Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Leonardo da Silva Rosas

Pedro Franco de Sá

Uma sequência didática para o ensino de análise combinatória por atividades

Belém - PA

2020

Diagramação e Capa: Os Autores
Revisão: Os Autores

ROSAS, Leonardo da Silva e SÁ, Pedro Franco. Uma sequência didática para o ensino de análise combinatória por atividades. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Ensino por atividades; Análise combinatória.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Dentre os conteúdos matemáticos lecionados na educação básica, a Análise Combinatória, assunto requisitado no Ensino Médio e em alguns colégios no Ensino Fundamental, é uma das vertentes que mais apresenta dificuldades de ensino-aprendizagem. Durante minha experiência profissional em sala de aula, pude perceber que o educando não desenvolve habilidade nos processos que dizem respeito à percepção, não mostram interesse por questões que não fazem parte do seu dia a dia e com isso não consegue compreender o processo de contagem em sua total plenitude, ou seja, não constrói um conhecimento significativo para desenvolver as atividades combinatórias. Atividades que estimulam o raciocínio devem acontecer desde as séries iniciais, com problemas atrativos que favoreçam a criatividade e elaboração de estratégias. Deste modo,

> Para que sejam amenizadas as dificuldades dos alunos e professores em relação ao processo de ensino aprendizagem é necessária que seja trabalhado com os alunos situação problema que fazem parte da sua realidade, além de projetos que envolvam o desenvolvimento de hábitos de estudos, e o uso da criatividade, fazendo com que os indivíduos se tornem cidadãos participativos e atuantes na sociedade e na resolução de problemas do cotidiano (ALMEIDA, 2006, p.10).

Assim,

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p.40).

Enquanto fui estudante do Ensino Médio, me recordo que estudei o assunto por três vezes. No 2º ano, como é de costume; no convênio, sendo bem exigido nas atividades de livros e apostilas, já que escolhi fazer o curso de C.E. (ciências exatas – na época prestava-se o vestibular separado por áreas de conhecimentos afins) e no cursinho. Em todas as oportunidades, lembro-me que o assunto foi repassado da mesma maneira: começando pela definição, uso de fórmulas, seguidas de exemplos e exercícios.

Hoje, entendo que essa ligação entre produção e a faculdade de aprender por meio dos sentidos ou da mente, ligados a fatos de interesse do educando, em Análise Combinatória, sempre seja feita durante toda a educação do Ensino Fundamental e Médio, além de atividades de representações e construções, para assim o aluno ter uma visualização melhor de suas propriedades e de seus conceitos.

Com isso, desenvolvemos este trabalho que é fruto de uma dissertação de Rosas (2018), na qual o autor tinha o objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, sobre a participação e o desempenho na resolução de questões de Análise Combinatória, possibilitando ao estudante atribuir outros significados aos conhecimentos adquiridos anteriormente, servindo de instrumento para o professor, que atua como mediador na aprendizagem do aluno. Para isso colocaremos em prática a metodologia do Ensino de Matemática por atividade segundo Sá (2009) e o Uso de Jogos.

Hoje, entendemos que a Matemática assume uma importância fundamental na resolução de problemas da vida cotidiana. Logo, serve de argumentação para atividades da vida prática, utilizada nas tomada de decisão e para análise crítica, escolhendo métodos e indagando seu ajustamento. Faz parte do dia a dia de qualquer ser humano nas atividades mais espontâneas como contar, comparar e entre outras. A Matemática é também considerada um instrumento importante para diferentes áreas do conhecimento por ser utilizada em estudos, ligada às outras áreas do conhecimento. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) temos que

> Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (BRASIL, 2000, p.40)

Diante das transformações e novidades encaradas pela nossa sociedade, e tendo em consequência os acontecimentos do cotidiano que avançam ininterruptamente, observa-se que o desenvolvimento cognitivo dos alunos requer, cada vez mais, a busca por aprender a questionar, discutindo e apresentando ideias, que o levem a conclusões e a respostas firmes e precisas. Os discentes precisam ser preparados para as transformações e os possíveis enfretamentos de situações-problemas ao longo da vida. E o início dessa formação deve ocorrer desde a alfabetização, sobretudo na matemática. Com isso, uma característica importante que é preciso ressaltar é que o material proposto procura contribuir para os novos desafios do processo de ensino e no trabalho docente, nessa busca incessante de se valorizar o estimulo, a criatividade e a intuição que representam um papel importante no aprendizado do aluno para o seu cotidiano.

Então, buscando melhorar e/ou criar uma boa perspectiva para o ensino deste conteúdo, nos propusemos a fazer um material propondo:

1. Aspectos Históricos: Escrevemos sobre algumas descobertas feitas por estudiosos em Análise Combinatória, no período capitalista (entre os séc. XV e XX);
2. Aspectos Matemáticos: Citamos algumas literaturas para estudos;
3. Aspectos Curriculares: Comentamos sobre alguns estudos, desafios e cobranças no processo de ensino-aprendizagem;
4. Estudos sobre o Ensino de Análise Combinatória: Procuramos ler algumas literaturas e expor os objetivos que os autores tiveram sobre o assunto em suas pesquisas;
5. Proposta de Sequência Didática: Descrevemos nossa metodologia de ensino e as sete atividades com sugestões aos docentes;
6. Leituras Recomendadas: Indicamos algumas literaturas, onde o leitor pode se aprofundar um pouco mais nos assuntos que norteiam nosso produto.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

O objetivo, desta seção, é retratar a evolução da Análise Combinatória revelando alguns aspectos da antiguidade e comentando algumas descobertas desde a época do estudioso Ramon Llull (1232-1316), até Gian Carlo Rota (1932 a 1999). Faremos de forma contextualizada, ligando o estudo deste assunto com o desenvolvimento da época, fazendo uma introdução histórica com o Capitalismo que começou a aparecer, no mundo, na passagem da Idade Média para a Idade Moderna, com o objetivo de fins lucrativos, por volta do século XIII, na Europa, sendo predominante no mundo ocidental desde o Feudalismo. Nesta época temos a grande Revolução Industrial na Inglaterra e a reboque, desse confronto entre burguesia e operário, ocorreu o desenvolvimento desse sistema. Hoje uma realidade em nosso planeta. E Diante de toda essa história, tivemos o desenvolvimento da Análise Combinatória e seus propulsores.

