Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

José Maria dos Santos Lobato Júnior
Natanael Freitas Cabral

O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO POR MEIO DE ATIVIDADES

Belém – PA
2020

José Maria dos Santos Lobato Júnior

Natanael Freitas Cabral

O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO POR MEIO DE ATIVIDADES

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção de título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Natanael Freitas Cabral.

Belém – PA

2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

LOBATO JÚNIOR, José Maria dos Santos e CABRAL, Natanael Freitas. O ensino de razão e proporção por meio de atividades. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Ensino por atividades; Razão e proporção.

RESUMO

Neste trabalho está contemplado o produto validado em uma dissertação de mestrado intitulada O Ensino de Razão de Proporção por Meio de Atividades e que proporcionou resultados favoráveis à aprendizagem dos alunos, pois após as atividades aplicadas, obtiveram um desempenho satisfatório na resolução de questões sobre os conteúdos em estudo. Para a elaboração das atividades nos fundamentamos no Ensino por Atividades, além dos pressupostos de uma sequência didática proposta por Cabral (2017) e considerações a cerca de um teste de nivelamento que objetivou fazer uma abordagem a respeito de conteúdos primordiais para o desenvolvimento das atividades aplicadas. A partir de informações obtidas de algumas análises, dentre elas uma revisão de estudos sobre razão e proporção, elaboramos uma sequência didática com vinte e duas atividades para abordar os conteúdos. Nesse sentido, esperamos que este produto possa ser utilizado como uma metodologia de ensino alternativa nas aulas de matemática e que contribua para um melhor aprendizado dos discentes.

Palavras-chave: Matemática. Ensino de Matemática. Ensino por Atividades. Razão e Proporção.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Diante de uma nova realidade educacional, o ensino de Matemática não pode manter-se enraizado a um processo de ensino usual voltado para uma metodologia em que o roteiro a ser seguido começa por uma aula expositiva, seguida de exemplos e, por fim, a resolução de diversos exercícios, sem nenhuma aproximação ou inserção da realidade do discente. Nesse processo de ensino percebe-se que a matemática a ser ensinada é direcionada, muitas vezes, à simples memorização ou mecanização de leis, fórmulas e técnicas de resolução de exercícios, sendo o professor o detentor de todo o conhecimento e os alunos meros receptores desse conhecimento.

A nosso ver, ensinar matemática hoje é tornar o aluno um ator principal no processo educacional, com uma participação mais ativa na construção do seu conhecimento. Agora, um dos papéis do professor é direcionar e monitorar as atividades propostas e estas relacionadas a um contexto real e que motive os discentes a resolvê-las, seja por meio da curiosidade ou pelo fato de sentir-se desafiado.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s)

> Numa perspectiva de trabalho em que se considere a criança como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher o (s) problema (s) que possibilita (m) a construção de conceitos/ procedimentos e alimentar o processo de resolução, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir. (BRASIL, 1997, p. 30, 31).

No contexto atual, acreditamos que para que o aprendizado dos conteúdos seja efetivo é essencial fazermos uso de metodologias que contribuam na evolução das habilidades dos discentes para que possam produzir conhecimentos como sujeito histórico. Neste sentido, Freire (1999) afirma que a aprendizagem se dá por meio da problematização da situação real vivida pelo educando até se chegar a um nível mais elevado da compreensão de sua realidade.

No universo do Ensino de Matemática, alguns conteúdos são merecedores de destaque, já que são conceitos elementares e que servem de suporte para o entendimento de outros conteúdos, dentre eles, destacamos o estudo de Razão e Proporção justificado pela sua vasta aplicabilidade e seu uso em variadas situações problemas do cotidiano.

O estudo de Razão e Proporção é abordado mais especificamente no 7º ano do Ensino Fundamental e possui variadas conexões com outras áreas de conhecimento. Na própria Matemática, destacamos a sua utilização dentro dos conteúdos de razões trigonométricas no triângulo retângulo, semelhança de triângulos, juros e probabilidade. Já em relação à sua integração com outras disciplinas, destacamos o cálculo da densidade demográfica de uma determinada região na disciplina Geografia, o uso da Lei das Proporções Múltiplas na disciplina Química, o cálculo da velocidade média de um veículo na disciplina Física e a utilização de escalas na construção de edifícios na Engenharia Civil.

Apesar ser de grande relevância, quando o tema trabalhado em sala, não é tratado com sua devida importância e significância, servindo apenas de pré-requisito para o ensino de regra de três, por exemplo. Na verdade, o entendimento dos conceitos de Razão e Proporção é essencial na construção de habilidades para resolver diversas situações-problema do cotidiano, tal como a tomada de decisão quando se pretende comprar entre duas ou três opções de embalagem com diferentes quantidades de um mesmo produto ou a quantidade exata de ingredientes necessária na preparação de bolos em diversos tamanhos.

Segundo o*National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (1982, p. 82, apud PAULA, 2012, p. 35), as atividades relacionadas a razões e proporções são “de importância tão grande que merecia qualquer tempo e esforço gastos para assegurar o seu desenvolvimento cuidadoso”.

Quando se fala no ensino de Razão e Proporção, tem-se a clara perspectiva de que nosso objetivo é desenvolver em larga escala o pensamento proporcional, ou seja, adquirir competências e habilidades para resolver qualquer problema que envolve a proporcionalidade, sendo esta aplicável no dia a dia do cidadão. Os PCN’s discorrem que um dos seus objetivos a serem atingidos no ensino da Matemática, no terceiro ciclo, é o desenvolvimento

> “Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relações entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade”. (BRASIL, 1998, p. 65)

Depois da aprendizagem das quatro operações fundamentais, consideramos a proporcionalidade um dos conceitos primordiais para a alfabetização matemática, se fazendo presente em diversas avaliações em larga escala tais como Prova Brasil, SisPAE(Sistema Paraense de Avaliação Educacional) e ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

No intuito de desenvolver um trabalho sobre o ensino de razão e proporção a fim de proporcionar ao discente uma forma mais atrativa e dinâmica no processo de descoberta e sistematização desses conteúdos, valorizando também os conhecimentos que os alunos trazem de sua vivência extraescolar desenvolvemos este trabalho que é fruto da dissertação de mestrado de Lobato Júnior (2018) intitulada **O Ensino de Razão e Proporção por Meio de Atividades**, que teve como objetivo geral analisar as potencialidades de uma sequência didática[1] de Razão e Proporção, diferente das práticas usuais, criada para identificar os indícios de aprendizagem alcançados por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Nesse contexto elaboramosuma sequência didática vinculada ao Ensino por Atividades[2], dividida em 02 (dois) grupos: 11 atividades para o ensino de Razão e 11 atividades para o ensino de Proporção.

Os resultados da pesquisa mostraram que a sequência didática elaborada proporcionou resultados favoráveis à aprendizagem dos alunos, uma vez que, após as atividades aplicadas, obtiveram um desempenho satisfatório na resolução de questões sobre os conteúdos em estudo e ressaltamos que este produto é mais uma ferramenta para o professor de matemática utilizar em suas aulas.

---

[1] Um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino como a intencionalidade objetiva de estimular aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de matemática a partir da percepção de regularidade e do estabelecimento de generalização adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas. (CABRAL, 2017, p.12)

[2] (...) a característica essencial desse tipo de abordagem metodológica de ensino está no fato de que os tópicos a serem aprendidos serão descobertos pelo próprio aluno durante o processo de busca que é conduzido pelo professor até que ele seja incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz. (MENDES e SÁ, 2006, p. 13).

1 TEORIAS DE APOIO

Neste capítulo apresentamos considerações acerca das teorias de apoio utilizadas neste trabalho. Primeiramente faremos uma abordagem sobre os pressupostos teóricos do Ensino por atividades. Em seguida, discorremos sobre a estrutura de uma sequência didática proposta por Cabral (2017) e, finalmente, faremos uma abordagem teórica sobre um teste de nivelamento que contemplou assuntos que serviriam de suporte para amenizar possíveis dificuldades auferidas pelos discentes.

1.1 O ENSINO POR ATIVIDADES

Para a elaboração da sequência de atividades para o ensino de razão e proporção, adotamos como referência o *Ensino por Atividades,* também chamado de *Ensino por Atividade de Redescoberta*.

Esta concepção de ensino proporciona ao discente a possibilidade da (re)descoberta de conceitos matemáticos, de forma autônoma, por meio de atividades matemáticas, sem que o docente lhe apresente, previamente, essas informações.

Segundo Mendes e Sá (2006)

> (...) a característica essencial desse tipo de abordagem metodológica de ensino está no fato de que os tópicos a serem aprendidos serão descobertos pelo próprio aluno durante o processo de busca que é conduzido pelo professor até que ele seja incorporado à estrutura cognitiva do aprendiz. (MENDES e SÁ, 2006, p. 13)

As atividades de sala de aula serão conduzidas pelo professor e estruturadas de acordo com a especificidade do conteúdo a ser trabalhado, contendo um roteiro que contempla os objetivos a serem alcançados, os materiais necessários e os procedimentos para a execução das tarefas.

Fossa (2001), em conformidades com Sá (2009) afirma que é necessário que o docente faça um planejamento prévio das atividades e que estejam organizadas em sequência de forma que os objetivos sejam alcançados.

Nesse sentido, acreditamos que será de grande ajuda, antes da aplicação final da sequência, testar estas atividades com discentes da mesma série/ ano que ainda não viram os conteúdos a serem abordados, pois, dessa forma, poderemos verificar possíveis ajustes na sequência didática, tais como: uso expressões que dificultam o entendimento para a execução das tarefas, alterações nos valores numéricos para que os resultados sejam mais significativos e uma previsão do tempo gasto na execução de cada atividade.

Sá (2009) elenca alguns cuidados que devemos tomar no processo de planejamento e posterior execução das atividades, dentre eles destacamos:

> - As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
> - Toda atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fazes: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;
> - As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> - As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele; (SÁ, 2009, p. 18).

Diante do exposto acima, acreditamos que o Ensino por Atividades é uma metodologia de ensino que proporciona ao aluno numa participação mais ativa no ambiente escolar e que garante uma relação de parceria entre professor e aluno processo de construção do saber. Ao final de cada tarefa, acreditamos também que o discente terá habilidade de (re)descobrir generalizações das leis matemáticas e isso fará com que o seu aprendizado seja mais prazeroso e efetivo.

1.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O uso adequado de uma metodologia de ensino é primordial para minimizar- ou até mesmo sanar- as dificuldades de aprendizagem nas aulas de matemática. Dessa forma, buscamos neste trabalho uma forma metodológica alternativa que busque oferecer aos discentes uma aprendizagem plena dos conteúdos a que forem submetidos, além de proporcionar aos alunos uma postura mais ativa e cooperativa no ambiente educacional, diferente das práticas usadas pelo modelo tradicional e, aos professores o papel coordenar a dinâmica de desenvolvimento das atividades propostas, estimulando e, em seguida, sistematizando o conhecimento em jogo.

Nesse contexto, optamos pelo uso da Sequência Didática, expressão esta que surgiu na França em meados dos 80 no âmago de uma reforma educacional.

O primeiro contato com a sequência didática ocorreu ao estarmos cursando a disciplina Métodos de Pesquisa no Ensino de Matemática no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará e notamos que se tratava de uma poderosa ferramenta no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Com esse intuito, buscamos nos aprofundar nas teorias que norteiam essa teoria e pesquisamos estudos que recorreram ao uso dessa metodologia.

Graça (2011) fez uma pesquisa com o uso de uma sequência didática que objetivou investigar os efeitos de um conjunto de atividades sobre o desempenho em resolução de problemas do 1º grau no 7º ano do ensino fundamental. Segundo o autor, a aplicação da metodologia de ensino mostrou uma contribuição relevante para o processo de ensino-aprendizagem, já que, inicialmente, os discentes participantes da pesquisa tiveram dificuldades em resolver problemas do 1º grau, entretanto, durante a experimentação os obstáculos foram superados.

Silva (2012) elaborou uma sequência didática que tinha como objetivo investigar a potencialidade do ensino de fatoração algébrica por atividades contendo um kit de fatoração algébrica "kit-2D" e jogos de baralho confeccionado pelo autor, sendo aplicada para alunos do 8º ano do ensino fundamental. Constatou-se que, após a experimentação, a maioria dos alunos, cerca de 88%, conseguiu fatorar corretamente mais de 59% das expressões algébricas, comprovando que é viável desenvolver o ensino de fatoração algébrica por atividades.

Santos (2013) aplicou uma sequência didática para alunos do 1º ano do ensino médio que tinha como objetivo investigar as contribuições de atividades para o processo de compreensão do conteúdo de funções afim e quadrática. A autora concluiu que os alunos tiveram relevantes evoluções no decorrer das sessões de ensino.

Motivados pelos resultados alcançados por estes e outros autores, elaboramos uma sequência didática que Zabala (1998, p.18) define como ″um conjunto atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos″.

Nas palavras de Costa e Peretti (2013),

> A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido. (COSTA E PERETTI, 2013, p. 6).

Para Teixeira e Passos (2013) uma sequência didática é conjunto de situações estruturadas ao longo de uma quantidade prefixada de aulas, que objetiva tornar possível a consecução de saberes, sem esgotar o objeto apurado, sem estabelecer, de imediato, o tempo de duração, em razão de que sua realização considera as necessidades e as dificuldades dos discentes no decorrer do processo.

Neste sentido, na elaboração de uma sequência didática, é necessário apresentar ao aluno atividades práticas, com o uso de material concreto e diferenciado, propondo desafios cada vez maiores aos alunos e permitindo a construção permanente do conhecimento.

O uso da sequência didática possibilita uma estrutura curricular particularizada, norteado na investigação do ensino com o uso de problemas do dia a dia, levando em conta situações que estimulem o discente a fazer uso do seu conhecimento prévio e do conhecimento difundido nos espaços de aprendizagem adquiridos dentro ou fora do ambiente escolar.

Dentre as definições apresentadas, nossa pesquisa adotou um modelo estruturante para a elaboração de sequências didáticas para o ensino de matemática proposto por Cabral (2017), definido como sendo:

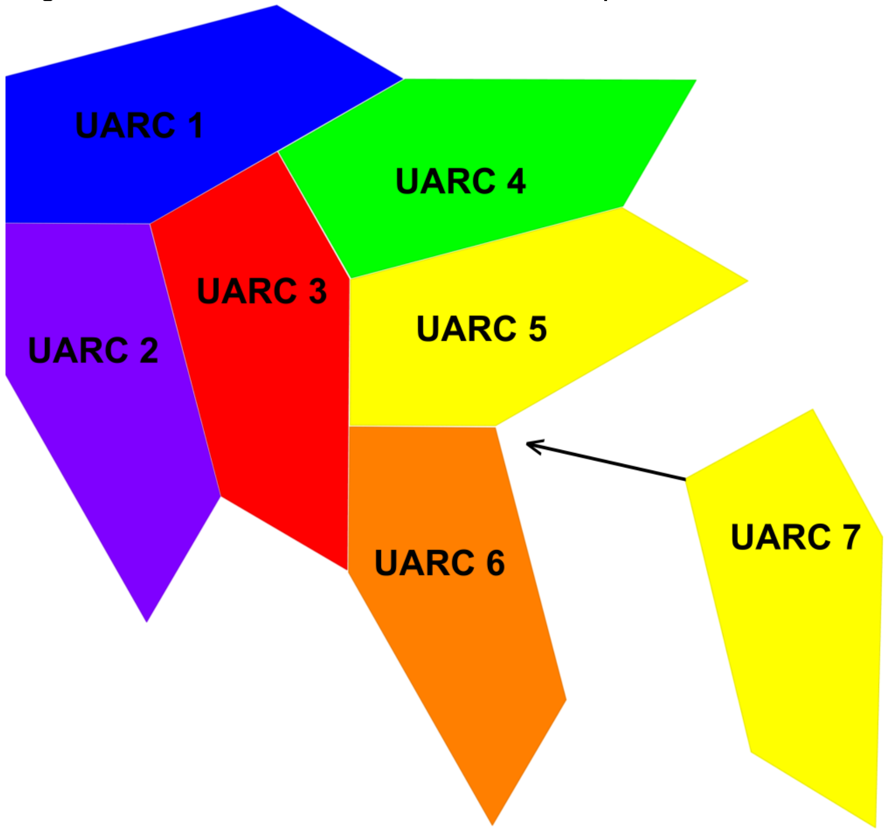
> Um conjunto articulado de dispositivos comunicacionais de natureza escrita ou oral que sistematiza as intervenções de ensino como a intencionalidade objetiva de estimular aprendizagem de algum conteúdo disciplinar de matemática a partir da percepção de regularidade e do estabelecimento de generalização adotando-se uma dinâmica de interações empírico-intuitivas. (CABRAL, 2017, p.12)

Cabral (2017) propõe, por analogia, que a reconstrução conceitual do objeto matemático seria determinado por uma superfície de área S, a partir de uma unidade previamente definida, a qual denominou de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC).

