativos, entre os quais serão escolhidos 3, que disputarão para os cargos de diretor, vice-diretor e tesoureiro. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?	**Arranjos**	**Combinação**