Quanto ao início do processo de contagem, base da Análise Combinatória, há registros indicando que sua história vem desde a origem da humanidade e que se desenvolveu a partir desse momento com técnicas rudimentares até os dias de hoje com o advento da tecnologia e uso de moderníssimos computadores. Em Eves (2004), encontramos que

> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois a estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso (EVES, 2004, p. 25).

O que mais nos impressionou diante da leitura de algumas literaturas, foi à capacidade que o ser humano tem, não importando a época, de mostrar sua inteligência, descobrir novas situações e com isso desenvolver a humanidade.

Personagens matemáticos importantes no cenário capitalista

Desde o início de seu movimento, o capitalismo foi importante na construção do mundo em que vivemos. Com certeza contribuiu, também, para o desenvolvimento científico, nas diversas áreas do conhecimento. Nesse período, início do século XIII, começou a surgir às primeiras universidades como a de Paris, Oxford, Nápoles entre outras, que contribuíram para o crescimento da matemática e da sociedade da época até os dias atuais.

Além desse fantástico sistema, tivemos também os primeiros passos de uma das matérias consideradas mais desafiadoras por professores e alunos no ensino médio, conhecida hoje como Análise Combinatória. Diante disso, em Pinheiro e Jucá (2015), temos que

> No contexto da cultura europeia (século XIII) destacaram-se duas práticas combinatórias que serviram de base à Combinatória Moderna: a primeira, fundamentada por aspectos filosóficos e religiosos, surgiu com o Catalão místico, poeta e missionário Ramon Llull (1232-1316). Sua grande contribuição foi um resumo sistemático de todos os ramos do conhecimento de seu tempo, com base na arte combinatória; a segunda prática foi o advento dos jogos de azar, especialmente dados, que surgiu por meio de um poema ovidiano intitulado *De Ventura* escrito em uma velha carta, entre 1222 e 1268, provavelmente por Richard de Fournival (PINHEIRO e JUCÁ, 2015, p. 213 e 214).

Personagens matemáticos importantes no cenário do capitalista – século XV a XX.

O capitalismo comercial, que se estendeu do século XV até o século XVIII, teve por base as trocas comerciais e foi muito utilizado nas Américas, Ásia e África. Os países europeus como Portugal, Espanha, Inglaterra, França e Holanda enriqueceram a partir das explorações de novas terras, passando a se fortalecer com trocas de escravos, metais preciosos, produtos agrícolas e manufaturas. Período marcado pelo mercantilismo, onde se buscava o enriquecimento a partir da acumulação de metais preciosos. Nesse período, começaram a surgir muitos estudos sobre os jogos de Azar, a partir daí estudiosos se dedicaram a conhecer melhor tais jogos, desvendando processos de contagem e inserindo a probabilidade, para entender suas reais chances de vitória. Com isso, citaremos alguns nomes e suas contribuições a Análise Combinatória oriundos dos jogos de Azar.

Após esse período, surge o capitalismo Industrial que teve inicio com a Primeira Revolução Industrial do século XVIII, o trabalho manual foi trocado pelo trabalho mecânico industrial. O acumulo de capital no período comercial possibilitou uma série de inovações tecnológicas. Nesse momento surgem as primeiras fábricas e inovação no transporte. Momento que surge o sindicalismo, movido pela classe operária da época e potências como os Estados Unidos e a Europa começam a se desenvolver.

Depois temos o capitalismo financeiro que surgiu no começo do século XX, período da 1ª guerra mundial, que ao seu término desencadeou o surgimento de multinacionais e a interação do capitalismo industrial com o financeiro. Neste período a Análise Combinatória estava sendo formalizada e significativos estudos na área, já tinham sido desenvolvidos, oriundos de seus propulsores.

Agora, localizaremos alguns conceitos estudados, para que se percebam como evolui o grau de abstração matemática no decorrer dos séculos e para que compreendam que os conhecimentos da sociedade atual não seriam possíveis sem o esforço acumulado durante anos por estudiosos, pesquisadores, etc. Em outras palavras, vamos tentar recorrer à história da matemática na discussão de alguns conceitos de maneira histórica, social e contextualizada.

Um dos primeiros a movimentar essas ideias sobre assunto foi Luca Pacioli.

> Luca Bartolomeo de Pacioli, nascido em 1445, foi um monge franciscano e célebre matemático italiano. Ele é considerado o pai da contabilidade moderna. Em 10 de novembro de 1494, foi descrito por ele, pela primeira vez, no livro "*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*" (Conhecimentos de Aritmética, Geometria, Proporção e proporcionalidade), no capítulo "Tractatus de Computis et Scripturis" (Contabilidade por Partidas Dobradas), o famoso Método das Partidas Dobradas.
> http://www.socontabilidade.com.br/conteudo/biografia_autores.php

Em Knobloch (2013), encontramos que

> Luca Pacioli (1445) estudou as permutações de pessoas em uma mesa chegando até a permutação de 11, usando em simbologia moderna a seguinte lei de recursão $n\ x\ (n-1)! = n!$. Pacioli gostava de jogos e com isso, se dedicou a descobrir situações que se apresentavam nos jogos, com o objetivo de entendê-las (KNOBLOCH, 2013, p.126).

> O Cálculo das Probabilidades parece ter nascido no século XV, com as primeiras tentativas de matematização dos jogos de azar, muito difundidos na época. Devem-se aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas.
> http://matematicaestud.blogspot.com.br/2013/09/os-jogos-de-azar-e-analise-combinatoria.html

Outro matemático importante para o desenvolvimento da Análise Combinatória, a partir do século XV, foi Nicolo Fontana. Era chamado de Tartaglia (que significa "gago"). O estudioso italiano também dedicou parte de seu tempo a estudar os jogos de azar, fazendo uso do raciocínio combinatório.

Knobloch (2013) revela que

> O físico e aritmético, Tartaglia (1449), em seu Tratado geral de números e medidas, repetiu a regra de Pacioli para permutações com repetição e para determinado número de combinações especiais com repetição para inferir os diferentes resultados do lançamento de oito dados. Para este fim, ele contou com o triângulo aritmético e da seguinte identidade $C(n+k-1, k) = C(n+k, k)$. (KNOBLOCH, 2013, p.129)

Já o também italiano Girolamo Cardano, teve muitas contribuições na medicina, física, filosofia, religião, música e na matemática. O seu hábito de jogar o fez contribuir com estudos em Análise Combinatória e probabilidade.