Para iniciar a reconstrução dos conceitos, Cabral (2017) adota uma segunda superfície "**s**", utilizada como primeira unidade de medida, denominada de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Primeira Geração (UARC-1), considerada como o "ponto de partida". Mediante a primeira escolha (UARC-1), o docente fará a sua segunda escolha condicionada, ou seja, este deverá tomar uma peça unitária imediatamente ligada à primeira denominada de Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual de Segunda Geração (UARC-2), sendo que o processo de definições das outras UARC's de gerações superiores segue o mesmo procedimento.

A seguir dispomos a estrutura de uma sequência didática composta de suas UARC's.

Figura 1: Modelo estruturante de uma sequência didática

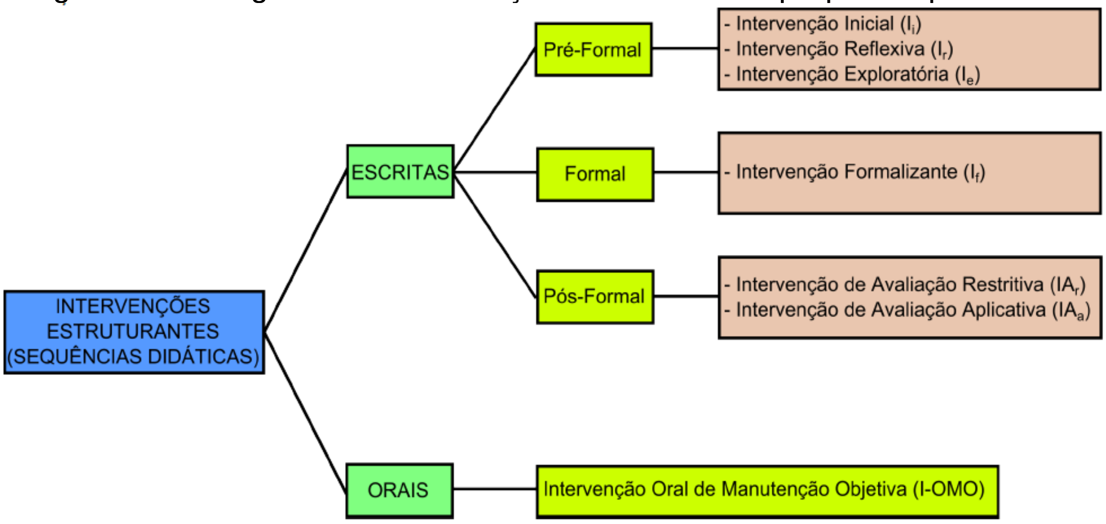


Fonte: Pereira (2017) – A partir de Cabral (2017)

Na figura, observamos que "é como estivéssemos revestindo um piso com placas de área unitária". (Cabral, 2017, p. 39).

Para compreender a dinâmica de uma UARC, Cabral (2017) descreve em termos de seis categorias estruturantes do texto que materializam uma sequência didática que são: Intervenção Inicial (I_i), Intervenção Reflexiva (I_r), Intervenção Exploratória (I_e), Intervenção Formalizante (I_f), Intervenção Avaliativa Restritiva (IA_r) e Intervenção Avaliativa Aplicativa (IA_a). Vejamos a seguir uma visão geral das intervenções estruturantes, que podem ser escritas ou orais, de uma sequência didática proposta por Cabral (2017), sendo o termo "Intervenção" adotado em razão de que exista uma intencionalidade nas ações dirigidas pelo professor perante seus alunos.

Figura 2: Visão geral das Intervenções estruturantes propostas por Cabral



Fonte: Pereira (2017) – Adaptado de Cabral (2017)

Segue abaixo uma síntese do significado das intervenções estruturantes escritas de uma sequência didática proposta por Cabral (2017).

Quadro 1: Significado das intervenções estruturantes escritas

Tipo de intervenção	**Significado**
Intervenção Inicial	É o aporte inicial de um discurso dialógico-didático que serve para que o professor estimule seus alunos a perceber de forma empírico-intuitiva regularidades funcionais de um determinado conceito matemático.
Intervenção Reflexiva	Caracteriza-se por um questionamento que se refere a um ou mais aspectos relacionados ao conceito objeto de reconstrução. Nesse sentido, o papel do professor é orientar seus alunos a levantar hipóteses, fazer conjecturas, verificar possibilidades e estabelecer consequências.
Intervenção Exploratória	Tem como objetivo aprofundar o olhar do aluno em relação às respostas obtidas das Intervenções Reflexivas e serão dadas a partir da solicitação da execução de certos procedimentos de curta duração por parte dos alunos, sendo estes convidados a fazerem simulações, experimentações, descrições, preencher tabelas, elaborar gráficos e observações.
Intervenção Formalizante	Aqui o aluno elabora generalizações empírico-intuitiva a partir de regularidades observadas durante as Intervenções Estruturantes Reflexivas e Exploratórias e, após essas generalizações, o professor, enuncia a Intervenção formalizante, isto é, o professor reelabora as verdades "redescobertas" pelos alunos com um acabamento formal dos conceitos matemáticos.
Intervenção Avaliativa Restritiva	Tem a finalidade de verificar a aprendizagem do conceito objeto de reconstrução, buscando apreciar a aprendizagens dos discentes, baseados em dois aspectos fundamentais do saber matemático: O que é o objeto matemático em estudo? (o significado, o sentido) e, como se justificam e operam os algoritmos decorrentes? (propriedades e operações).
Intervenção Avaliativa Aplicativa	Sua finalidade está centrada na Resolução de Problemas de Aplicação. É um nível mais elevado de avaliação do processo de aprendizagem, pois é indispensável que o aluno seja capaz de mobilizar os conceitos associados às propriedades operacionais resultantes (algoritmos) em situações que envolvam resolução de problemas aplicados a vários contextos, sejam eles reais e/ou abstratos, mas que sejam adequados ao seu nível de ensino.

Fonte: Autor (2017) – A partir de Cabral (2017)

Outro tipo de Intervenção Estruturante concebida por Cabral (2017), entendida como uma espécie de Sequência Didática implícita complementar, são aquelas as quais chamou de Interversões Orais de Manutenção Objetiva (I-OMO), “sustentada no discurso do professor durante todo o processo de ensino-aprendizagem e que permite a ele fazer as reformulações emergentes inevitável no processo de reconstrução conceitual”. (CABRAL, 2017, p. 45).

Nessa perspectiva, elaboramos uma sequência didática para mediar o processo de ensino-aprendizagem de razão e proporção.

1.3 TESTE DE NIVELAMENTO

Na perspectiva de identificar o grau de conhecimento e habilidades de assuntos que servirão de pré-requisitos para os alunos avançarem diante do conteúdo de Razão e Proporção, aplicamos um Teste de Nivelamento em Matemática que serviu como indicador do nível de conhecimentos adquiridos pelos discentes, em relação a conteúdos já estudados em anos anteriores, e que contemplou, principalmente, questões relacionadas a conteúdos que servirão de suporte para o desenvolvimento das atividades da sequência didática.

O Teste de Nivelamento foi dividido em duas partes: um teste com questões objetivas (Apêndice A) e outro contento somente questões subjetivas (Apêndice B). No primeiro, composto por 15 questões, os objetivos foram verificar se o aluno estava adaptado com o tipo de linguagem proposta pela Matemática e se ele tinha a capacidade de reconhecer o tipo de conteúdo abordado. No segundo teste, composto por 17 questões, nosso principal objetivo foi detectar as dificuldades que os alunos possuem no desenvolvimento de cálculos.

Nas discursões e investigações do Grupo de Pesquisa em História da Matemática e Educação Matemática na Amazônia (GHEMAZ) desenvolvido na Universidade do Estado do Pará e liderado pelos professores Miguel Chaquiam e Natanael Freitas Cabral estruturamos um modelo de diagrama que mostra os conteúdos relevantes no desenvolvimento do ensino e aprendizagem de conteúdo específico, o qual denomina-se diagrama de conceitos circunscritos.

A seguir apresentamos um modelo de diagrama de conceitos circunscritos para os conteúdos de Razão e Proporção.

Figura 3: Diagrama dos conceitos circunscrito de Razão e Proporção

Fonte: Próprio autor

O diagrama nos mostra alguns conteúdos relevantes (números inteiros, números racionais, equações do 1º grau com uma e com duas incógnitas e unidades de medidas) que deram suporte para o desenvolvimento dos assuntos propostos. As setas indicam a real necessidade do conhecimento desses conteúdos favoráveis ao bom desempenho das atividades a que nos propomos.

2ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO

Como objetivo de encontrar referências sobre o Ensino de Razão e Proporção e de obter informações para a elaboração da sequência didática, além de averiguar as tendências temáticas utilizadas e os aspectos metodológicos abordados pelos autores fizemos uma pesquisa em livros didáticos e em sites relacionados a este objeto de estudo.

Os trabalhos foram coletados em bancos de dados como Google Acadêmico, PROFMAT, PUC- SP, Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), Comunicações Científicas dos anais dos congressos vinculados a Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM e Periódicos CAPES. Na busca foram usados os termos “Ensino de Razão”, “Ensino de Proporção” e “Proporcionalidade”. A partir dessa busca encontramos várias referências no formato digital, no entanto, consideramos apenas trabalhos a partir de 2010.

Diante disso, catalogamos5 (cinco) estudos, entre teses, dissertações, monografia de especialização e artigos, alémde 3 (três) livros didáticos.

Nas informações obtidas nos estudos levantados identificamos algumas propostas de atividades que se mostraram relevantes para os sujeitos pesquisados mediante cada contexto. As metodologias adotadas foram desde a utilização de recursos envolvendo pesquisas documentais até recursos utilizando softwares como suporte mediadores da aprendizagem, evidenciando, assim, uma gama de tendências educacionais que se utilizadas isoladamente ou em conjunto apontam melhoras no processo de aprendizagem dos conteúdos abordados.

A seguir apresentamos uma visão geral dos objetivos e das dificuldades presentes nos trabalhos contemplados nesta pesquisa.

Quadro 2: Síntese dos estudos sobre o ensino de razão e proporção

Natureza do trabalho	Autor (es)	Tema	Instituições/ periódicos	Objetivo (s)	Dificuldades
Tese	Fioreze (2010)	Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: Uma análise a partir da teoria dos campos conceituais	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Investigar a utilização de atividades digitais no processo de construção da estrutura do pensamento multiplicativo envolvendo a proporcionalidade, para estudantes do Ensino Fundamental, tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais.	Dificuldades cognitivas do conceito de proporcionalidade e das possibilidades de representação, além de rupturas na resolução das tarefas que envolvem este conteúdo.
Artigo	Nogueira Júnior (2010)	Ensino de Razão e Proporção na Perspectiva Curricular de Rede	X ENEM	Verificar como a organização curricular em rede pode ser estabelecida mesmo em ambientes de aprendizagem formatados pela organização curricular linear e compartimentada	Alguns livros didáticos apresentam uma tendência linear na apresentação das propriedades e aplicações de razão e proporção, reforçada por listas de exercícios mecanizados que permeiam grande parte do capítulo.
Dissertação	Melo (2013)	A lousa digital no ensino de razão e proporção: uma análise das interações	Universidade Federal de Pernambuco	Analisar a atividade docente com o uso da Lousa Digital em aulas de Razão e Proporção, com foco na interação	Quando não havia material preparado para ser usado com os recursos da Lousa Digital, houve uma limitação na apresentação do conteúdo. Não se observou a flexibilidade de uso da Mídia num processo de aproveitamento de recursos computacionais para discutir dúvidas advindas dos alunos.
Livro didático	Dante (2009)	Tudo é Matemática	Editora Ática	Estudar vários assuntos ligados à ideia de proporcionalidade, como velocidade, escala, porcentagem e outros.	Poucas questões criativas e raramente aborda um contexto da vida diária, além da falta de questões de provas externas como ENEM, Prova Brasil e Olimpíadas.

Continua

Conclusão

Livro didático	Centurión e Jakubovic (2012)	Matemática: teoria e contexto	Editora Saraiva	Apresentar as noções de razão e proporção	Traz um breve comentário sobre velocidade média, densidade demográfica e porcentagem. Não mostra outras propriedades de proporção e não propõe questões relacionadas a outras áreas de conhecimento ou com um nível mais avançado para resolução como de Olimpíadas e ENEM.
Livro didático	Silveira (2015)	Matemática: compreensão e realidade	Editora Moderna	Trabalhar os conceitos de razão, bem como sua aplicação na solução de problemas que envolvam grandezas de mesma natureza e de naturezas diferentes e trabalhar o conceito de proporção, suas propriedades e aplicações.	A falta da exploração dos conhecimentos prévios dos discentes.
Monografia de especialização	Menegat (2010)	Uma nova forma de ensinar razão e proporção	Universidade federal do Rio Grande do Norte	Buscar uma maneira diferente de ensinar razão e proporcionalidade, uma forma que realmente dê significado ao conteúdo.	Dificuldade da aplicação do conceito de proporcionalidade na Geometria, no cálculo de escalas, de grandezas, na redução de unidades de medidas, na questão que envolve frações e a própria multiplicação.
Dissertação	Paula (2012)	Razão com taxa: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática	Universidade Federal de Juiz de Fora	Investigar o ensino do tema razão como taxa na sala de aula de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental através da inserção de tarefas que estimulassem a produção de significados dos estudantes	Dificuldades de nossos alunos em lidar com problemas que envolvem frações, razões e proporções.

Fonte: Autor (2018)

3PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE RAZÃO E O ENSINO PROPORÇÃO

Nesta seção apresentamos o conjunto de atividades referentes ao ensino e aprendizagem de razão e proporção, além de dispor questões de aprofundamento referente às atividades desenvolvidas.

Para o desenvolvimento dessa sequência didática, dividimos as atividades em dois grupos: no primeiro grupo temos atividades para o ensino de razão e, no segundo grupo, atividades para o ensino de proporção.

3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE RAZÃO

Este primeiro grupo da sequência didática condiz a 11 atividades para o ensino de Razão. Estas atividades foram elaboradas com o objetivo de realizar comparação entre grandezas, definir razão, representar uma razão e nomear os seus termos, além de utilizar apresentar algumas razões importantes utilizadas no dia a dia das pessoas.

Atividade 01: Comparando grandezas
Objetivo: Verificar a existência de situações de comparações entre grandezas.
Material: Folha de atividades impressa, caneta ou lápis.
Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Entregar para cada aluno uma folha com a atividade e solicitar que resolvam as questões.
Procedimento:
[I_i-EP]: Em um dia de pescaria, Eduardo, o pescador, conseguiu pescar apenas três peixes de uma mesma espécie. Ele pescou um peixe pelo período da manhã, outro à tarde e outro à noite, com mostra esta ilustração.

Figura 4: Comparação entre grandezas

Fonte: Almeida (2014)

[I$_e$]: Em que período do dia Eduardo pescou o peixe de maior comprimento?

[I$_e$]: Explique como você chegou a esta conclusão.

Análise a priori: Nosso objetivo nesta atividade é fazer com que os alunos percebam a existência de diversas situações nas quais devemos estabelecer comparações entre grandezas. Assim, a imagem que indica o período em que Eduardo pescou o maior peixe foi à tarde. Essa conclusão pode ser evidenciada comparando o comprimento do peixe (que são iguais em todas as situações)com o comprimento do pescador, por exemplo, (que são diferentes). Nesta atividade, pretendemos também explorar os conhecimentos prévios dos discentes, situação não apresentada em Silveira (2015).