Encontramos em Knobloch (2013) que

> Girolamo Cardano (1539), que apresentou em seu livro Práticas de Aritmetica (capítulo 51), vários exemplos para ilustrar o numero $2^n - 1 - n$ de todas as combinações de pelo menos duas coisa selecionadas a partir de n. Cardano (1550), no capítulo 15 do seu livro De subtilitate explicou como os números $C(n,k) = C(n, n-k)$ pode ser calculada a partir dos valores precedentes $C(n, k-1) = C(n, n-k+1)$ multiplicando por $n - k + 1$ e dividindo por k. Acredita-se que em 1550, Cardano já conhecia a $C(n,k) = \frac{n\ x\ (n-1)x \ldots x(n-k+1)}{1x2x3x \ldots xk}$ devido aos resultados que eram apresentados em sua obra (KNOBLOCH, 2013, p.127).

> A obra matemática mais conhecida de Cardano é a *Ars magna* (A arte maior), onde aparece impressa pela primeira vezas soluções gerais das equações cúbicas e quártica. Mas ironicamente, como quase tudo em sua vida, um pequeno manual de jogador, intitulado Liber de ludo aleae (O livro dos jogos de azar), que ele sequer considerava digno de publicação, pode ter sido a sua contribuição maior a matemática (HAZZAN, 1993, p. 57)

O inglês Thomas Harriot, que viveu no fim do século XVI e inicio do século XVII, foi o fundador da escola algebrista e introdutor de vários símbolos e notações como > (maior que) e < (menor que). Também teve sua contribuição a Análise Combinatória. E

> No século XVII, esse assunto passou a ser desenvolvido em grande escala. Thomas Harriot (1560 — 1621), usou o seguinte simbolismo para o produto de binômios
>
> a – b = aaaa – aaab + bcaa
> a – c   - caaa + bdaa
> a – d   - daaa + cdaa – bcda
> a – f   - faaa + bfaa – bcfa
>   + cfaa – bdfa
>   + dfaa – cdfa + bcdf
>
> Podemos notar que ele trabalhou com agrupamentos de 4 elementos, com a condição que a letra a figurasse exatamente 4 vezes, em seguida 3 vezes, 2 vezes, 1 vez e, por último, houvesse um agrupamento com 4 elementos sem a letra a.
>
> Porém, foi Hérigone (1634), o primeiro a escrever a regra geral: $\mathbf{C_{n,r}}$ = n.(n – 1). (n -2) ....(n – r + 1)/r! (ESTEVES, 2001, p.22)

O francês Marin Mersenne, também viveu no final do século XVI e início do século XVII. Seguidor de LiuII, conseguiu estender os resultados para as permutações simples, utilizando a lei $P(n,n) = n!$, Sendo, que

> Ele é especialmente conhecido hoje devido aos chamados primos de Mersenne, os primos da forma $2^p – 1$, que discutiu em alguns pontos de seu trabalho Cogitata phisico-mathematica de 1644 (EVES, 2004, p.400).

O francês Pierre de Fermat, viveu no século XVII que foi marcado por grandes alteraçãoes no mundo. Destacando a Análise Combinatória, neste período muitas cartas e tratados foram trocadas com informaações importantes, no que diz respeito ao desenvolvimento deste conteúdo. Sobre essa questão Knobloch (2013) descreve que

> [...] entre julho e outubro de 1654 Pierre de Fermat (1601 – 65) e Blaise Pascal (1623 – 62) trocaram pelo menos nove cartas (duas delas foram perdidas) sobre questões teóricas advinda de jogos de azar; essas correspondências nos levam a crer que esse foi o início da teoria matemática da probabilidade. Eles discutiam principalmente dois problemas: o primeiro deles: Dois jogadores estão jogando um jogo e cada jogador precisa de um dado número de pontos para vencer. Se eles abandonarem o jogo antes de completa-lo, como deveriam os jogos ser divididos entre eles? (KNOBLOCH, 2013, p.147)

> Fermat não publicou quase nada durante a sua vida, anunciando as suas descobertas em cartas aos amigos. Às vezes ele anotou resultados nas margens dos seus livros. O trabalho dele foi largamente esquecido até que foi redescoberto no meio do século 19.
> http://www.somatematica.com.br/biograf/fermat.php

O francês Pascal, que viveu no século XVII, foi o criador da primeira máquina de calcular. Dedicou um capítulo no livro *Traité du Triangle Arithmétique, avec Quelques Autres Traités sur le Même Sujet* (Tratado sobre o Triangulo Aritmético com Outros Tratados do Mesmo Assunto) ao estudo de combinações, alcançando o resultado $C(n, k) = 0$, para $k > n$. O tratado marcar “o início das combinações matemáticas modernas”. Assim,

> Essa espantosa e precoce atividade subitamente chegou a um fim em 1650, quando, por estar com a saúde debilitada, Pascal decidiu abandonar suas pesquisas em matemáticas e ciência e se dedicar à contemplação religiosa. Três anos mais tarde, porém, Pascal retornou brevemente a matemática. Nessa época, escreveu seu *Traité du Triangle Arithmétique*, conduziu diversas experiências sobre a pressão dos fluidos e, juntamente com Fermat, lançou os fundamentos da teoria das probabilidades (EVES, 2004, p.362).

Percy MacMahon, inglês que viveu no período de 1854 a 1929. Publicou trabalhos, no século XX sobre Análise Combinatória. Onde

> Ele fez um discurso presidencial à Sociedade Matemática de Londres em análise combinatória, em 1894. MacMahon escreveu uma análise de dois tratados volume Combinatória (um volume em 1915 e o segundo volume, no ano seguinte), que se tornou um clássico. Ele escreveu uma introdução à análise combinatória, em 1920. Em 1921, ele escreveu Novo Matemática passatempos, um livro sobre recreações matemáticas. Este livro mostra outro dos temas que fascinaram MacMahon, nomeadamente a construção de padrões que podem ser repetidos para preencher o plano.
> http://www.aprender-mat.info/portugal/historyDetail.htm?id=MacMahon

Gian Carlo Rota, que viveu no final do século XX, ajudou a formalizar o assunto Análise combinatória na década de 60.

> Rota logo tornou-se parte de Los Alamos. Ele deu palestras que foram profundamente informativo, polido obras de arte que o tornou conhecido em todo o laboratório. Os temas foram variados: equações diferenciais, teoria ergódica, a análise fora do padrão, probabilidade, e, claro, análise combinatória.
> Como já foi referido, Rota trabalhou na análise funcional para o seu doutorado e, até cerca de 1960, ele escreveu uma série de trabalhos sobre teoria de operadores. Dois trabalhos de 1959-60, embora ainda na área da teoria do operador, olhou teoria ergódica que é uma área que exige consideráveis capacidades combinatórias. Esses papéis parecem ter levado Rota longe da teoria do operador e na área de combinatória. Seu primeiro grande trabalho sobre análise combinatória, que viria a mudar o rumo de todo o assunto, foi sobre os fundamentos da teoria combinatória Rota, que publicou em 1964.
> Rota recebeu o prêmio de Steele da American Mathematical Society em 1988. O Prêmio escolhe citação o ensaio de 1964 sobre os fundamentos da teoria combinatória como:
> ... o único papel maior responsável pela revolução que a combinatória incorporada no mainstream da matemática moderna.
> http://apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Rota

Aqui, lembramos que os fatoriais são importantes em Análise Combinatória e em outros assuntos do nível médio como Probabilidade e Binômio de Newton. E o curioso disso tudo é saber que cada símbolo que se faz uso na matemática possui a descrição escrita de seu surgimento, ou seja, cada um possui um motivo para ter surgido e estar sendo utilizado até o momento. A notação n! (lê-se: **n** fatorial ou fatorial de **n**) foi introduzida no início do século XIX, e serve para facilitar a escrita de cálculos demasiadamente grandes e/ou escreverem valores de forma simplificada.

> O símbolo n!, chamado fatorial de n, foi introduzido em 1808 por Chisthian Kramp (1760 – 1820) de Strasburgo, que escolheu para contornar dificuldades gráficas verificadas com símbolo previamente usado. Por conveniência definiu-se 0! =1 (EVES, 2004, p. 365).

Neste texto, percebemos que a Análise Combinatória não surgiu de forma súbita, mas assim como toda a matemática, ela veio se desenvolvendo durante os séculos, muitas vezes informalmente, no anonimato entre amigos (como nas cartas que eram trocadas e possuíam métodos combinatórios), outras vezes para se apropriar de vantagens ou pelo menos conhecê-las (como nos jogos de azar), entre outras. Conseguimos perceber também, que gênios não descansam e estão a todo o momento produzindo, fazendo o mundo se desenvolver, construindo teorias, desarticulando outras e assim nós vivemos, em eterno processo de construção e desconstrução.

Neste texto, procuramos elucidar fatos históricos matemáticos e da humanidade visando à utilização por professores em sala de aula, "lincando" as duas histórias desenvolvidas situando tempo e espaço, fazendo a interação das mesmas. Outro fato que pode ser bem explorado, é que a busca do desenvolvimento do assunto, passou pelas disputas em jogos de azar, vividas por alguns matemáticos como: Pacioli, Cardano, Tartaglia, entre outros e que no inicio do capitalismo (século XIII) houve a criação das primeiras universidades, pontes de conhecimentos exploradas pelos matemáticos da época. Ficamos devendo o surgimento das simbologias que caracterizam a análise combinatória, mas entendemos que isso pode ser fruto de outra pesquisa. E

> A importância da história das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos (BRASIL, 2000, p.52).

3. ASPECTOS MATEMÁTICOS

É importante que todo professor domine os conteúdos a serem trabalhados durante suas aulas. Então, se faz necessário o aprofundamento e a descoberta de técnicas que o prepare de modo consciente para enfrentar a docência no dia a dia. Nesta seção, indicaremos algumas literaturas que servem para mostrar as principais técnicas combinatórias utilizadas no ensino médio.

1. HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 5. São Paulo: Atual, 1993.

2. OLIVEIRA, M. R. de; CARNEIRO, M. L. da R. **Elementos da Matemática**. 2ª ed. Belém: GTR, 2009.
3. ROSAS, L. da S. **Ensino de análise combinatória por atividades**. 322p. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.
4. SANTOS, J. P. de O.; MELO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Editora da UNICAMP, Campinas - SP, 1995.

4. ASPECTOS CURRICULARES

De acordo com os princípios que constam no artigo 205 da constituição de 1988 e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação nacional, os conteúdos a serem ministrados para o Ensino Fundamental e Médio têm por intenção fundamentar os discentes para o exercício responsável de seus deveres e direitos perante a sociedade, ou seja, a educação escolar deve estar vinculada com a cidadania. Os conteúdos devem ser significativos para os alunos e estar adequados às diversas formas de aprender de cada um.

Muitos estudos realizados por pesquisadores da área de Educação Matemática vêm destacando a necessidade do educador de refletir sobre suas atividades, conteúdos e conceitos que, em muitos momentos, são repassados de forma vaga para os educandos, entre eles Cabral (2006), Carvalho (2009), Costa (2013), Duro (2012), Silva (2013), Sturm (1999), Tataia (2012), Vazquez (2011), entre outros. A introdução de conteúdos por meio de situações voltadas à realidade dos alunos é uma importante ferramenta que se integra às novas metodologias exigidas pela educação, uma vez que a integração e a interação dos alunos com a Matemática permitem que os problemas possam ser um excelente atrativo para as aulas desta disciplina. O Ensino de Matemática por meio do método tradicional é um problema cultural, visto que já não está atendendo às necessidades de alunos e professores. Segundo Sturm, temos que

> [...] o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação (STURM, 1999, p.3).

Pela sua própria história, a Matemática mostra que foi construída em resposta a perguntas motivadas por problemas, seja de ordem prática (como contagem de animais, divisão de terras, cálculo de questões financeiras, etc.), sejam vinculadas a outras ciências (como a Física, a Química, etc.) ou ainda ligadas à própria Matemática. Dessa forma, a resolução de problemas é da própria essência da Matemática, funcionando como um grande organizador do processo de aprendizagem, muitas vezes como o seu detonador, articulador e construtor.