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientaros alunos a lerem com atenção o problema com o intuito de perceberem o peixe de maior tamanho;
3- Após alguns minutos, questionar sobre as respostas encontradas pelos discentes;

4- Caso os discentes não encontrem o resultado esperado, uma vez que os peixes se apresentam do mesmo tamanho, orientá-los a observar o tamanho do Eduardo e do peixe. Nesse momento pode ser feita a seguinte pergunta: **O pescador de maior tamanho garante também que o peixe é maior?**
5- Após a percepção de que o peixe maior foi pescado no **turno da tarde**, conduza os alunos a responderem que para perceber o peixe de maior tamanho foi necessário fazer uma **comparação entre o tamanho do peixe e o tamanho do pescador**. Os alunos também podem chegar à resposta comparando o peixe com a vara ou a linha de pescar.
6- Finalizar dialogando com a turma de que existem muitas situações no dia a dia nas quais fazemos comparações.

Atividade 02: A ideia de razão

Objetivo: Realizar a comparação entre grandezas por meio de uma divisão.

Material: Folha de atividades impressa e caneta ou lápis.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e, após entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade e solicitar que resolvam as questões propostas.

Procedimento:

[I_i-EP]: Certo produto é vendido em uma embalagem contendo dois produtos, como na figura.

[I_e]: Qual o preço de cada produto?

[I_e]: Como você chegou a esta conclusão?

[I_r]: Qual operação você utilizou para chegar ao resultado?

[I_e]: Registre o processo matemático que você utilizou para encontrar o valor de cada produto.

[I_i-EP]: Num supermercado havia uma placa que indicava o preço do pacote do papel higiênico.

Figura 5: Embalagem com papel higiênico

Fonte: Próprio autor

[I_e]: Qual o preço de rolo de papel higiênico?

[I_e]: Como você chegou a esta conclusão?

[I_r]: Qual operação você utilizou para chegar ao resultado?

[I_e]: Registre o processo matemático que você utilizou para encontrar o valor de cada produto.

[I_i-EP]: Tomando por base um funcionário que recebe R$ 120,00 por 8 horas de trabalho em certa empresa da região, quanto esse funcionário recebe por cada hora de trabalho? Registre os seus cálculos.

[I_e]: Com base na resolução de cada uma das **[I_i-EP]** que foram propostas, preencha o quadro abaixo:

[I_i-EP]	**Como você chegou ao resultado?**	**Qual a operação utilizada?**
01		
02		
03		

[I_r]: O que você pode concluir após a resolução das questões e do preenchimento do quadro?

[I_f]: Nas questões respondidas anteriormente foram feitas **comparações.** Quando comparamos dois valores, duas medidas ou duas grandezas (tudo aquilo que pode ser contado e medido, como o tempo, a velocidade, comprimento, preço, idade, temperatura entre outros), estamos determinando uma relação entre dois números que os representam. Quando essa relação é determinada por uma divisão, chamamos de **razão**.

[IA$_a$]: Faça o que se pede.

a) Marcelo é jogador de basquete. No último campeonato que disputou ele fez 150 pontos em 10 partidas. Quantos pontos ele fez aproximadamente em cada jogo?

b) Marta faz bolos para revender. Ela vendeu 35 bolos em uma semana. Quantos bolos foram vendidos, aproximadamente, por dia?

c) Certo time de futebol marcou 18 gols em 6 jogos. Quantos gols esse time fez, aproximadamente, por jogo?

[IA$_a$]: Todos dizem que o sabão em pó Claro e o sabão em pó Brancoso são iguais em qualidade, mas diferem no preço e na quantidade.

Figura 6: Caixas com sabão em pó

Fonte: Centurión e Jakubovic (2012)

a) Qual é a razão entre as massas do sabão Claro e do Brancoso?

b) Qual é a razão entre os preços do sabão Claro e do Brancoso?

c) Marcela foi ao supermercado e ficou indecisa sobre qual caixa de sabão em pó levar, qual é a compra mais vantajosa para ela?

[IA$_a$]: Certo molho de tomate é vendido por R$ 2,40 em caixas de 200 g e por R$ 4,50 em caixas de 450 g. Qual das duas embalagens é mais econômica para o consumidor?

***Análise a priori*:**Esta atividade foi elaborada com o objetivo de direcionar comparações por meio de uma divisão e que, matematicamente, dá a ideia de razão. Essa ideia será concretizada com o preenchimento do quadro no final das **[I$_i$-**

EP]. Concordamos com Almeida (2015) quando propõe o uso das razões para comparar situações e tomar decisões no momento da compra de produtos oferecidos em embalagens com quantidades diferentes. Daí, no decorrer da resolução das **[IA$_a$]**, são propostas questões criativas e que abordam um contexto real do aluno, além de intervenções avaliativas de provas externas, como ENEM, propostas estas não apresentadas em Dante (2009). As dificuldades mais relevantes que os alunos poderão apresentar estão relacionadas à realização da operação divisão, no entanto, será fornecida uma calculadora para efetuar os cálculos necessários. Reforçamos que, ao final de cada atividade, é realizada uma intervenção oral com a turma para tornar a experimentação mais dinâmica e sanar as dúvidas dos alunos quando existirem e, assim, tentar sanar as dificuldades apresentadas no trabalho de Melo (2013).

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a lerem com atenção cada um dos problemas a fim de que resolvam corretamente;
3- Questionar a respeito da operação matemática utilizada nos problemas propostos para encontrar o resultado desejado, neste caso, o uso da operação divisão;
4- Conduzir os alunos a preencher o quadro no final da atividade, fazendo com que percebam que para chegar ao resultado foram feiras comparações entre grandezas;
5- Finalizar com a formalização do conteúdo, afirmando que as comparações realizadas tratam-se de razões.
6- Apresentar as questões de aprofundamento para que sejam resolvidas.

Atividade 03: Representação e leitura de uma razão

Objetivo1: Representar uma razão.

Objetivo 2: Fazer a leitura de uma razão.

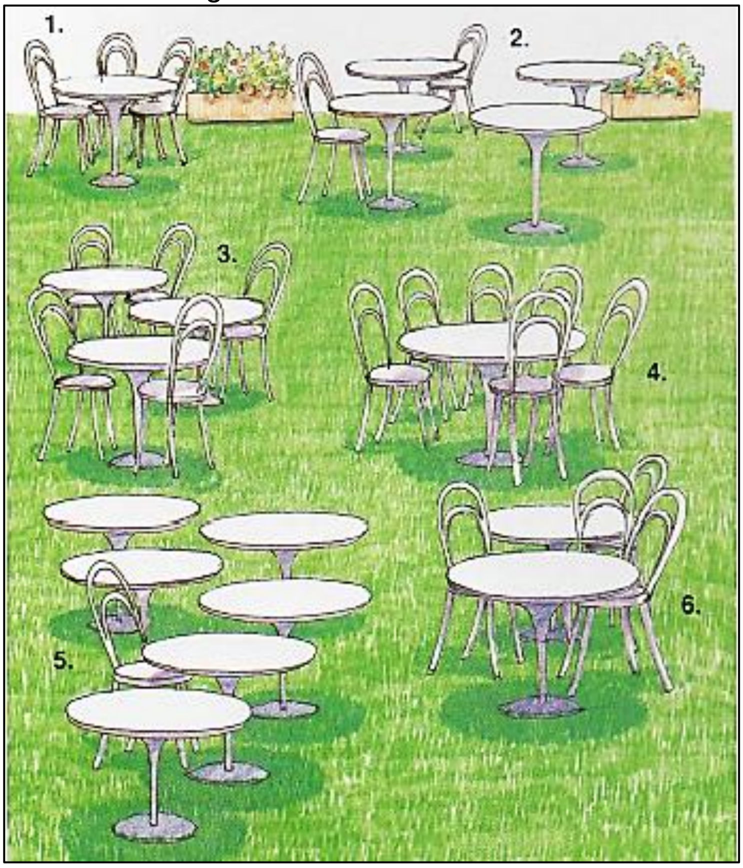
Material: Folha de atividades impressa, caneta ou lápis.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos, entregar para cada discente uma folha com a atividade e solicitar que resolva as questões a seguir.

Procedimento:

[I_i-EP]: Observe o desenho.

Figura 7: Mesas e cadeiras



Fonte: Smootthey (1998)

Agora, com relação ao desenho, responda:

[I_e]: Na situação 1, há **quantas mesas** para **quantas cadeiras**?

[I_e]: Na situação 4, há **quantas mesas** para **quantas cadeiras**?

[I_e]: Na situação 2, há **quantas cadeiras** para **quantas mesas**?

[I_e]: Na situação 5, há **quantas cadeiras** para **quantas mesas**?

Ainda com relação ao desenho:

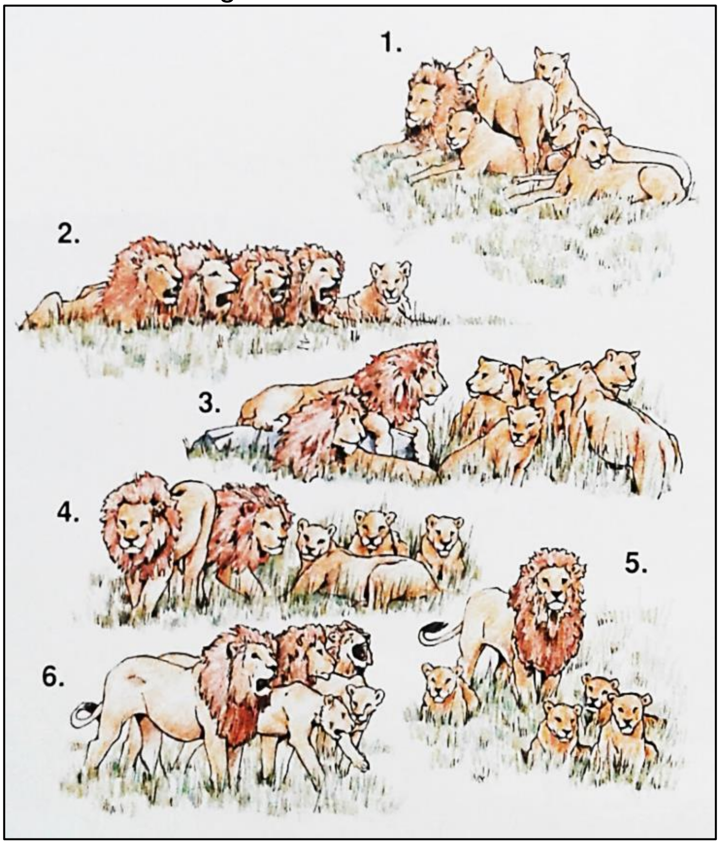
[I_e]: em qual situação **há2 mesas para 4 cadeiras**?

[I_e]: em qual situação, **há 5 cadeiras para 3 mesas**?

[I_f]: Em matemática, a pergunta "**Há quantas mesas para quantas cadeiras?**" é equivalente à pergunta "**Qual a razão entre o número de mesas e o número de cadeiras?**".

[I_i-EP]: Observe o desenho abaixo:

Figura 8: Leões e leoas



Fonte: Smootthey (1998)

Agora, com relação ao desenho:

[I$_e$]: Na situação 1, qual a razão entre o **número de leões** e o **número de leoas**?

[I$_e$]: Na situação 4, qual a razão entre o **número de leões** e o **número de leoas**?

[I$_e$]: Na situação 5, qual a razão entre o **número de leoas** e o **número de leões**?

[I$_e$]: Na situação 2, qual a razão entre o **número de leoas** e o **número de leões**?

Ainda com relação ao desenho:

[I$_e$]: qual a situação em que a razão é de**2 leoas para 3 leões**?

[I$_e$]: qual a situação em que a razão é de **2 leões para 5 leoas**?

[I$_f$]: A expressão “2 leoas para3 leões” é representada simbolicamente por $2:3$ ou $\frac{2}{3}$

(lê-se: dois está para três).

[I$_i$-EP]: Represente por uma razão cada uma das situações.

a) Há 5 analfabetos para cada 20 habitantes.

b) 2 alunos gostam de Matemática de cada 10.

c) Um dia de sol para cada dois dias de chuva.

d) Para fazer um suco, usam-se 3 litros de sumo de laranja e 2 litros de água.

e) No mundo, nascem 105 homens para cada 100 mulheres.

[IA$_a$]: Escreva uma razão para representar cada uma das frases.

a) Um corretor de imóveis recebe R$ 5,00 de comissão para cada R$ 10,00 em imóveis vendidos.

b) Um time de futebol feminino venceu 15 dos 22 jogos que disputou.

c) Melissa acertou 17 das 20 questões de uma prova.

d) No Brasil, o combustível usado nos carros movidos a gasolina tem sido, na verdade, um composto em que há 1 litro de álcool anidro para cada 4 litros de composto.

e) Numa classe, 9 foram aprovados para cada 10 alunos.

[IA$_a$]: Como se lê as seguintes razões?

a) $\frac{7}{4}$

b) $\frac{10}{9}$

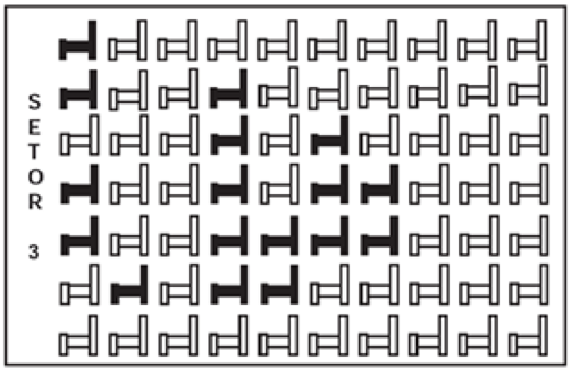
c) $\frac{1}{15}$

d) $\frac{27}{16}$

e) $\frac{51}{100}$

f) $\frac{9}{1000}$

[IA$_a$]: (ENEM 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

a) $\frac{17}{70}$ b) $\frac{17}{53}$ c) $\frac{53}{70}$ d) $\frac{53}{17}$ e) $\frac{70}{17}$

[IA$_a$]: Para fazer uma salada de frutas foram utilizados 4 abacaxis, 20 bananas, 8 laranjas, 6 maçãs e 2 mamões. Determine a razão entre o número:

a) de abacaxis e o de laranjas;

b) de maçãs e o de mamões;

c) laranjas e o de bananas;

d) de abacaxis e o total de frutas;

e) de bananas e o total de frutas;

f) total de frutas e o de mamões.

[IA_a]: Uma das maneiras de avaliar a saúde de uma população é a **taxa de mortalidade infantil**.

Trata-se de uma razão: para cada 1000 crianças que nascem em determinada região, conta-se quantas morrem antes de completar um ano. Dados divulgados em 2010 pelo IBGE indicam que a taxa de mortalidade infantil está diminuindo: passou de 32 crianças mortas por 1000 nascidas vivas em 1998 para 22 em 2010.

Mesmo tendo diminuído, a taxa de mortalidade infantil no país ainda é considerada alta pelos padrões da OMS (Organização Mundial de Saúde): a meta a ser alcançada é de 15 crianças mortas por 1000 nascidas vivas.

a) Escreva a razão que indica a taxa de mortalidade infantil no Brasil em 2010.

b) É melhor que essa taxa seja menor ou maior?

c) Qual a taxa recomendada pela OMS?

Análise a priori: Com esta atividade objetivamos representar e fazer a leitura de uma razão. Dessa forma, os alunos serão direcionados a responder as intervenções propostas e com os resultados obtidos nesta atividade, os discentes perceberão que uma razão pode ser representada por meio de uma fração ou divisão, além de realizar a sua leitura corretamente e, assim, sanar as dificuldades encontradas no trabalho de Fioreze (2010) no qual verificou que alunos participantes dessa pesquisa não possuíam conhecimentos de razão e, além disso, trabalhar questões diferenciadas e não mecanizadas com o intuito de minimizar as dificuldades encontradas no trabalho de Nogueira Júnior (2010).

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Instruir os discentes a lerem com atenção o que se pede no problema;
3- Apresentar a solução de um dos itens iniciais de cada um dos problemas, caso seja necessário;
4- Mostrar a representação matemática de uma razão e como é feita a sua leitura;
5- Propor as questões de aprofundamento aos discentes com o objetivo de fixar o que foi proposto na atividade.