A respeito do uso da metodologia tradicional, Esteves (2000), em sua pesquisa, pontua:

> [...] queremos mostrar que a fórmula em si não é negativa nem contraproducente; ao contrário, ela representa uma compressão algorítmica que assegura uma economia cognitiva importante, desde que colocada no tempo certo. Para o conteúdo Análise Combinatória, quando não reforçamos a fórmula, acreditamos que estamos valorizando o uso da árvore de possibilidade, do método de tentativa e erro, do desenho e do princípio fundamental da contagem para um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório. Assim, a fórmula no papel deixa de ser apenas uma ferramenta para desenvolver os problemas de maneira mais econômica (ESTEVES, 2000, p.3).

Hoje, ser um professor é muito mais do que ministrar aulas. É munir os alunos com o acesso ao saber historicamente produzido, levá-los ao despertar para o saber. É inseri-los no jogo das informações e ao mesmo tempo fornecer-lhes meios para que possam selecionar essas informações e realizar sua significação. Então, instrumentalizar o aluno a ter mais autonomia e prepará-lo para estar continuamente em busca de aprender como parte de seu desenvolvimento, torna a aprendizagem mais significativa. Assim, o saber escolar, cumpre seu papel na formação de seres humanos preparados para atuar de maneira efetiva na transformação da sociedade.

O objetivo é não estimular excessivamente o formalismo matemático além do que é necessário para a formação de alguns modelos básicos, e, quando ele se fizer importante, que seja obtido através do consenso de discussão e síntese por parte dos próprios educandos. Não se devem apresentar regras claras e diretas de como fazer tal coisa nem de como escrever tal propriedade. Preferir problemas e desafios em detrimento de exercícios repetitivos. Agora é preciso cuidado na apresentação dos problemas porque muitas vezes o que para alguns alunos é realmente desafiador (um problema) pode não ser para outros. Um problema verdadeiro deve exigir uma série de ações e operações que levem a um resultado que não está disponível de imediato, mas é possível se obtido com construções adequadas.

Com isso, adotamos em nossa prática a resolução de problemas como ponto de partida, seguindo em nossos estudos e aplicando em nossa sequência de ensino, recomendações dadas por SÁ (2005), listadas assim:

> **1.** Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada;
> **2.** Determine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução;
> **3.** Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum outro conceito já conhecido;
> **4.** Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para turma pensar numa solução;
> **5.** Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem;
> **6.** Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma;
> **7.** Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema;
> **8.** Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado;
> **9.** Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar;
> **10.** Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado;
> **11.** Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado (SÁ, 2005, p.75).

Além de buscar novas metodologias, hoje em dia o professor deve conhecer com profundidade o currículo proposto, os conteúdos a serem ensinados, os objetivos a serem alcançados, e os instrumentos de avaliação. E um importante documento nos dias atuais é a matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias proposta pelo INEP, nela busca-se envolver a matemática cotidiana, que estimulem os alunos a buscar regularidades, formar hipóteses, refletir e generalizar, possibilitando o desenvolvimento da autonomia do aluno, ampliando e enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem, o que vem casar com nossa proposta de ensino por atividade. Para a Análise Combinatória, encontramos algumas habilidades e competências atribuídas pelo INEP, que devem ser desenvolvidas durante o estudo dessa disciplina.

Quadro 1- Competência e habilidades.

Competência de área	**Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.**
Habilidade 1	- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
Habilidade 2	- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
Habilidade 3	- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
Habilidade 4	- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
Habilidade 5	- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Fonte: BRASIL (2000)

Nessas habilidades e competência, entende-se, que se forem bem desenvolvidas, os alunos terão um conhecimento social mais relevante, serão mais autônomos e será adquirido uma boa formação de cidadania. Dessa forma, é necessário aproximar, sempre que possível, o conteúdo matemático ensinado na escola das situações apresentadas no contexto social dos alunos.

5. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A fim de proporcionar melhorias no processo de educação, é relevante que se entenda o quanto é importante ascender com novas metodologias, visto que os componentes e as ferramentas ao se incorporarem a essas novas técnicas proporcionam motivação aos alunos. Nesta revisão de literatura, apresentamos dissertações, monografias e artigos relacionados ao uso de jogos e principalmente em Educação Matemática, sobre o assunto Análise Combinatória.

Em nosso produto destacaremos os objetivos e as conclusões de cada autor. Para uma leitura mais aprofundada sobre as literaturas, ao final deste material, seguem as referências.

No trabalho de Sturm (1999), com o título “As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa”, o autor considera três objetivos a serem alcançados:

1º. Analisar uma proposta de ensino de análise combinatória e sua experimentação em sala de aula;

2º. Identificar suas possibilidades e limites com relação ao ensino-aprendizagem da proposta, no sentido de colaborar em futuras investigações de Análise Combinatória;

3º. Contribuir para o trabalho de professores de matemática do ensino médio que busquem aprimorar sua formação em relação ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

O autor conclui que foi dificultoso analisar a própria prática e que deveria ter feito entrevistas com os alunos. Também destaca que o princípio multiplicativo foi bem utilizado e que os alunos sentiram dificuldades nos problemas de ordem e repetição. Sturm revela também que durante sua pesquisa, não encontrou texto no Brasil sobre o assunto, o que deixou algumas lacunas sobre que norte seguir durante a pesquisa.

Ainda encontramos outros estudos diagnósticos, em Nepomuceno e Souza Júnior (2014, p.71 a 78) apud Lima Júnior (2014, p. 35 a 42), expostos no quadro a seguir.

Quadro 2 - Revisão de estudos dos seguintes autores.