Atividade 04: Identificando os termos de uma razão.

Objetivo: Identificar o antecedente e o consequente de uma dada razão.

Material: Folha de atividades impressa, caneta ou lápis.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos e entregar para cada aluno uma folha com as atividades.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o seguinte quadro.

Razão	**1º número da razão**	**2º número da razão**
$\frac{2}{5}$		
$\frac{7}{4}$		
$\frac{3}{11}$		
$\frac{21}{100}$		
$\frac{45}{67}$		
$\frac{1}{10}$		

[I_f]: O 1º número da razão é chamado **antecedente** e o 2º número da razão é o **consequente**. O antecedente e o consequente são os termos da razão.

[I_r]: Note que, como foi citado, uma razão possui dois termos. Sendo assim, qual seria o antecedente e o consequente das razões abaixo?

a) 6 — antecedente: __________ consequente: __________

b) 8 — antecedente: __________ consequente: __________

c) 23 — antecedente: __________ consequente: __________

[I_r]:O que você pode concluir em relação ao consequente das razões dadas?

[I_r]: Dadas as seguintes razões: $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$ e $\frac{12}{12}$.

a) O que você pode concluir em relação ao antecedente e ao consequente de cada uma das razões dadas?

b) Como podemos representar de maneira simplificada cada uma dessas razões?

c) O que você pode concluir em relação a razões representadas dessa forma?

[IA$_a$]: Indique o antecedente e o consequente em cada uma das razões.

a) 12 para 7 b) 6 para 11 c) $3:20$

d) $5\frac{1}{3}:\frac{12}{5}$ e) $\frac{18}{25}$ f) $\frac{17}{9}$

[IA$_a$]: Escreva uma razão, sabendo que:

a) o antecedente é 5 e o consequente é 9.

b) o antecedente é 8 e o consequente é 3.

c) o antecedente é 1 e o consequente é 6

d) o consequente é 7 e o antecedente é 10.

e) o consequente é 1 e o antecedente é 9.

f) o consequente é 1 e o antecedente é 2.

[IA$_a$]: O salário de Paulo é de R$ 2.000,00 e João tem um salário de R$ 1.000,00. Qual a razão de um salário para outro?

[IA$_a$]: Eu tenho uma estatura de 1,80 m e meu filho tem apenas 60 cm. Qual é a razão de nossas alturas?

Análise *a priori:*Com essa atividade, esperamos que os alunos adquiram prática quanto à identificação dos termos de uma razão (antecedente e consequente).Alguns alunos não perceberão, de imediato, que o 2º número, por exemplo, da razão 6 é o 1. Mas, após as discussões em sala de aula a dificuldade será superada.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientarcada discente a fazer corretamente o preenchimento do quadro proposto na atividade;
3- Apresentar a formalização matemática dos termos que constituem uma razão, reiterando que o 1° número é denominado **antecedente** e o 2° número é chamado **consequente**;
4- Instigar os alunos a respeito de razões que não aparece o consequente, fazendo-os perceber que nesses casos o mesmo vale 1.

5- Apresentar razões cujo antecedente e consequente são iguais, conduzindo-os a perceber que essas razões, após a simplificação, representam a unidade;
6- Direcionar questões de aprofundamento aos alunos para fixar o que foi proposto na atividade.

Atividade 05: Razões inversas

Objetivo: Descobrir uma relação entre o produto de duas razões dadas.

Material: Folha de atividades impressa, caneta ou lápis.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos, entregar para cada aluno uma folha com a atividade e solicitar que resolvam assituações problema.

Procedimento:

[I_i-EP]: Marcela acertou 15 das 20 questões propostas pelo seu professor em uma atividade na aula de Matemática.

[I_e]: Qual a razão entre o número de questões que Marcela acertou e o número total de questões da atividade?

[I_e]: Qual a razão entre o número total de questões da atividade e o número de questões que Marcela acertou?

[I_r]: O que você observou nas razões obtidas nos itens a) e b)?

[I_e]: Calcule o produto entre essas razões?

[I_i-EP]: Ivan e Silvio caminham no parque todos os dias. Ontem Ivan caminhou 2000 metros e Silvio, 3500 metros.

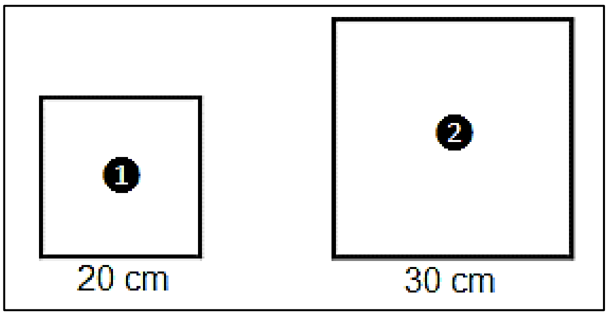
[I_e]: Qual a razão entre a distância percorrida por Ivan e a distância percorrida por Silvio, na forma irredutível?

[I_e]: Qual a razão entre a distância percorrida por Silvio e a distância percorrida por Ivan, na forma irredutível?

[I_r]: O que você observou nas razões obtidas nos itens a) e b)?

[I_e]: Calcule o produto entre essas razões?

[I_i-EP]: Luciano recortou dois pedaços de cartolina, de forma quadrada, nas seguintes medidas:



De acordo com a figura:

[I$_e$]: Qual a razão entre a medida do lado do quadrado ❶ e a medida do lado do quadrado ❷?

[I$_e$]: Qual a razão entre a medida do lado do quadrado ❷ e a medida do lado do quadrado ❶?

[I$_r$]: O que você observou nas razões obtidas nos itens a) e b)?

[I$_e$]: Calcule o produto entre essas razões?

[I$_r$]: O que podemos concluir em relação àúltima **[I$_e$]** de cada uma das questões?

[I$_f$]: Quando o produto entre duas razões é igual a 1 e o antecedente de uma for igual ao consequente da outra, elas recebem o nome de **razões inversas**, isto é, uma razão é o inverso da outra.

[IA$_a$]: Verifique se o par de razões são inversas. Justifique.

a) $\frac{9}{5}$ e $\frac{5}{9}$

c) $\frac{6}{10}$ e $\frac{6}{5}$

e) $\frac{1}{12}$ e 12

b) $\frac{8}{7}$ e $\frac{7}{5}$

d) $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$

f) $\frac{12}{5}$ e $\frac{5}{12}$

[IA$_a$]: Determine a razão inversa de cada razão dada.

a) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{1}{5}$

e) 4

b) $\frac{23}{8}$

d) $\frac{1}{17}$

f) 10

[IA$_a$]: Em uma classe de 35 alunos, 19 são meninas.

a) Determine a razão entre o número de meninas e o número de meninos.

b) Determine a razão entre o número de meninos e o número de meninas.

c) As razões obtidas nos itens anteriores são inversas? Por quê?

Análise *a priori:*Ao receberem a folha de atividades, os alunos deverão resolver as questões, assim esperamos que os mesmos não tenham dificuldade em realizar a tarefa. Ao observar os dados, os alunos perceberão que a diferença entre as razões obtidas está na troca de posição do antecedente com o consequente, as quais são chamadas razões inversas, e compreenderão que o produto entre elas é sempre 1. Dessa forma, deverão concluir que para determinar a razão inversa de uma razão dada, devemos permutar (trocar) os seus termos e quando o produto entre duas razões é 1, então temos duas razões inversas. O uso de problemas na reconstrução deste conceito é uma tentativa de contornar as dificuldades quanto à interpretação de problemas e a aplicação de estratégias de resolução encontradas no trabalho de Paula (2012).

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a lerem com atenção cada um dos problemas com o intuito de que resolvam corretamente;
3- Instigar a respeito dos termos das razões obtidas – o antecedente de uma razão é o consequente da outra;
4- Levar os discentes a perceberem que o produto entre duas razões inversas é igual a 1;
5- Apresentar a formalização matemática de duas razões inversas;
6- Propor questões de aprofundamento aos alunos para fixar o conteúdo.

Atividade 06: Razões na forma decimal

Objetivo: Descobrir uma relação entre razões escritas na forma fracionária e decimal.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos e entregar para cada aluno uma folha de atividades.

Procedimento:

[I_i-EP]:Preencha o quadro a seguir com o auxílio de uma calculadora.

Razão	Antecedente	Consequente	Divisão do antecedente pelo consequente
$\frac{2}{5}$			

$\frac{9}{10}$			
$\frac{7}{4}$			
$\frac{2}{3}$			
$\frac{12}{6}$			

[I_f]: Quando dividimos o antecedente de uma razão pelo seu respectivo consequente, obtemos uma razão equivalente, escrita na forma decimal.

[IA_a]: Escreva as razões na forma decimal.

a) $\frac{6}{10}$

b) $\frac{9}{27}$

c) $\frac{48}{16}$

d) $\frac{29}{100}$

Análise *a priori:*Ao receberem a folha de atividades, os alunos deverão realizar os procedimentos indicados no quadro. Ao observar os dados, os alunos compreenderão que é possível também representar uma razão na forma decimal. Novamente a dificuldade mais relevante está relacionada à realização da divisão.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar cada discente a fazer corretamente o preenchimento do quadro proposto na atividade;
3- Indagar os alunos a respeito da representação da razão obtida na última coluna do quadro (razão na forma decimal);
4- Apresentar a formalização matemática de uma razão escrita na forma decimal;
5- Aplicar questões de aprofundamento aos alunos para fixar o conteúdo abordado.

Atividade 07: Razões entre grandezas de mesma natureza

Objetivo: Conhecer algumas razões adimensionais muito utilizadas no nosso dia a dia.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos, entregar para cada aluno uma folha com as atividades e solicitar que resolvam as questões a seguir.

Procedimento:

[I_i-EP]: Em um mapa, a distância em linha reta entre Brasília e Palmas, é $10\,cm$. Sabendo que a distância real entre as duas cidades é de $700\,km$, calcule a razão entre a distância entre as cidades no mapa e a distância real. (Dica: Converter $700\,km$ em cm e escrever a razão na forma de fração irredutível).

[I_i-EP]: Uma urna contém 4 bolas brancas, 6 bolas pretas e 10 bolas vermelhas. Qual a razão entre o número de possibilidades de retirar da urna uma bola preta e o total de bolas dessa urna?

[I_f]: Em matemática, a razão entre:

i) a distância em um desenho e a distância real é equivalente a calcular a **escala** de um desenho;

ii) o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades é equivalente a calcular a**probabilidade** de um determinado resultado em um experimento aleatório.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a lerem com atenção cada um dos problemas com o intuito de que resolvam corretamente;
3- Instigar os alunos a respeito da unidade de medida resultante de cada uma das razões encontradas, reiterando que se trata de **razões adimensionais**;
4- Apresentar a formalização matemática de **escala** e **probabilidade**, exemplos de algumas razões especiais por serem muito utilizadas no cotidiano.

Atividade 08: Razões entre grandezas de naturezas diferentes

Objetivo: Identificar algumas razões dimensionais muito utilizadas no nosso dia a dia.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos, entregar para cada aluno uma folha com as atividades e solicitar que resolvam as questões a seguir.

Procedimento:

[I_i-EP]:Preencha o quadro a seguir de acordo com as orientações. Use calculadora, se necessário.

Questão	Razão na forma fracionária	Razão na forma decimal
Um trem percorreu a distância de 450 km em 6 horas. Qual a entre a distância e tempo percorrido por esse trem?		
A população do estado do Ceará, segundo levantamento demográfico feito pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 2014, era estimada em 8.842.791 habitantes. A área do estado é de $148886\ km^2$. Qual a razão entre o número de habitantes e a área ocupada por esse estado?		
Durante uma viagem de 90 km, o carro de Marcos consumiu 10 litros de combustível. Qual a razão entre a distância percorrida nessa viagem e a quantidade de combustível consumida nessa viagem?		

[I_f]: Em matemática, a razão entre:

i) distância percorrida e tempo gasto por um móvel é equivalente a calcular a **velocidade média** desse móvel;
ii) o número de habitantes de uma região e a sua área ocupada é equivalente a calcular a **densidade demográfica** dessa região;
iii) a distância percorrida e a quantidade de combustível consumida em uma viagem é equivalente a calcular o **consumo médio** nessa viagem.

[IA_a]: Um terreno tem $20\,cm$ de comprimento. Numa planta, ele tem $4\,cm$ de comprimento. Qual é a escala da planta?

[IA_a]: A planta de uma casa está na escala de $1{:}50$. Um comprimento de $8\,cm$ na planta corresponde a quantos metros na realidade?

[IA$_a$]: O comprimento real de um jardim é de $15\ m$. Uma maquete desse jardim foi construída utilizando-se uma escala de $1:300$. Qual a medida, em centímetros, do comprimento dessa maquete?

[IA$_a$]: Um quadriciclo fez um percurso de 168 km em três horas. Qual foi a sua velocidade média?

[IA$_a$]: Com 30 l de combustível, um veículo percorreu 255 km de um rali. Qual é o consumo médio desse carro no rali?

[IA$_a$]: Uma cidade tem 180.000 habitantes e área de 1200 km^2. Qual é sua densidade demográfica?

[IA$_a$]: Segundo dados do IBGE, Minas Gerais tem área de 586.520 km^2 e a população, em 2014, era de 2.0734.097 habitantes. Qual era, aproximadamente, a sua densidade demográfica em 2014?

[IA$_a$]: Quanto tempo gasta um carro para percorrer 340 km com velocidade média de 85 km/h?

[IA$_a$]: Quantos quilômetros percorre um carro com velocidade média de 90 km/h em 3 horas e 30 minutos?

[IA$_a$]: Beatriz foi de São Paulo a Campinas (92 km) em seu carro. O carro de Beatriz consumiu oito litros de combustível. Qual o consumo médio do carro de Beatriz?

[IA$_a$]: Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par?

[IA$_a$]: Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número maior que 12?

Análise *a priori:*Ao receberem a folha de atividades, os alunos deverão realizar os procedimentos indicados nos quadros contemplados nas atividades 7 e 8. Ao observar os dados, os alunos compreenderão que existem algumas razões que são muito utilizadas no nosso cotidiano e que as unidades de medida podem ou não ser canceladas. Nesse momento, o professor indaga sobre as unidades de medida resultante de cada uma das razões obtidas, além de abrir discussões a respeito das razões especiais apresentadas nasduas atividades, apresentando outros exemplos sobre o que cada uma delas representa. O objetivo principal desta atividade é fazer com que os alunos se familiarizem com esses tipos de razões, ditas por autores de livros didáticos como especiais, por exemplo, em Dante (2009), e a realização de cálculos com essas razões, no esforço de sanar as dificuldades apontadas na consulta realizadas com discentes de matemática e em Paula (2012), que realizou uma pesquisa intitulada **razão como taxa** e não pouco evidenciada na obra de Centurión e Jakubovic (2012).

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a lerem com atenção cada um dos problemas com o intuito de que resolvam corretamente;
3- Orientar os alunos que se atentem sobre a unidade de medida resultante de cada uma das razões obtidas, reiterando que se trata de **razões dimensionais**;
4- Apresentar a formalização matemática de **velocidade média, densidade demográfica** e **consumo médio**, exemplos de razões especiais por serem muito utilizadas no nosso cotidiano.
5- Propor questões de aprofundamento aos alunos que contemple as duas atividades anteriores com o objetivo de fixar os conceitos abordados.

Atividade 09: Razões centesimais

Objetivo: Descobrir uma relação entre razões escritas na forma fracionária e decimal.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos e entregar para cada aluno uma folha com as atividades.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o seguinte quadro.

Razão	Antecedente	Consequente
$\frac{1}{100}$		
$\frac{5}{100}$		
$\frac{9}{100}$		
$\frac{17}{100}$		
$\frac{21}{100}$		
$\frac{145}{100}$		

O que você observou em relação ao consequente? ______________________________

[I_f]: Toda razão, na qual $b = 100$, pode ser escrita na forma de porcentagem, com o símbolo %. Assim, por exemplo, a razão $\frac{7}{100}$ é equivalente a 7%.