(continua)

Autor	Trabalho	Ano	Objetivo	Conclusão
Antunes e Do vale	Análise Combinatória na Escola Pública.	2005	Identificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos acerca dos tópicos estudados na Análise Combinatória e analisar o desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio ao resolverem problemas de Análise Combinatória.	Em relação às dificuldades de aprendizagem durante as aulas de Análise Combinatória, 52% dos alunos das escolas públicas indicaram a falta de compreensão dos textos dos problemas, em segundo lugar, eles indicaram o

(conclusão)

				uso da fórmula correta nos problemas de Combinatória.
Batanero	Raciocínio Combinatório em Alunos do Ensino Secundário.	1996	Analisar as variáveis que afetam os procedimentos e os erros dos alunos ao resolverem problemas combinatórios, mostrando como devem ser consideradas essas variáveis no aprendizado.	Dificuldade nas resoluções dos problemas e só conseguiram desenvolver atividades onde o número de elementos eram pequenos.
Pacheco	Uma investigação sobre erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais e não verbais no campo da Análise Combinatória.	2001	Confrontar as abordagens dos estudantes em diferentes tipos de problemas e buscar algumas explicações para possíveis performances nos diferentes casos e para os possíveis erros apresentados.	A pesquisadora aponta que existe uma relação direta entre o uso da fórmula e a inversão da natureza combinatória, isto é, todos os alunos que apresentaram essa inversão adotaram estratégia com o uso de fórmulas.
Pinheiro e Roza	Dá análise combinatória: o que ficou em alunos e professores do Ensino Médio?	2006	Identificar as dificuldades de aprendizagem dos alunos acerca dos tópicos estudados na Análise Combinatória e analisar o desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio ao resolverem problemas de Análise Combinatória.	Enquanto que 60% os alunos das escolas particulares indicaram que a maior dificuldade era diferenciar os problemas de arranjo dos problemas de combinação e, em segundo lugar, 58% dos alunos indicaram a falta de compreensão dos textos.

Fonte: apud Lima Júnior (2014)

O trabalho de Carvalho (2009), com o título: “O uso de jogos na resolução de problemas de contagem: um estudo de caso em uma turma do 8º ano do colégio militar de Porto Alegre”, o autor apresenta três objetivos:

1) Propor uma sequência que amplie o campo conceitual multiplicativo nos problemas de contagem;

2) Desenvolver nos alunos habilidades de estratégias e organização na resolução de problemas;

3) Promover a socialização entre os estudantes.

Também é um objetivo a ser alcançado, fazer com que os alunos se motivem a pensar de forma organizada, através de estratégias elaboradas por eles mesmos, em situações problemas que fogem às do livro didático.

O autor concluiu que foi um sucesso a aplicação da metodologia, já que alcançou seu objetivo e acredita também que os alunos poderão ter uma melhor compreensão do assunto Análise Combinatória ao chegarem no 2º ano do ensino médio, se comparados com estudantes que não tiveram tal oportunidade.

O trabalho de Almeida (2010), com o título: “Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo com o 2º ano do ensino médio” teve como objetivo investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução de situações-problema, para alunos do 2º ano do Ensino Médio. O autor considera também alguns objetivos específicos a serem alcançados como:

1) Avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo da proposta;

2) Identificar as principais estratégias utilizadas;

3) Analisar o desenvolvimento dos argumentos utilizados pelos alunos ao longo do estudo;

4) Investigar o papel das discussões em pequenos e grandes grupos;

5) Identificar como os estudantes avaliam a proposta de ensino.

O autor concluiu que a aplicação da metodologia foi adequada e capaz de gerar contribuições para o processo de aprendizagem, visto a evolução na aprendizagem e aspectos relacionados no quadro acima. Apesar dos problemas enfrentados como, baixa frequência dos alunos no período das aulas, a dificuldade deles em se expor por falta de confiança, interrupções por problemas administrativos da escola, entre outros.

Em Bastos (2013), com o título: “O ensino da Análise Combinatória em sala de aula, a Partir de situações-problema e sob uma abordagem histórica”, o objetivo foi estimular o ensino e a aprendizagem da análise combinatória, sistematizando-se com base numa abordagem histórica do desenvolvimento da matemática, utilizando o uso do princípio multiplicativo e resolvendo situações-problemas.

O autor conclui que é possível garantir que a História da Matemática não se trata de uma moda transitória no ensino, mas sim permanente, assim como os conceitos de Análise Combinatória em Matemática. Acredita que sempre que possível devem ser expostos como situações problemas contextualizados ou interdisciplinares. Aponta que a sala de aula deve ser um lugar atraente para seus alunos, visando conseguir seus objetivos, de modo a otimizar o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, de forma mais prazerosa, mantendo o rigor matemático, desenvolvendo no educando um espirito reflexivo, crítico, participativo, responsável que também contribua para o professor ou futuro professor combater o analfabetismo do raciocínio combinatório.

Em Cabral (2006), com o título: “A utilização de jogos no ensino de matemática”, o objetivo do autor foi mostrar que o uso de jogos é um método que tem grande valia dentro da sala de aula, identificando também sua eficácia e o modo como ele nos auxilia, não só no processo de ensino e aprendizagem da matemática, mas como participante no desenvolvimento de um sentimento de autonomia, prazer e contentamento.

O autor conclui afirmando que acredita que o ensino de matemática não deve apenas ser feito na sua forma tradicional, uma vez que socialmente o aluno não faz o usufruto daquilo que lhe é explicado em sala de aula, pensando-se assim a utilização de Jogos poderia facilitar a percepção de algumas situações-problema que poderiam surgir em sua vida cotidiana. Aponta que ao utilizar os Jogos no ambiente escolar, de maneira consciente e compromissada, pode ser motivador para o ensino-aprendizagem de matemática. Afirmou também, que não devemos tornar o uso do Jogo algo obrigatório na sala de aula, mas sim que metodologicamente ele possa servir para o aluno apreender os conteúdos de maneira alegre e prazerosa, assim auxiliando nesse processo de transformação educacional que se almeja. E segundo ele, o trabalho com Jogos Matemáticos em sala de aula nos traz alguns benefícios, mas devem ser escolhidos com cuidado.

No trabalho de Costa (2013), com o título: “Uma proposta de ensino de Análise Combinatória para alunos do ensino médio”, o objetivo principal foi desenvolver no aluno do Ensino Médio um raciocínio combinatório conciso, não privilegiando assim o uso de fórmulas.

Finalmente, conclui que este aspecto interativo proposto nas atividades, seja capaz de colaborar para que os alunos adquiram um conhecimento com significado. Por outro lado, esse modelo pode gerar indisciplina e aí a postura do professor se torna fundamental. Torna-se consenso entre os docentes de matemática, que conseguir uma educação de qualidade através de um conhecimento concreto não é tarefa fácil, pois dependem de estudo, pesquisa e aprimoramento constante.

Em Pinheiro (2008), com o título: “O ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema” o autor teve como objetivo investigar a viabilidade de uma sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de Situações Didáticas.