Análise *a priori*:Ao receberem a folha de atividades, os alunos deverão realizar os procedimentos indicados no quadro. Ao observar os dados, os alunos compreenderão que existem razões nas quais o consequente é 100 e que damos o nome de porcentagem.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os discentes a fazerem corretamente o preenchimento do quadro proposto na atividade;
3- Orientar os alunos a observar o consequente de cada uma das razões, reiterando que se trata de **razões centesimais**;
4- Instigar os alunos a respeito de uma forma equivalente de representar uma razão centesimal (na forma de porcentagem);
5- Apresentar a formalização matemática da porcentagem.

Atividade 10: Transformação de uma razão fracionária em porcentagem

Objetivo: Descobrir uma relação entre razões escritas na forma fracionária e percentual.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos e entregar para cada aluno uma folha com as atividades.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o seguinte quadro com o auxílio de uma calculadora.

Razão	**Qual o número natural que multiplicado pelo consequente dá 100?**	**Qual a razão obtida quando multiplicamos esse número por cada um dos termos da razão inicial?**	**Forma percentual**
$\frac{1}{2}$			

$\frac{37}{50}$			
$\frac{3}{4}$			
$\frac{21}{25}$			
$\frac{7}{10}$			
$\frac{2}{5}$			
$\frac{14}{20}$			

O que você observou em relação ao consequente da razão inicial?

Análise *a priori*:Ao receberem a folha de atividades, os alunos deverão realizar os procedimentos indicados no quadro. Ao observar os dados, os alunos compreenderão que o consequente é um fator natural de 100 e, dessa forma, a razão pode ser escrita na forma percentual.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os discentes a fazerem corretamente o preenchimento do quadro proposto na atividade;
3- Desafiar os alunos a encontrar um número natural que multiplicado pelo antecedente e pelo consequente de uma dada razão a transforma em uma razão centesimal;
4- Preencher uma linha do quadro, caso seja necessário;

Atividade 11: Transformação de uma razão fracionária em porcentagem

Objetivo: Descobrir uma relação entre razões escritas na forma fracionária e percentual.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora.

[I_i-EP]: Preencha o seguinte quadro com o auxílio de uma calculadora.

Razão	Razão na forma decimal	Razão na forma percentual
$\frac{1}{8}$		
$\frac{5}{16}$		
$\frac{2}{3}$		

$\frac{8}{15}$		
$\frac{20}{33}$		
$\frac{17}{40}$		
$\frac{58}{75}$		

O que você observou em relação ao consequente da razão inicial?

____

[IAₐ]: Escreva na forma de porcentagem cada uma das seguintes razões.

a) $\frac{51}{100}$

d) $\frac{7}{5}$

g) $0{,}045$

b) $0{,}03$

e) $\frac{15}{8}$

h) $\frac{8}{3}$

c) $\frac{11}{20}$

f) $\frac{12{,}5}{100}$

i) $\frac{3}{7}$

[IAₐ]: As razões a seguir estão escritas na forma percentual. Escreva-as na forma de números fracionários.

a) 55%

b) 8%

c) 10%

d) 120%

Análise *a priori:*Ao receberem a folha de atividades, os alunos deverão realizar os procedimentos indicados no quadro. Ao observar os dados, os alunos compreenderão que há razões em que o consequente não é um fator natural de 100, mas que também podem ser escritas na forma percentual. Na verdade, esse processo pode ser utilizado para qualquer razão, independente do consequente que ela apresenta. Pretendemos, assim, atenuar as dificuldades apresentadas numa pesquisa com discentes egressos do 7º ano do Ensino Fundamentale apontadasem uma consulta a professores de matemática presentes no trabalho de Lobato Júnior (2018).

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os discentes a preencher corretamente o quadro proposto na atividade;

3- Desafiar os alunos a encontrar um número natural que multiplicado pelo antecedente e pelo consequente de uma dada razão a transforma em uma razão centesimal, o que não será possível;
4- Mostrar com o preenchimento de uma linha do quadro que, nesse caso, para obter uma razão na forma percentual é necessário primeiramente transformar a razão na forma decimal, dividindo o antecedente pelo consequente, e, por conseguinte, fazer os ajustes necessários;
5- Aplicar questões de aprofundamento aos alunos que contemple as três últimas atividades para fixar os conceitos abordados.

3.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROPORÇÃO

As atividades que se seguem, de 01 a 11, fazem parte do segundo grupo de atividades da sequência didática, relacionadas ao Ensino de Proporção. Estas atividades foram elaboradas com o intuito de definir proporções e nomear os seus termos, além de utilizar suas propriedades.

ATIVIDADE 01: Definindo proporção
Objetivo 1: Descobrir uma relação entre duas razões.
Objetivo 2: Explorar as formas de representação e a leitura de uma igualdade de razões.
Material: Caneta ou lápis, roteiro de atividade e dicionário.
Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir os alunos em grupos, entregar para cada aluno uma folha com as atividades e um dicionário e solicitar que resolvam as questões seguintes.
Procedimento:
[I_i-EP]: Em uma partida de basquete, Lucas fez 20 arremessos e acertou 12. Já André fez 10 arremessos e acertou 6. Nessas condições:
[I_e]: Calcule a razão, na forma irredutível, entre o número de arremessos e o número de acertos feitos por Lucas.
[I_e]: Calcule a razão, na forma irredutível, entre o número de arremessos e o número de acertos feitos por André.
[I_r]: O que você observou em relação às razões obtidas nos itens anteriores?

[I_i-EP]: Dora fez um teste de 30 questões e acertou 20. Samuel, de um total de 15 questões, acertou 10.

[I_e]: Qual o desempenho de cada um, ou seja, determine a razão, na forma irredutível, entre o número de questões do teste e o número de acertos feitos por cada um?

[I_e]: Qual o significado das razões obtidas no item anterior?

[I_r]: Quem teve mais acertos?

[I_i-EP]: Um funcionário A recebe R$ 90,00 por 6 horas de trabalho. Um outro funcionário B recebe R$ 135,00 por 9 horas de trabalho. Qual dos dois funcionários recebe mais? Justifique sua resposta.

[I_f]: Se duas razões são iguais, elas formam uma proporção. Assim, se a razão entre os números **a** e **b** é igual à razão entre os números **c** e **d**, dizemos que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ é uma proporção. A leitura da proporção representada por $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ pode feita da seguinte forma: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**. Outra forma de representar uma proporção é $a:b=c:d$.

[IA_r]: Como é a leitura da proporção $\frac{20}{12}=\frac{10}{6}$? E da proporção $\frac{30}{20}=\frac{15}{10}$?

[IA_r]: Represente de outra forma as proporções $\frac{20}{12}=\frac{10}{6}$ e $\frac{30}{20}=\frac{15}{10}$.

[IA_a]: Verifique se os seguintes pares de razões formam uma proporção.

a) $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$

b) $10:15$ e $6:9$

c) $\frac{7}{6}$ e $\frac{14}{10}$

d) $12:30$ e $110:50$

[IA_a]: Verifique se os números abaixo, na ordem em que aparecem, formam uma proporção.

a) 4, 6, 20 e 30

b) 1, 6, 3 e 12

c) 3, 5, 20 e 33

d) 2, 10, 3 e 15

Análise *a priori:* Com a habilidade adquirida nas atividades anteriores, os discentes não terão muitas dificuldades para resolver as questões. É possível que não entendam o significado da palavra “desempenho” e, assim, não saberão resolver a

2ª questão. Nesse momento, o professor entrega a cada grupo um dicionário para pesquisarem o desejado e notarão que terão que realizar o mesmo processo da questão anterior. Ao final da atividade perceberão que as razões obtidas em cada uma das questões representam o mesmo valor, as quais são chamadas de proporção. Com isso, pretendemos atenuar as dificuldades dos alunos evidenciadas no trabalho de Fioreze (2010) ao detectar que os mesmos não possuíam poucos conhecimentos de proporção, além de dar ênfase conceitual ao assunto, situação pouco evidenciada na obra de Menegat (2010), além de trabalhar os conceitos de proporção de forma mais elaborada, oportunizando a exploração das situações apresentadas, contexto pouco explorado em Centurión e Jakubovic (2012).

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a lerem com atenção cada um dos problemas a fim de que resolvam corretamente;
3- Desafiar os alunos a simplificar cada uma das razões obtidas nos problemas para depois comparar os resultados finais, no intuito de perceber a igualdade entre duas razões;
4- Mostrar exemplos de simplificação de razões, caso os discentes apresentem dificuldades no processo;
5- Dispor um dicionário para que os alunos busquem o significado de palavras que causem dúvidas na resolução do problema, tal como a palavra “desempenho”;
6- Apresentar a formalização matemática de proporção, a sua representação e como fazer a leitura correta;
7- Propor questões de aprofundamento aos alunos para fixar os conceitos abordados.

ATIVIDADE 02: Identificando os termos de uma proporção

Objetivo: Nomear os termos de uma proporção.

Material: Caneta, lápis e roteiro de atividade impresso.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento: Preencha o quadro a seguir de acordo com o que se pede.

Proporção	**Represente esta proporção de outra forma**	**Que termos estão no início e no fim da proporção?**	**Na proporção, que termos estão antes e depois da igualdade?**
$\frac{1}{8}=\frac{5}{40}$			
$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$			
$\frac{8}{15}=\frac{16}{20}$			
$\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$			
$\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$			
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$			

[I$_f$]: Os termos que estão no início e no fim de uma proporção são chamados de **extremos** e os termos que estão antes e depois da igualdade são chamados de **meios**. Os extremos e os meios são os termos da proporção.

[IA$_a$]: Preencha o quadro com os termos de cada proporção dada.

Proporção	a	b	c	d
$\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$				
$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$				
$2:7=6:21$				
$20:15=4:3$				

[IA$_a$]: Destaque os extremos com □ e os meios com ○ em cada proporção a seguir.

a) $10:65=2:13$

b) $5:9=10:18$

c) $\frac{10}{27}=\frac{30}{81}$

d) $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$

e) $\frac{3}{11}=\frac{15}{55}$

Análise *a priori:* Esta atividade será desenvolvida com os alunos em sala de aula após ser trabalhado o conceito de proporção e as formas de representá-la. Diante desta habilidade, os discentes terão que identificar os termos de uma proporção: os meios e os extremos. A intervenção do professor se dá no momento da formalização dos conceitos. No entanto, antes dessa formalização, o professor pode perguntar aos discentes que sugestões eles dariam para nomear tais termos. Acreditamos que, durante as discussões, a resposta seja satisfatória.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;
3- Fazer o preenchimento de uma linha do quadro para sanar as dúvidas dos discentes, caso ocorra;
4- Desafiar os alunos a sugerir um possível nome para os termos de uma proporção – meios e extremos;
5- Se os alunos não nomearem corretamente os termos que compõem uma proporção, instigá-los com questionamentos do tipo: "**Os valores que estão no meio de uma proporção podem ser chamados de __________.**" ou "**Os valores que estão na extremidade de uma proporção podem ser chamados de __________.**" Ao final, apresentar a formalização desejada.
6- Dispor aos alunos questões de aprofundamento para fixar o que foi estudado.

ATIVIDADE 03: Propriedade Fundamental da Proporção

Objetivo: Descobrir uma relação entre o produto dos meios e dos extremos de uma proporção.

Material: Caneta, lápis e roteiro de atividade.

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-CP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	Quem são os extremos?	Quem são os meios?	É uma proporção?	Determine o produto dos extremos	Determine o produto dos meios
$\frac{3}{2}$ e $\frac{9}{6}$					

$\frac{1}{4}\ e\ \frac{2}{8}$					
$\frac{2}{5}\ e\ \frac{50}{20}$					
$\frac{20}{8}\ e\ \frac{10}{4}$					
$\frac{12}{9}\ e\ \frac{15}{10}$					

[I_r]: O que você percebe ao comparar o resultado da 4ª coluna com as 5ª e 6ª colunas?

____

[I_f]: Numaproporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa. Esta é a **propriedade fundamental das proporções.**

[IA_a]: Considerando que a, b, c e d sejam números reais racionais quaisquer e que, nessa ordem, formam uma proporção:

a) Comovocê representa essa proporção?

b) Quem são os extremos?

c) Quem são os meios?

d) Qualo produto dos extremos?

e) Qual o produto dos meios?

e) De acordo com a propriedade fundamental das proporções, o que você pode concluir em relação aos resultados dos itens d) e e)?

f) Represente matematicamente a sua conclusão do item e).

g) Utilizandoasinformações dos itens a) e g), represente matematicamente a propriedade fundamental das proporções.

[IA_a]: Aplicando a propriedade fundamental, verifique se os seguintes pares de razões formam uma proporção:

a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{9}$ b) $\frac{13}{16}$ e $\frac{4}{6}$ c) $\frac{4}{10}$ e $\frac{6}{4}$ d) $\frac{3}{15}$ e $\frac{1}{5}$

[IA_a]: Eu e minha irmã somos loucos por pasteizinhos. Outro dia exageramos: para cada 2 pastéis que ela comeu, eu comi 3. Minha irmã, sozinha, comeu 16 pasteizinhos.

a) Quantos pastéis eu comi?

b) Quantos pastéis nós dois comemos juntos?

[IA_a]: Uma prova de matemática, a razão de número de questões que Talita acertou para o número total de questões foi de 5 para 7. Quantas questões Talita acertou sabendo-se que a prova era composta de 35 questões?

[IA_a]: No 1º semestre houve 3 avaliações de matemática, cada uma delas com quantidade diferente de questões. A tabela mostra a quantidade de questões que3 determinados alunos acertaram em cada prova. Os valores são tais que os números de acertos foram proporcionais aos números de questões por prova.

Aluno (a)	**Nº de questões por prova**	**Nº de questões acertadas**
Meire	40	25
Fran	8	5
Luana	16	X

O número de questões que Luana acertou na 3ª prova foi:

a) 8. b) 9. c) 10. d) 11. e) 12.

[IA_a]: Utilizando a propriedade fundamental das proporções, calcule o valor de x.

a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{12}$ b) $\frac{2}{x} = \frac{14}{21}$ c) $\frac{1}{6} = \frac{5}{x}$ d) $\frac{7}{2} = \frac{x}{6}$

Análise a priori: Os alunos terão que preencher a tabela, de modo a perceber a relação entre o produto dos termos de uma proporção. Esperamos que os alunos não tenham dificuldades na realização dos cálculos com valores numéricos, no entanto, provavelmente terão um pouco de dificuldade quando enunciarem a propriedade na forma genérica.Caso os discentes não percebam que, no caso de uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, o professor pode fazer perguntas do tipo “A igualdade $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ é uma proporção?” e “Em caso afirmativo, o que podemos afirmar sobre o produto dos meios e dos extremos e vice-versa?”. Com a obtenção das habilidades adquiridas pelos alunos nesta atividade, propomos algumas intervenções aplicativas diferenciadas com o intuito de minimizar as dificuldades apontadas no trabalho de Menegat (2010), cujos alunos tiveram dificuldades em resolver questões dessa natureza.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;

3- Desafiar os discentes a simplificar as razões propostas em cada linha do quadro, com a finalidade de comparar os resultados finais e verificar se essas razões formam ou não uma proporção;
4- Fazer o preenchimento de uma linha do quadro para sanar possíveis dúvidas dos discentes;
5- Desafiar os alunos a fazerem a representação genérica da **propriedade fundamental das proporções**, dados quatro números reais quaisquer;
6- Apresentar a formalização matemática da propriedade fundamental das proporções;
7- Propor aos alunos questões de aprofundamento para fixar a propriedade apresentada.

Atividade 04: Propriedade da soma dos termos de uma proporção

Objetivo: Descobrir uma relação da razão entre a soma dos termos de uma proporção e seu respectivo antecedente.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora (opcional).

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	**As razões formam uma proporção? ***	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{a+b=}$	$\boldsymbol{c+d=}$	$\boldsymbol{\frac{a+b}{a}=}$	$\boldsymbol{\frac{c+d}{c}=}$
$\frac{1}{3}\ e\ \frac{2}{6}$									
$\frac{5}{20}\ e\ \frac{10}{40}$									
$\frac{2}{7}\ e\ \frac{3}{14}$									
$\frac{1}{12}\ e\ \frac{3}{35}$									
$\frac{25}{15}\ e\ \frac{10}{6}$									
$\frac{11}{9}\ e\ \frac{3}{2}$									

*** Dica**: Verifique se as razões formam uma proporção usando a propriedade fundamental das proporções.

[I_r]: O que podemos concluir ao comparar as duas últimas colunas, quando cada par de razões formarem uma proporção?