De forma geral, concluiu que a sequência didática proporciona condições favoráveis à aprendizagem com o intuito dos alunos desenvolverem as habilidades básicas da Análise Combinatória. Assim como, revela a necessidade de novas pesquisas no campo da Análise Combinatória com a intenção de potencializar o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia básica para a resolução dos problemas.

No trabalho de Silva (2013), com o título “Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da resolução de problemas: Um olhar para a sala de aula”, o autor teve por objetivo traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, através da prática em sala de aula.

O autor conclui que a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem possibilita, no mínimo, uma formação crítica e questionadora, provocando a autonomia do aluno nesse processo. Contudo considera que estudos mais relevantes devem ser feitos na área que se dedica a ensinar como ponto de partida através de situações problemas.

No trabalho de Vazquez (2011), a pesquisa teve como título “O ensino de Análise Combinatória no ensino médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista”, seu objetivo foi descrever a elaboração, desenvolvimento e aplicação de três atividades orientadoras de Análise Combinatória.

Vazquez conclui que no início a maioria dos educandos procurava montar as possibilidades, acreditando que esse fato se dá devido não terem contato com o assunto Análise Combinatória no ensino fundamental. Considerou a avaliação do trabalho satisfatória, já que os alunos construíram o processo, participaram, colaboraram e se mostraram mais confiantes na busca da solução dos problemas.

No trabalho de Duro (2012), com o título foi: “A utilização de jogos no ensino de matemática”, objetivou-se investigar as estratégias (gênese da construção do raciocínio combinatório) utilizadas pelos estudantes durante a realização de experimentos, levando em conta a estruturação do seu raciocínio e os esquemas previamente construídos que possibilitam ou limitam a construção da combinatória.

O autor conclui questionam-se finalmente: Será que obteríamos os mesmos resultados caso o instrumento fosse outro? E, quando aplicado a diferentes conteúdos, o mesmo raciocínio pode variar sua forma? Afirma também que considera necessária a introdução do assunto no Ensino Fundamental, por ser importante no preparo da aquisição de estruturas formais ao pensamento. E que a ação durante o projeto, fez com que ele vivenciasse um aprendizado, para si, que foi o melhor resultado de toda pesquisa.

No trabalho de Mendes (2014), com o título: A Abrangência das Permutações na Análise Combinatória, os objetivos foram:

• Desenvolver material teórico compacto para consulta e estudo por parte de professores e alunos, que desejam se aperfeiçoar no estudo da Análise Combinatória, com ênfase nas Permutações.

• Oferecer ao professor de Matemática uma proposta didática alternativa e complementar, a fim de proporcionar uma maior segurança no lidar com a Análise Combinatória.

• Oferecer ao professor de Matemática uma atividade pedagógica a fim de tornar as aulas mais construtivas, interessantes e produtivas.

• Munir o estudante de ferramentas e habilidades para atuar de forma ativa e eficiente na resolução de problemas de contagem.

• Mostrar que a maioria das questões relativas ao tema é referente às permutações ou que podem ser resolvidas por técnicas envolvendo permutações.

• Não tem este trabalho o objetivo de trabalhar a Análise Combinatória sem o uso de fórmulas, pois em certos casos elas são fundamentais e convenientes.

O autor conclui que dessa forma a aula se torna mais dinâmica, interessante e a aprendizagem mais eficiente. E espera que a atividade pedagógica contribua para o aprendizado de forma abrangente, descontraída e que as ações desenvolvidas sejam conforme as necessidades de cada professor e/ou estrutura educacional que ele estiver inserido.

O trabalho de Tataia (2012) teve como título "Análise Combinatória para o ensino médio", com o objetivo de propor o desenvolvimento de atividades que desafiem e motivem tanto professores como alunos a estudarem, aprenderem e entenderem o conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio; como um instrumento que facilite a relação entre o ensino do docente e a aprendizagem do discente.

Então, conclui que com a prática da resolução de problemas nas aulas de Matemática, os alunos têm a oportunidade de desenvolver e sistematizar os conhecimentos matemáticos, dando significação aos conteúdos trabalhados. Tal desenvolvimento é completado quando o professor resolve adotar atitudes positivas junto aos alunos, tais como: dar oportunidade para que todos possam expressar as próprias estratégias de resolução; valorizar todas as resoluções apresentadas pelos alunos, trabalhando o erro como instrumento pedagógico; e ao desenvolver nos alunos a persistência na elaboração de estratégias para a resolução dos problemas.

6. PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nossa proposta de ensino é fundamentada no Ensino de Matemática por Atividades segundo Sá (2009) e no uso de Jogos.

Este material didático foi elaborado com a preocupação de garantir não apenas a abordagem do conteúdo Análise Combinatória, mas também o desenvolvimento de um processo de ensino-aprendizagem onde haja a parceria de alunos e professores, estes como sujeitos mais experientes. Assim, objetivou-se nessa sequência de ensino desenvolver um material por meio de situações didáticas, que enfatizam a resolução de problemas como ponto de partida, para firmar conceitos combinatórios. O PCN nos revela que

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os

> instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 2000, p.52).

6.1. O ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADES

A sala de aula necessita ser a oficina do amanhã. Diante de tão grande responsabilidade precisamos realmente parar e ponderar sobre as ações que historicamente vêm sendo atribuídas ao professor no Ensino de Matemática. O perfil do professor atual é daquele que apresenta a atitude interdisciplinar caracterizada pela busca, pela ousadia, pela pesquisa, pois essas atitudes possibilitam o enriquecimento da integração dos elementos do conhecimento.

O processo pedagógico da alfabetização Matemática deve ser pensado como um desafio diário não só para o aluno, mas também para o professor. O mundo educativo passa dinamicamente por diversas linguagens e inovações tecnológicas, e nesse cenário, a aquisição de conhecimento matemático não deve se furtar de acompanhar e promover estratégias que se relacione com diversas teorias e práticas da aprendizagem. A ousadia interdisciplinar deve-se fazer valer através da pesquisa e dos estudos da Matemática. Isso significa incentivar e promover os conteúdos de uma forma construtiva, dando mais qualidade de recursos a seres humanos, que se capacitam na lógica da Matemática.