[I_f]: Em toda proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o primeiro, assim como a soma dos dois últimos termos está para o terceiro.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

Análise a priori: Os alunos deverão preencher a tabela de acordo com os comandos dados nas colunas e tomando como base os valores numéricos fornecidos na primeira coluna. Os alunos poderão ter dificuldades na formulação da proporção. No caso de dúvidas sobre a leitura dos comandos explicaremos detalhadamente, com base em um exemplo. A ideia central é que o aluno perceba uma relação entre a soma dos dois primeiros termos da proporção e seu respectivo antecedente com a soma dos dois últimos termos da proporção e seu respectivo antecedente, sendo que a igualdade só vai acontecer quando as razões formarem uma proporção. Além disso, esta atividade, juntamente com as outras que seguem, busca, com a aplicação de intervenções avaliativas aplicativas, solucionar as dificuldades quanto à interpretação de problemas e a aplicação de propriedades na resolução, sendo estas propriedades não exploradas na obra de Centurión e Jakubovic (2012).

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;
3- Desafiar os discentes a verificar, utilizando a propriedade fundamental das proporções, se as razões propostas em cada linha do quadro formam ou não uma proporção;
4- Fazer o preenchimento de uma linha do quadro para sanar possíveis dúvidas dos discentes;
5- Auxiliar os alunos na observação das regularidades encontradas ao fazer o preenchimento do quadro desta atividade;
6- Orientar no preenchimento das conclusões dos alunos, conduzindo-os a verificar o que acontece quando duas razões formam ou não uma proporção;
7- Apresentar a formalização matemática da propriedade da proporção em estudo.

Atividade 05: Propriedade da soma dos termos de uma proporção

Objetivo: Descobrir uma relação da razão entre a soma dos termos de uma proporção e seu respectivo consequente.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora (opcional).

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	**As razões formam uma proporção?**	$\boldsymbol{a+b=}$	$\boldsymbol{c+d=}$	$\boldsymbol{\frac{a+b}{b}=}$	$\boldsymbol{\frac{c+d}{d}=}$
$\frac{1}{3}\ e\ \frac{2}{6}$					
$\frac{5}{20}\ e\ \frac{10}{40}$					
$\frac{2}{7}\ e\ \frac{3}{14}$					
$\frac{1}{12}\ e\ \frac{3}{35}$					
$\frac{25}{15}\ e\ \frac{10}{6}$					
$\frac{11}{9}\ e\ \frac{3}{2}$					

[I_r]: O que podemos concluir ao comparar as duas últimas colunas, quando cada par de razões formarem uma proporção?

____

[I_f]: Em toda proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o segundo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o quarto.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Análise a priori: Os alunos deverão preencher o quadro de acordo com os comandos dados nas colunas e tomando como base os valores numéricos fornecidos na primeira coluna. A partir dessa atividade, esperamos que os alunos não apresentem dificuldadese, em caso de dúvidas, utilizaremos a mesma estratégia da atividade anterior. A ideia central é que o aluno perceba uma relação entre a soma dos dois primeiros termos da proporção e seu respectivo consequente com a soma dos dois últimos termos da proporção e seu respectivo consequente.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;

3- Desafiar os discentes a verificar, utilizando a propriedade fundamental das proporções, se as razões propostas em cada linha do quadro formam ou não uma proporção;
4- Auxiliar os alunos na observação das regularidades encontradas ao fazer o preenchimento do quadro desta atividade;
5- Orientar no preenchimento das conclusões dos alunos, conduzindo-os a verificar o que acontece quando duas razões formam ou não uma proporção;
6- Desafiar os alunos a formalizar matematicamente a propriedade da proporção que lhes foi apresentada;
7- Apresentar a formalização matemática da propriedade da proporção em estudo;

Atividade 06: Propriedade da diferença dos termos de uma proporção

Objetivo: Descobrir uma relação da razão entre a diferença dos termos de uma proporção e seu respectivo antecedente.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora (opcional).

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	As razões formam uma proporção?	$\boldsymbol{a-b=}$	$\boldsymbol{c-d=}$	$\boldsymbol{\frac{a-b}{a}=}$	$\boldsymbol{\frac{c-d}{c}=}$
$\frac{4}{2}\ e\ \frac{12}{6}$					
$\frac{7}{5}\ e\ \frac{20}{15}$					
$\frac{5}{20}\ e\ \frac{10}{40}$					
$\frac{6}{9}\ e\ \frac{14}{18}$					

[I_r]: O que podemos concluir ao comparar as duas últimas colunas, quando cada par de razões formarem uma proporção?

___

[I_f]: Em toda proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro, assim como a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$$

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;
3- Desafiar os discentes a verificar, utilizando a propriedade fundamental das proporções, se as razões propostas em cada linha do quadro formam ou não uma proporção;
4- Auxiliar os alunos na observação das regularidades encontradas ao fazer o preenchimento do quadro desta atividade;
5- Orientar no preenchimento das conclusões dos alunos, conduzindo-os a verificar o que acontece quando duas razões formam ou não uma proporção;
6- Desafiar os alunos a formalizar matematicamente a propriedade da proporção que lhes foi apresentada;
7- Apresentar a formalização matemática da propriedade da proporção em estudo;

Atividade 07: Propriedade da diferença dos termos de uma proporção

Objetivo: Descobrir uma relação da razão entre a diferença dos termos de uma proporção e seu respectivo consequente.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora (opcional).

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	**As razões formam uma proporção?**	$\boldsymbol{a-b=}$	$\boldsymbol{c-d=}$	$\boldsymbol{\frac{a-b}{b}=}$	$\boldsymbol{\frac{c-d}{d}=}$
$\frac{4}{2}\ e\ \frac{12}{6}$					
$\frac{7}{5}\ e\ \frac{20}{15}$					
$\frac{5}{20}\ e\ \frac{10}{40}$					
$\frac{6}{9}\ e\ \frac{14}{18}$					

[I_r]: O que podemos concluir ao comparar as duas últimas colunas, quando cada par de razões formarem uma proporção?

____

[I_f]: Em toda proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o segundo, assim como a diferença dos dois últimos termos está para o quarto.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Análise a priori: Com relação às atividades 6 e 7 que têm como objetivo descobrir uma relação da razão entre a diferença dos termos de uma proporção e seu respectivo antecedente (ou consequente), esperamos que os alunos não apresentem dificuldades no preenchimento da tabela, pois estarão familiarizados com o procedimento realizado em atividades anteriores.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;
3- Desafiar os discentes a verificar, utilizando a propriedade fundamental das proporções, se as razões propostas em cada linha do quadro formam ou não uma proporção;
4- Auxiliar os alunos na observação das regularidades encontradas ao fazer o preenchimento do quadro desta atividade;
5- Orientar no preenchimento das conclusões dos alunos, conduzindo-os a verificar o que acontece quando duas razões formam ou não uma proporção;
6- Desafiar os alunos a formalizar matematicamente a propriedade da proporção que lhes foi apresentada;
7- Apresentar a formalização matemática da propriedade da proporção em estudo;

Atividade 08: Propriedade da soma dos antecedentes e dos consequentes de uma proporção

Objetivo: Descobrir uma relação da razão entre a soma dos antecedentes e a soma dos consequentes de uma proporção.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora (opcional).

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	As razões formam uma proporção?	$\boldsymbol{a+c=}$	$\boldsymbol{b+d=}$	$\boldsymbol{\frac{a+c}{b+d}=}$	$\boldsymbol{\frac{a}{b}=}$
$\frac{1}{2}\ e\ \frac{3}{6}$					
$\frac{5}{10}\ e\ \frac{20}{30}$					
$\frac{2}{7}\ e\ \frac{4}{6}$					
$\frac{16}{12}\ e\ \frac{4}{3}$					

[I_r]: O que podemos concluir ao comparar as duas últimas colunas, quando cada par de razões formarem uma proporção?

____

[I_f]: Em toda proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como o primeiro antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$$

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;
3- Desafiar os discentes a verificar, utilizando a propriedade fundamental das proporções, se as razões propostas em cada linha do quadro formam ou não uma proporção;
4- Auxiliar os alunos na observação das regularidades encontradas ao fazer o preenchimento do quadro desta atividade;
5- Orientar no preenchimento das conclusões dos alunos, conduzindo-os a verificar o que acontece quando duas razões formam ou não uma proporção;
6- Desafiar os alunos a formalizar matematicamente a propriedade da proporção que lhes foi apresentada;
7- Apresentar a formalização matemática da propriedade da proporção em estudo;

Atividade 09: Propriedade da soma dos antecedentes e dos consequentes de uma proporção

Objetivo: Descobrir uma relação da razão entre a soma dos antecedentes e a soma dos consequentes de uma proporção.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora (opcional).

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	**As razões formam uma proporção?**	$\boldsymbol{a+c=}$	$\boldsymbol{b+d=}$	$\boldsymbol{\frac{a+c}{b+d}=}$	$\boldsymbol{\frac{c}{d}=}$
$\frac{1}{2}\ e\ \frac{3}{6}$					
$\frac{5}{10}\ e\ \frac{20}{30}$					
$\frac{2}{7}\ e\ \frac{4}{6}$					
$\frac{16}{12}\ e\ \frac{4}{3}$					

[I_r]: O que podemos concluir ao comparar as duas últimas colunas, quando cada par de razões formarem uma proporção?

____

[I_f]: Em toda proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como o segundo antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$$

Análise a priori: Os alunos deverão preencher as tabelas das atividades 8 e 9 para perceberem que a ideia central é que acontece uma regularidade entre a razão da soma dos antecedentes e a soma dos consequentes da proporção com a primeira (ou segunda) razão.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;

3- Desafiar os discentes a verificar, utilizando a propriedade fundamental das proporções, se as razões propostas em cada linha do quadro formam ou não uma proporção;
4- Auxiliar os alunos na observação das regularidades encontradas ao fazer o preenchimento do quadro desta atividade;
5- Orientar no preenchimento das conclusões dos alunos, conduzindo-os a verificar o que acontece quando duas razões formam ou não uma proporção;
6- Desafiar os alunos a formalizar matematicamente a propriedade da proporção que lhes foi apresentada;
7- Apresentar a formalização matemática da propriedade da proporção em estudo;

Atividade 10: Propriedade da diferença dos antecedentes e dos consequentes de uma proporção

Objetivo: Descobrir uma relação da razão entre a diferença dos antecedentes e a diferença os consequentes de uma proporção.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora (opcional).

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) integrante do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	**As razões formam uma proporção?**	$\boldsymbol{a-c=}$	$\boldsymbol{b-d=}$	$\boldsymbol{\frac{a-c}{b-d}=}$	$\boldsymbol{\frac{a}{b}=}$
$\frac{8}{6}\ e\ \frac{3}{5}$					
$\frac{4}{7}\ e\ \frac{16}{28}$					
$\frac{5}{20}\ e\ \frac{10}{40}$					
$\frac{6}{11}\ e\ \frac{7}{13}$					

[I_r]: O que podemos concluir ao comparar as duas últimas colunas, quando cada par de razões formarem uma proporção?

____

[I_f]: Em toda proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como o primeiro antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$$

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;
3- Desafiar os discentes a verificar, utilizando a propriedade fundamental das proporções, se as razões propostas em cada linha do quadro formam ou não uma proporção;
4- Auxiliar os alunos na observação das regularidades encontradas ao fazer o preenchimento do quadro desta atividade;
5- Orientar no preenchimento das conclusões dos alunos, conduzindo-os a verificar o que acontece quando duas razões formam ou não uma proporção;
6- Desafiar os alunos a formalizar matematicamente a propriedade da proporção que lhes foi apresentada;
7- Apresentar a formalização matemática da propriedade da proporção em estudo;

Atividade 11: Propriedade da diferença dos antecedentes e dos consequentes de uma proporção

Objetivo: Descobrir uma relação da razão entre a diferença dos antecedentes e a diferença os consequentes de uma proporção.

Material: Folha de atividades, caneta ou lápis, calculadora (opcional).

Dinâmica de desenvolvimento da atividade: Dividir a turma em grupos e entregar para cada aluno (a) do grupo uma folha com esta atividade.

Procedimento:

[I_i-EP]: Preencha o quadro abaixo de acordo com o que está indicado.

Razões	As razões formam uma proporção?	$\boldsymbol{a-c=}$	$\boldsymbol{b-d=}$	$\boldsymbol{\frac{a-c}{b-d}=}$	$\boldsymbol{\frac{c}{d}=}$
$\frac{8}{6}\ e\ \frac{3}{5}$					
$\frac{4}{7}\ e\ \frac{16}{28}$					

$\frac{5}{20}$ e $\frac{10}{40}$					
$\frac{6}{11}$ e $\frac{7}{13}$					

[I_r]: O que podemos concluir ao comparar as duas últimas colunas, quando cada par de razões formarem uma proporção?

____

[I_f]: Em toda proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como o segundo antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

[IA_a]: Aplicando as propriedades, determine os números *x* e *y* em cada uma das seguintes proporções:

a) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, sabendo que $x + y = 28$.

b) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, sabendo que $x + y = 90$.

c) $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$, sabendo que $x - y = 12$.

d) $\frac{x}{6} = \frac{y}{5}$, sabendo que $x - y = 15$.

[IA_a]: A razão entre as massas de alumínio e de oxigênio na substância óxido de alumínio é igual a $\frac{8}{7}$. Calcule as massas de alumínio e de oxigênio necessárias para formar 51 g de óxido de alumínio.

[IA_a]: A produção de uma metalúrgica, em certo dia, obedeceu à razão de 9 para 10 entre o número de determinado modelo de panela e o número de suas tampas. Sabendo que o total dessas unidades é 2.280, qual o número de panelas e de tampas que foi produzido nesse dia?

[IA_a]: A razão entre a idade do meu pai e a da minha mãe é $\frac{12}{11}$ e a diferença de suas idades é 5 anos. Qual é a idade de cada um?

Análise a priori: O objetivo destas últimas atividades (10 e 11) é descobrir uma relação da razão entre a diferença dos antecedentes e a diferença os consequentes com uma razão de uma dada proporção. Caso os alunos tenham dúvidas sobre a leitura dos comandos explicaremos, detalhadamente, com base em um exemplo e, assim, chegar a uma conclusão convincente. Observe que ao final das atividades sobre outras propriedades da proporção, apresentamos algumas intervenções avaliativas com o intuito resolver dificuldades na resolução de problemas que envolvam tais propriedades, situações evidenciadas na nossa pesquisa com discentes do 8º ano do ensino fundamental e indicada por docentes de matemática como questões muito difíceis de resolver.

Sugestões para o desenvolvimento desta atividade

1- Distribuir a folha com a atividade para cada um dos alunos;
2- Orientar os alunos a preencherem com atenção o quadro proposto nesta atividade;
3- Desafiar os discentes a verificar, utilizando a propriedade fundamental das proporções, se as razões propostas em cada linha do quadro formam ou não uma proporção;
4- Auxiliar os alunos na observação das regularidades encontradas ao fazer o preenchimento do quadro desta atividade;
5- Orientar no preenchimento das conclusões dos alunos, conduzindo-os a verificar o que acontece quando duas razões formam ou não uma proporção;
6- Desafiar os alunos a formalizar matematicamente a propriedade da proporção que lhes foi apresentada;
7- Apresentar a formalização matemática da propriedade da proporção em estudo;
8- Propor aos alunos questões de aprofundamento para fixar as propriedades estudadas.

4 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA DE RAZÃO E PROPORÇÃO

Nesta seção abordamos os conhecimentos específicos dos conteúdos de razão e proporção. Apresentamos algumas aplicações em situações do dia a dia em que usamos a razão e, a partir disso, definiremos o conceito de razão, bem como suas propriedades. Discorremos também sobre o conceito de proporção, assim como, alguns teoremas e propriedades seguidas de suas respectivas demonstrações. Vale ressaltar que os conceitos e demonstrações aqui tratados foram adaptados de Quintella (1963), Oliveira (2009), Almeida (2015), Silveira (2015) e o capítulo 12 do material Ratio, proportion, and similarity (sd).

3.1 RAZÃO

O conhecimento dos conceitos de razão na Matemática é de grande importância para o indivíduo, pois possibilita a tomada de decisão em várias situações do dia a dia, além de ser uma ferramenta utilizada na compreensão de outros assuntos a serem estudados posteriormente. Vejamos a seguir algumas considerações a cerca deste conteúdo.

> A palavra **razão** vem do latim *ratio*, que quer *dizer rateio,* cujo significado é divisão ou quociente entre dois números ou grandezas.
> Os matemáticos gregos apresentaram vários conceitos de razão. Euclides, por exemplo, afirmava que “razão é uma relação de tamanho entre grandezas de mesma espécie”. No entanto, esse ponto de vista realçava apenas aspectos teóricos do conceito de número, reduzindo o seu papel como instrumento de cálculo.
> Somente no século XV é que os matemáticos italianos deram uma aplicação prática para as razões. Entre eles, destacou-se Luca Pacioli (1445- 1514). (PINHEIRO et al., 2013, p. 172)

Matematicamente, chamamos de grandeza tudo aquilo que pode ser contado ou medido, como o tempo, a velocidade, comprimento, preço, idade, temperatura entre outros. Deste modo, enunciamos a seguinte definição formal:

Definição 1: Razão entre dois números
A razão entre dois números é o quociente da divisão entre estes eles, sendo o divisor diferente de zero.

Assim, considerando $\underline{a}$ e $\underline{b}$ dois números reais, com $b \neq 0$, a razão entre esses dois números é representada por meio da notação $\frac{a}{b}$, $a:b$ ou a/b, cuja leitura pode ser: a razão de $\underline{a}$ para $\underline{b}$, $\underline{a}$ está para $\underline{b}$ ou $\underline{a}$ para $\underline{b}$. O número $\underline{a}$ é denominado antecedente e $\underline{b}$, consequente. Na razão 4 para 7 ou $\frac{4}{7}$, o antecedente é 4 e o consequente é 7.

Definição 2: Razão entre duas grandezas A razão entre duas grandezas é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas.

Numa razão entre duas grandezas dada por $\frac{a}{b}$, a unidade da razão é igual à divisão entre as unidades de $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ possuem a mesma unidade, esta divisão é chamada de razão *adimensional*. Neste caso, a razão é lida pronunciando-se somente o valor numérico proveniente da divisão entre os números que representam as grandezas $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Por exemplo, se em uma fazenda foram colhidas 50 toneladas de feijão e 40 toneladas de arroz, a razão entre os valores colhidos de feijão e arroz é dada por $\frac{50}{40} = 1{,}25$, sem nenhuma unidade.

Caso $\underline{a}$ e $\underline{b}$ possuam unidades diferentes, a unidade da razão $\frac{a}{b}$ é igual à divisão entre as unidades de $\underline{a}$ e $\underline{b}$, e a forma como se lê a razão é valor numérico da razão seguido da unidade de $\underline{a}$ por unidade de $\underline{b}$, caracterizando uma razão *dimensional*. Por exemplo, na situação em que um imóvel de $100\,m^2$ custa R$50.000,00, afirma-se que o preço do metro quadrado deste imóvel é $\frac{50.000{,}00}{100} = 500\ \frac{R\$}{m^2}$, onde se lê "quinhentos reais por metro quadrado".

Uma razão pode produzir um quociente:

i) inteiro, neste caso, o consequente é a unidade;

ii) racional;

iii) irracional, como número *pi* (π).

As razões podem ser representadas também na ***forma decimal***, para isso, basta dividir o antecedente pelo consequente. Deste modo, a representação decimal da razão $\frac{7}{4}$ é $1{,}25$.

Definição 3: Razões equivalentes
Duas razões são equivalentes se representam um mesmo quociente.

Sejam os números racionais não nulos, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d}$. Sendo a razão $\frac{a}{b} = p$, temos que a razão $\frac{c}{d}$ será equivalente a $\frac{a}{b}$ se, e somente se, $\frac{c}{d} = p$. Desse modo, a representação das razões equivalentes supracitadas é dada por $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$.

As razões $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$ são equivalentes, pois produzem o mesmo quociente $0{,}4$ e representamos $\frac{2}{5} \equiv \frac{6}{15}$. Observe que os termos da segunda razão são o triplo dos respectivos termos na primeira razão, e esse fato não é uma particularidade desta equivalência, e sim uma consequência do próprio princípio de equivalência, logo na equivalência $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$, existe um número real $\underline{m}$ tal que $c = m.a$ e $d = m.b$.

Esse conceito permite obter razões equivalentes de maneira simples a partir das seguintes propriedades:

i) Podemos **multiplicar** os dois termos de uma razão pelo mesmo número não nulo e ela não se altera:

$$\frac{a}{b} = \frac{a.k}{b.k}, \text{ com } k \in \Re^*$$

ii) Podemos **dividir** os dois termos de uma razão pelo mesmo número não nulo e ela não se altera.

$$\frac{a}{b} = \frac{a:k}{b:k}, \text{ com } k \in \Re^*$$

Definição 4: Razões inversas
Duas razões são inversas quando o antecedente de uma for igual ao consequente da outra.

Seja a razão $\frac{a}{b}$, a sua razão inversa é $\frac{b}{a}$. Note que o produto entre essas razões é 1, ou seja, $\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = \frac{a.b}{a.b} = 1$. Daí as razões $\frac{7}{9}$ e $\frac{9}{7}$ são inversas uma da outra.

Algumas expressões bastante usadas no dia a dia são, na verdade aplicações de razões. A porcentagem é uma delas, definida como uma razão que tem o consequente igual a 100. Assim, na razão p onde o número real a está para 100, temos $p = \frac{a}{100}$, cuja notação é $p = a\%$, lê-se "p é igual a $\underline{a}$ por cento". Na razão de 10 para 100 temos $\frac{10}{100} = 10\%$ e na razão de 2 para 5 temos $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$.

Dentre outras razões importantes citamos a escala, o consumo médio, a velocidade média, a probabilidade e a densidade demográfica.

3.2 PROPORÇÃO

As proporções possuem várias aplicações no cotidiano do indivíduo. Seu estudo está diretamente ligado a vários outros conteúdos matemáticos e até mesmo de outras áreas do conhecimento. Vejamos a seguir algumas considerações a cerda deste importante objeto matemático.

> A palavra **proporção**, do latim *proportionis*, significa "uma relação entre as partes de uma grandeza".
> A ideia de proporção é atribuída a Pitágoras (c. 580 a.C. – 500 a.C, embora haja dúvida sobre isso. Na Antiguidade, o estudo das proporções presumivelmente fazia parte da Aritmética ou da teoria pitagórica dos números.
> Eudoxo de Cnido, discípulo de Platão, matemático e filósofo grego que viveu entre 408 a.C e 355 a.C., deu nova definição para os teoremas relacionados a proporções. Essa definição foi exposta no Livro V de *Os elementos*, de Euclides (330 a.C. – ?), e é a que conhecemos e usamos hoje em dia. (SILVEIRA, 2015, p. 183)

A proporção é uma consequência própria do estudo das razões. Trata-se de um conceito aplicado a uma grande diversidade de problemas e situações do cotidiano. Diante disso, formalizamos a seguinte definição:

Definição 1: Proporção
Uma proporção é uma equação que afirma que duas razões são iguais.

Assim, considerando $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d}$ números reais, com $b,d \neq 0$. Se as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes, ou seja, geram um mesmo quociente, então, a igualdade $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ é uma proporção.

A proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ pode ser escrita também como $a:b=c:d$. Os quatro valores, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d}$, são os termos da proporção. Assim:

i) Os números $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são os dois primeiros termos e os números $\underline{c}$ e $\underline{d}$ são os dois últimos termos;

ii) Os números $\underline{a}$ e $\underline{c}$ são os antecedentes e os números $\underline{b}$ e $\underline{d}$ são os consequentes;

iii) Os números $\underline{a}$ e $\underline{d}$ são os extremos e os números $\underline{b}$ e $\underline{c}$ são os meios;

$$\frac{\overbrace{a}^{\text{extremo}}}{\underbrace{b}_{\text{meio}}}=\frac{\overbrace{c}^{\text{meio}}}{\underbrace{d}_{\text{extremo}}}$$

iv) A divisão entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e a divisão entre $\underline{c}$ e $\underline{d}$ é uma constante *k* denominada constante de proporcionalidade desta razão.

Teorema 1: Propriedade Fundamental das Proporções

Em uma proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, isto é, $ad=bc$.

Dado $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, com $b\neq 0$ e $d\neq 0$.

Provar que $ad=bc$.

Demonstração:

Seja a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, com $b\neq 0$ e $d\neq 0$ e aplicando o postulado e a propriedade associativa da multiplicação, respectivamente, obtemos:

$$bd\left(\frac{a}{b}\right)=bd\left(\frac{c}{d}\right)\Rightarrow\frac{b}{b}(ad)=\frac{d}{d}(bc)$$

Usando o fato de que uma quantidade pode ser substituída pela sua igual, segue que:

$1(ad) = 1(bc) \Rightarrow ad = bc$ $\blacksquare$

Como está propriedade é característica de qualquer proporção, podemos utilizá-la para verificar se certos números formam ou não uma proporção ou encontrar um valor desconhecido de uma dada proporção.

Recíproca: Dada a equação $ad = bc$, então, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção.

Corolário 1: Em uma proporção, os meios podem ser trocados.

Dado $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$.

Provar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Demonstração:

É dado que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e que $c \neq 0$. Então, $\frac{b}{c}\frac{a}{b} = \frac{b}{c}\frac{c}{d}$ pelo postulado de multiplicação da igualdade.

Portanto, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. $\blacksquare$

Corolário 2: Em uma proporção, os extremos podem ser trocados.

Dado $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

Provar que $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

Demonstração:

É dado que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e que $a \neq 0$. Então, $\frac{d}{a}\frac{a}{b} = \frac{d}{a}\frac{c}{d}$ pelo postulado de multiplicação da igualdade.

Portanto, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. $\blacksquare$

Estes dois corolários nos dizem que se $3:5=12:20$, então $3:12=5:20$ e $20:5=12:3$.

Quaisquer dois fatores do mesmo número podem ser os meios e os extremos de uma proporção. Por exemplo, uma vez que $2(12)=3(8)$, 2 e 12 podem ser o meio de uma proporção e 3 e 8 podem ser os extremos. Podemos escrever várias proporções:

$$\frac{3}{2}=\frac{12}{8}, \quad \frac{8}{2}=\frac{12}{3}, \quad \frac{3}{12}=\frac{2}{8}, \quad \frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

As quatro proporções anteriores demonstram o seguinte corolário:

Corolário 3: Se os produtos de dois pares forem iguais, os fatores de um par podem ser meios e os fatores dos outros os extremos de uma proporção.

Teorema 2: Propriedade da soma (ou diferença) dos termos
Em uma proporção, a soma ou a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro, ou para o segundo, assim como a soma ou a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro, ou para o quarto termo.

Dado $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

Provar que $\frac{a \pm b}{a}=\frac{c \pm d}{c}$ ou $\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d}$.

Demonstração:

Seja a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, e de acordo com o corolário 2, podemos descrevê-la como $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, sendo essas razões equivalentes com um mesmo quociente real não nulo k. Assim:

$$\frac{a}{c}=k \Rightarrow a=kc \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{b}{d}=k \ \text{Þ}\ b=kd \qquad \text{(ii)}$$

Efetuando a soma entre as equações (i) e (ii), obtemos:

$$a+b=kc+kd=k(c+d) \Rightarrow k=\frac{a+b}{c+d}.$$

Então, temos que:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}.$$

E que

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Efetuando a diferença entre as equações (i) e (ii), obtemos:

$$a-b=kc-kd=k(c-d)\Rightarrow k=\frac{a-b}{c-d}.$$

Então, temos que:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}.$$

E que:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{c}=\frac{c-d}{d}$$ ■

Teorema 3: Propriedade da soma (ou diferença) dos antecedentes e consequentes
Em uma proporção, a soma ou a diferença dos antecedentes está para a soma ou diferença dos consequentes, assim como o primeiro antecedente está para o seu consequente ou o segundo antecedente está para o seu respectivo consequente.

Dado $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ com $b\neq 0$ e $d\neq 0$.

Provar que $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}$ ou $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{c}{d}$.

Demonstração**:**

Seja a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, com $b\neq 0$ e $d\neq 0$ temos para cada razão um mesmo quociente real não nulo k. Assim:

$$\frac{a}{b}=k\Rightarrow a=kb \quad \text{(i)}$$

$$\frac{c}{d}=k\Rightarrow c=kd \quad \text{(ii)}$$

Efetuando a soma entre as equações (i) e (ii), obtemos:

$$a+c=kb+kd=k(b+d)\Rightarrow k=\frac{a+c}{b+d}.$$

Então, temos que:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}.$$

E que:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{b}{d}$$

Efetuando a diferença entre as equações (i) e (ii), obtemos:

$$a-c=kb-kd=k(b-d)\Rightarrow k=\frac{a-c}{b-d}.$$

Então, temos que:

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$$

E que:

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}.$$ ■

Definição 2: Proporções múltiplas

Chamamos de **proporção múltipla** a toda proporção que envolve uma igualdade entre três razões ou mais. Uma proporção múltipla também pode ser chamada de série de razões iguais.

De forma geral:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}\text{, onde } x_i,y_i\in R^*;i=1,2,3,...,n$$

é uma proporção múltipla.

Considerando que cada uma dessas razões é igual a um mesmo número real k, então, esse valoré chamado de **coeficiente de proporcionalidade** da proporção.

Teorema 4: Se $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}$, então, $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}=\frac{\pm x_1\pm x_2\pm...\pm x_n}{\pm y_1\pm y_2\pm...\pm y_n}$.

Dado $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}$, com $y_1,y_2,...,y_n\neq 0$.

Provar que $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}=\frac{\pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n}{\pm y_1 \pm y_2 \pm ... \pm y_n}$.

Demonstração**:**

Seja $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}=k$, assim temos que:

$x_1 = ky_1, \quad x_2 = ky_2, \quad ... \quad , \quad x_n = ky_n$.

Logo:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}=\frac{\pm ky_1 \pm ky_2 \pm ... \pm ky_n}{\pm y_1 \pm y_2 \pm ... \pm y_n}=\frac{k(\pm y_1 \pm y_2 \pm ... \pm y_n)}{\pm y_1 \pm y_2 \pm ... \pm y_n}=k$$

Então, temos que:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}=\frac{\pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n}{\pm y_1 \pm y_2 \pm ... \pm y_n}. \quad \blacksquare$$

Observação 1: A escolha dos sinais é livre, porém, respeitando duas condições:

i) $\pm y_1 \pm y_2 \pm ... \pm y_n \neq 0$;

ii) para cada índice i, o sinal de x_i e de y_i deve ser o mesmo.

Teorema 5: Se $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}$, então, $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}=\frac{\pm a_1x_1 \pm a_2x_2 \pm ... \pm a_nx_n}{\pm a_1y_1 \pm a_2y_2 \pm ... \pm a_ny_n}$.

Dado $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}$, com $y_1, y_2, ..., y_n \neq 0$.

Provar que $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}=\frac{\pm a_1x_1 \pm a_2x_2 \pm ... \pm a_nx_n}{\pm a_1y_1 \pm a_2y_2 \pm ... \pm a_ny_n}$.

Demonstração:

Seja $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=...=\frac{x_n}{y_n}=k$, assim temos que:

$x_1 = ky_1, \quad x_2 = ky_2, \quad ... \quad , \quad x_n = ky_n$.

Logo:

$$\frac{a_1x_1}{a_1y_1}=\frac{a_2x_2}{a_2y_2}=...=\frac{a_nx_n}{a_ny_n}=\frac{\pm a_1ky_1 \pm a_2ky_2 \pm ... \pm a_nky_n}{\pm a_1y_1 \pm a_2y_2 \pm ... \pm a_ny_n}=\frac{k(\pm a_1y_1 \pm a_2y_2 \pm ... \pm a_ny_n)}{\pm a_1y_1 \pm a_2y_2 \pm ... \pm a_ny_n}=k$$

Então, temos que:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\dots=\frac{x_n}{y_n}=\frac{\pm a_1x_1\pm a_2x_2\pm\dots\pm a_nx_n}{\pm a_1y_1\pm a_2y_2\pm\dots\pm a_ny_n}.\qquad\blacksquare$$

Observação 2: A escolha dos números reais $a_1,a_2,\dots,a_n$, bem como, dos sinais é livre, porém, deve satisfazer as seguintes condições:

iii) $\pm a_1y_1\pm a_2y_2\pm\dots\pm a_ny_n\neq 0$;

iv) para cada índice i, o sinal de a_ix_i e de a_iy_i deve ser o mesmo.

Teorema 6: Se $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\dots=\frac{x_n}{y_n}$, então, $\frac{x_1x_2\dots x_n}{y_1y_2\dots y_n}=\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2=\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2=\dots=\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2$.

Dado $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\dots=\frac{x_n}{y_n}$, com $y_1,y_2,\dots,y_n\neq 0$.

Provar que $\frac{x_1x_2\dots x_n}{y_1y_2\dots y_n}=\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2=\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2=\dots=\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2$.

Demonstração**:**

Seja $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\dots=\frac{x_n}{y_n}=k$, assim temos que:

$x_1=k.y_1,\quad x_2=k.y_2,\quad \dots\quad ,\quad x_n=k.y_n$.

Logo:

$$\frac{x_1x_2\dots x_n}{y_1y_2\dots y_n}=\frac{x_1}{y_1}\,\frac{x_2}{y_2}\dots\frac{x_n}{y_n}=\underbrace{k.k.\dots.k}_{\text{n vezes}}=k^n$$

Então, temos que:

$$\frac{x_1x_2\dots x_n}{y_1y_2\dots y_n}=\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2=\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2=\dots=\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2.\qquad\blacksquare$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência didática proposta neste trabalho foi validada na dissertação de mestrado de Lobato Júnior (2018) intitulada O Ensino de Razão e Proporção por Meio de Atividades e que teve como objetivo geral analisar as potencialidades de uma sequência didática para o ensino de Razão e Proporção, diferente das práticas usuais, aplicada para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Fundamentado nas concepções do Ensino por Atividades –re(descoberta) dos conhecimentos – , propomo-nos em construir atividades específicas, seguindo as recomendações de Cabral (2017), para o ensino de razão e proporção a fim de proporcionar uma aprendizagem efetiva dos discentes. Assim, a sequência didática é composta com 22 atividades: 11 para o ensino de razão e 11 para o ensino de proporção.

Ressaltamos queeste produto é mais uma ferramenta para o professor de matemática pode utilizar em suas aulas devidoapresentar um bom desempenho de alunos, quando submetidos a uma experimentação,na resolução de questões desses conteúdos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Alex Brandão de.**Elaboração de atividades para a introdução do conceito de razão e proporção: com análise dos professores da rede pública de ensino**. 118 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG. 2014.

ALMEIDA, Ricardo Guimarães de. **Razão e proporção para além da sala de aula.** 60 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG. 2015.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas:** estrutura e elaboração. Belém-PA: SBEM/SBEM-PA, 2017.

CENTURIÓN, Marília & JAKUBIVIC, José. **Matemática: teoria e contexto**, 7º ano– 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2012.

COSTA, Gisele Maria Tonin da; PERETTI, Lisiane. **Sequência Didática na Matemática**. Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai – IDEAU. Revista de Educação do IDEAU. Vol. 8 – Nº 17 - Janeiro - Junho 2013 Semestral.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática** – 3. ed. – São Paulo: Ática, 2009.

FIOREZE, Leandra Anversa. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais.** 244 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS. 2010.

FOSSA, J. A. **Ensaios Sobre a Educação Matemática.** Pará: EDUEPA, 2001.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática da liberdade.** 23ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1999.

GRAÇA, V. V. **O ensino de problemas do 1º grau por atividades**. 2011. 228 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011.

MELO, Pablo Charles de Oliveira. **A lousa digital no ensino de razão e proporção**: uma análise das interações. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2013.

MENDES, Iran Abreu; SÁ, Pedro Franco de. **Matemática por Atividade:** sugestões para a sala de aula. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MENEGAT, Maristela Ferrari. **Uma nova forma de Ensinar Razão e Proporcionalidade.** Monografia de Especialização Matemática, Mídias Digitais e Didática. UFRS. Porto Alegre – PA, 2010.

NOGUEIRA JÚNIOR, Dárcio Costa. **Ensino de razão e proporção na perspectiva curricular de rede.** X Encontro Nacional de Educação Matemática. 7 a 9 de julho de 2010. Salvador, BA.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de. **Coleção elementos da matemática**, 0: álgebra, proporção, frações. – 1ª ed. – Belém: 2009. 254 p.

PARÁ. Secretaria de Estado de Educação. **Revista do Sistema Paraense de Avaliação Educacional: Referências e Resultados**. Sistema Paraense de Avaliação Educacional – SisPAE 2015. Pará, 2015.

PAULA, Marília Rios de. **Razão como taxa: uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática.** 79 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG. 2012.

PEREIRA, Marcos. **Uma Sequência Didática para o ensino de semelhança de figuras planas**. 2017. 161 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017.

PINHEIRO, Edson José et al. **Apostilas Solução**: a solução para o seu problema. São Pulo: Estúdio Zebra, 2013. Disponível em: <https://vdocuments.com.br/download/solucao-agente-detran-3-565b4706e3047>. Acesso em: 16 de dezembro de 2017.

QUINTELLA, Ary. **Matemática para a Terceira série ginasial (com 580 exercícios)**. – 66ª Edição – São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1963.

RATIO, PROPORTION, AND SIMILARITY.**Chapter 12**.(SD) Disponível em: http://aldentech.wnyric.org/webshare/frizzo/Geometry/Chapter12.pdf. Acesso em: 16 de dezembro de 2017.

SÁ, Pedro de Franco. **Atividades para o ensino de Matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SANTOS, Cristiane do Socorro Ferreira dos. **Ensino das funções afim e quadrática por atividades.** 2013. 312 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2013.

SILVA, Pedro Roberto Sousa da.**O Ensino de fatoração algébrica por atividades**. 2012. 281 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2012.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática**– 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e jogos com razão e proporção**; tradução e revisão técnica Antonio Carlos Brolezzi; ilustração Ann Braum. – São Paulo: Scipione, 1998. _ (Coleção investigação matemática)

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães e PASSOS, Claudio Cesar. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau.** Zetetiké – FE/Unicamp – v. 21, n. 39 – jan/jun 2013.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalú Farenzena. Porto Alegre: Penso, 1998.

Apêndice ATeste de Nivelamento (parte 1)

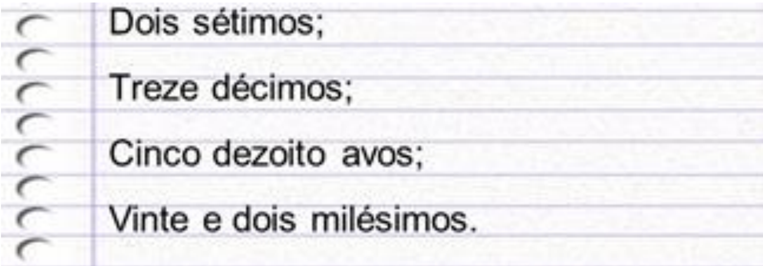
1. Quantos horas há em 180 minutos?

a) 6 b) 10 c) 18 d) 30

2. Em uma partida de Basquete, um jogador marcou x cestas de 2 pontos e y cestas de 3 pontos. Qual é a expressão algébrica que representa o total de pontos de um jogador numa partida?

a) $2x - 3y$ b) $2x + y$ c) $2x + 3y$ d) $3x + 2y$

3. Observe a sequência e marque a alternativa correta:



Qual a sequência de frações correspondente?

a) $\frac{2}{7}, \frac{5}{18}, \frac{13}{100}, \frac{22}{10}$

c) $\frac{2}{7}, \frac{13}{100}, \frac{5}{18}, \frac{22}{10}$

b) $\frac{2}{7}, \frac{13}{10}, \frac{5}{18}, \frac{22}{1000}$

d) $\frac{22}{1000}, \frac{2}{7}, \frac{5}{18}, \frac{13}{10}$

4. No mar, um submarino atingiu uma profundidade de 973,20 m. A seguir, ele desceu 436,65 m e depois subiu 316,88m. Qual a profundidade que ele atingiu?

a) 1.409,85 m b) 1.092,97 m c) 853, 43 m d) 536, 55 m

5. Para um frete, Roberto cobra uma taxa de R$ 50,00 mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Indicando por x o número de quilômetros rodados, qual a expressão algébrica que representa o preço cobrado por ele?

a) $1{,}50 + 50x$ b) $50 + 1{,}50 + x$ c) $50 + 1{,}50x$ d) $51{,}5\ x$

6. Pedro foi ao banco receber o seu salário e aproveitou para pagar algumas contas: a de energia no valor de R$ 105,32; a de água no valor de R$ 32,77 e a de gás no valor de R$ 19,83.
Sabendo que Pedro recebe um salário mínimo (R$ 937,00), quanto sobrou do seu salário?

a) R$ 779,92 b) R$ 622,00 c) R$ 799,08 d) R$ 157,92

7. Três pedaços de barbante, todos medindo 40 cm, equivalem a um único pedaço de quantos metros?

a) 1,02 metros. b) 1,20 metros. c) 1,40 metros. d) 1,60 metros

8. Na 6ª série A, há 35 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre o número de meninos e o de meninas é 1. Qual é o sistema de equações do 1º grau que melhor representa essa situação?

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x.y = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x = 35 + y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 35 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 1 - y \\ x + y = 35 \end{cases}$

9. A raiz da equação $3x - 14 = 1$ é:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 14

10. É correto firmar que $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{5}{6}$ é igual a:

a) 18 b) $\frac{8}{6}$ c) $\frac{2}{18}$ d) 0

11. Julgue as sentenças abaixo em verdadeiro (V) ou falso (F):

I- $(-4).(+5) = -20$ II- $(-10):(-2) = 5$ III- $(+7).0 = +7$

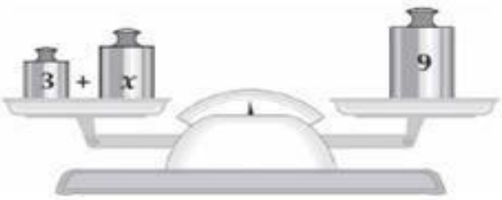
Podemos afirmar que:

a) I- V, II- F, III- V
b) I- F, II- F, III- V
c) I- V, II- V, III- F
d) I- F, II- V, III- F

12. Quantos metros há em $1{,}2\ km$?

a) 120 b) 1200 c) 12.000 d) 120.000

13. Qual o valor que x deverá assumir, para que a balança representada na figura abaixo esteja em equilíbrio?



a) 4 b) 5 c) 6 d) 8

14. Carlos juntou a mesada de três meses para comprar um brinquedo de R$ 60,00. Qual é o valor da mesada dele?

a) R$ 5,00 b) R$ 10,00 c) R$ 15,00 d) R$ 20,00

15. Escreva a equação que representa a seguinte situação:

"Ao triplo de um número adicionamos 90. O resultado é igual ao quíntuplo do mesmo número".

a) $3x + 90 = 5x$
b) $5x - x = 90$
c) $5x + 90 = 3x$
d) $3x - 90 = 5x$

Apêndice BTeste de Nivelamento (parte 2)

1. Converta as unidades de medidas de comprimento.

Medidas	$\boldsymbol{Km}$	$\boldsymbol{hm}$	$\boldsymbol{dam}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{dm}$	$\boldsymbol{cm}$	$\boldsymbol{mm}$	**Resultado**
$85\ m$emcm								
$12\ dam$emmm								
$6{,}8\ dam$em$m$								
$7\ hm$emdm								
$915\ cm$em$m$								

2. Faça as conversões das medidas de capacidade.

a) $8\ l$emcl: _______________

b) $36\ kl$emdl: _______________

c) $50\ dl$emdal: _______________

d) $900\ l$emhl: _______________

3. Complete fazendo a conversão das medidas de massa.

a) $120\ mg$equivale a _______ g.

b) $4{,}5\ hg$equivale a _______ cg.

c) $7\ dag$equivale a _______ mg.

d) $600\ g$equivale a _______ dag.

4. Transforme as unidades de tempo.

a) 5 horas em minutos.

b) 12 minutos em segundos.

c) 120 minutos em horas.

d) 3 horas e 40 minutos em minutos.

5. Um reservatório contém 700 litros de água e efetuamos as seguintes operações:

1º- Retiramos 120 litros

2º- Colocamos 50 litros

3º- Retiramos 100 litros

Qual a quantidade de água que ficou no reservatório?

6. Calcule.

a) $+5+3=$_____________

b) $-7-10=$_____________

c) $0-8=$_____________

d) $6-20=$_____________

e) $-40+13=$_____________

f) $8-7-3=$_____________

g) $-3-6+10=$_____________

h) $-4+5-8+7=$_____________

7. Associe cada frase a uma expressão algébrica correspondente.

(A) Um número menos um.

(B) O dobro da diferença entre um número e sete.

(C) o triplo de um número mais cinco.

(D) A soma entre dois números.

(   ) $3x + 5$ (   ) $x + y$ (   ) $x - 1$ (   ) $2.(x - 7)$

8. Identifique os termos das equações.

a) $\frac{2}{5}x + 40 = \frac{1}{2}x$

1º membro: __________

2º membro: __________

b) $20m - 13 = 20 + 9m$

1º membro: __________

2º membro: __________

9. Escreva a equação correspondente a cada situação:

a) Um número aumentado de 31 é igual a 100.

b) O dobro de um número somado de 31 é igual a 73.

c) O triplo do número x diminuído de 13 dá 47.

d) A metade do número x adicionada à terça parte do mesmo número x é igual a 35.

e) O quádruplo de um número é igual ao próprio número aumentado de 72.

10. Em uma sorveteria, o preço de 3 sorvetes e 1 garrafa de água é de R$ 12,00. Ângelo comprou 2 desses sorvetes e 3 garrafas dessa água e pagou R$ 15,00. Qual é o sistema de equações do 1º grau que melhor representa essa situação?

11. A diferença entre dois números é 6 e o dobro do menor mais o triplo do maior é 38. Qual é o sistema de equações do 1º grau que melhor representa essa situação?

12. Encontre as expressões algébricas para representar as frases a seguir.

a) Soma de um número com 6.

b) Diferença entre um número e 7.

c) O quádruplo de um número mais 5.

d) A quarta parte de um numero menos 3.

13. Calcule, aplicando a propriedade distributiva:

a) $2.(3+6) =$_______
b) $5\,.(2-7) =$_______
c) $-3.(7-4) =$______
d) $10\,(2x+1) =$_____
e) $-5(4-2y) =$_____
f) $x\,(2a+3b) =$_____

14. Calcule os produtos abaixo:

a) $(-3).(-4) =$_______
b) $(+\,1).(-7) =$______
c) $(-2).(+2) =$______
d) $(-4).(-5) =$______
e) $4.(-7) =$_________
f) $(+6).(-4) =$______

15. Encontre o resultado das divisões abaixo:

a) $(+15):(+3) =$_____
b) $(+20):(-4) =$_____
c) $(-35):(+7) =$_____
d) $0:(+9) =$________
e) $(-40):(-5) =$_____
f) $(+51):(-3) =$_____

16. Efetue as adições algébricas.

a) $2x+3x =$_______
b) $8y-5y =$_______
c) $8a-3a+4a =$_____
d) $5x+6x-x =$______
e) $4a-6a-3a =$_____
f) $-7y+2y =$_______

17. Resolva as equações em R.

a) $x+7=10$
b) $x-13=35$
c) $x+9=4$
d) $2x=18$
e) $5x=-20$
f) $-3x=-7$
g) $6x-19=71$
h) $2\,x+6 = x+18$
i) $5\,x+9 = 2\,x+3$
j) $3\,(2x-3) = 2(x+1)$
k) $\frac{x}{5}+\frac{x}{2}=21$
l) $4(x+1)=3(x-5)$
m) $\frac{3x+5}{2}-\frac{2x-9}{3}=8$

Centro de Ciências Sociais e da Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Tv. Djalma Dutra s/n – Telégrafo
66113–010 Belém – PA
www.uepa.com.br