Um dos objetivos da educação é promover o conhecimento, levar o cidadão a se apropriar do mundo circundante, existindo uma relação direta entre o sujeito que conhece e algo a ser conhecido. Temos informações de todos os lados e não podemos esquecer os outros mediadores que a sociedade dispõe, vivemos cercados de mídias e o conhecimento é muito rápido e dinâmico. Dessa maneira, renovamos sistematicamente tudo que aprendemos, algumas coisas ganham importância e outras se tornam absolutamente obsoletas.

Em Sanchis e Mahfoud (2007), encontramos que

> Piaget, através desses conceitos, discutia as relações entre a possibilidade de conhecimento e o sujeito conhecedor. Um sujeito epistêmico, nas suas

> palavras, abstrato e universal, presente em todos os sujeitos reais, que se constitui na sua relação com o mundo. Essa relação não é uma relação qualquer, mas uma interação com o (s) objeto (s) do conhecimento mediada pela ação do próprio sujeito, que dessa forma assimila – não o objeto puro, mas o resultado da interação – e acomoda-se, construindo, assim, novas estruturas de compreensão da realidade. Através de um processo dialético, as estruturas são reconstruídas, assim como também as estruturas do mundo na medida em que este adquire significado para o sujeito (SANCHIS e MAHFOUD, 2007, p.173).

O Ensino de Matemática por Atividade tem uma proposta que faz com que o aluno seja o construtor de seu conhecimento, o ajudando a entender transformações que lhe ajudarão a construir sua autonomia de pensamento, muito valorizada nos dias atuais.

Em Sá (2009), temos que

> A proposição do ensino de Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. Isso é evidenciado a partir da elaboração da mesma, até a sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante servirá de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção. Cabe, porém, ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso poderá ser decisivo no processo de aprendizagem do aluno (SÁ, 2009, p.18).

Para que o processo de ensino seja bem elaborado, consideramos importante ressaltar três aspectos:

1º. Aprendizagem: Todo processo de aprendizagem envolve conhecimento. Esse processo se dá a partir do momento que começamos a nos desenvolver de forma física, biológica, mental e emocional. A vida passa a ser um permanente ensaio de acertos e erros. Nesse contexto, a caminhada educativa envolve momentos de desequilíbrios, haja vista que novas informações vão sendo checadas a nível mental pelo educando, ou seja, o que se aprendeu ontem interage com o que se aprende hoje.

O desiquilíbrio é salutar, e deve ser visto como algo necessário para a aprendizagem. Envolve maturidade mental, tão importante para construção do conhecimento humano.

2º. Sala de aula: O padrão de desenvolvimento normal em um indivíduo começa a partir de seu nascimento. É no convívio familiar que a aprendizagem surge. O contato social é importantíssimo, mas é no espaço escolar que o estudo da realidade do mundo vai lhe servir de grandes provocações de conflitos interiores. A leitura e a escrita fundamentam o alicerce no curriculum sociocultural educativo da aprendizagem.

A troca de experiências, somadas ao meio ambiente dá o aporte tão necessário para que alunos e professores se integrem aos momentos em sala de aula.

3º. Conhecimento: O ser humano nasce com capacidade para aprender e externar esse conhecimento. Há uma necessidade muito grande de se adquirir conhecimento. O pensamento construtivo tem sede de se desenvolver e isso é muito dinâmico. As interações que se apresentam no dia a dia vão se juntando a outras experiências adquiridas em um processo permanente.

A partir dos três aspectos ressaltados anteriormente, segundo Sá (2009), temos cinco sugestões essenciais para elaboração das atividades de ensino, que servirão para a construção do conhecimento do aluno. Assim descritos:

- As atividades devem apresentar-se de maneira auto orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
- Toda atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fases: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das noções construídas;
- As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre alunos, pois isso é fundamental para o crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
- As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
- De acordo com o modelo proposto por Dockweiller (1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (apud SÁ, 2009, p.18).

6.2. O USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Hoje em dia, podemos dizer que têm sido feitos inúmeros esforços, por partes dos docentes, estudiosos e instituições de pesquisa, para acompanhar e mesmo estar à frente de todas essas mudanças que vêm ocorrendo na relação professor-aluno, em sala de aula. O Ensino da Matemática está sendo visto com outros olhos. Vivemos um momento de reformulação nos currículos, de alteração de estratégias e, sobretudo, de utilização de metodologias e técnicas educativas.

Nessa concepção, o professor deve criar possibilidades de intervenção que visem à ampliação do conhecimento dos alunos. Por tanto, deve considerar que todo e qualquer material utilizado para o ensino é uma ferramenta que pode expandir a ação pedagógica. Neste sentido, o lúdico completa o processo educativo, com sua proposta de prazer, imaginação e aprendizado que favorece a participação durante as aulas.

Com isso, a inserção, em sala de aula, de atividades lúdicas que envolvam jogos desperta nos alunos o interesse tanto pelo tema como pelo material a ser utilizado. Eles são motivados a aprender Matemática, passando a lidar com símbolos e regras que com frequência são aplicadas no mundo social. Sendo importante como recurso didático que venha somar aos demais no avanço da aprendizagem Matemática, potencializando o desenvolvimento do discente.

Para estimular discursões, respeitando as diferentes opiniões e a capacidade de sintetizar conclusões, devemos sugerir atividades abertas, que, apesar de balizadas por algum aspecto do conteúdo matemático, não impõem uma única direção a seguir nem uma única porta final. Os jogos podem ser o “pontapé” para esse tipo de atividade, e cabem a nós sua escolha e proposição, além de atenção e condução do processo.

Para Cabral (2006),

> A busca da compreensão de regras, a tentativa de aproximação das ações adultas vividas no jogo estão em acordo com pressupostos teóricos construtivistas, que asseguram ser necessário a promoção de situações de ensino que permitam colocar o aluno diante de atividades que lhe possibilitem a utilização de conhecimentos prévios para a construção de outros mais elaborados. Por tratar-se de ação educativa, ao professor cabe organiza-la de uma maneira que estimule a auto estruturação do aluno, desta maneira, é que a atividade possibilitará tanto a formação do aluno como a do professor, que deve estar atento aos “erros” e “acertos” dos

> alunos, poderá buscar o aprimoramento do seu trabalho pedagógico (CABRAL, 2006, p.18).

Em um contexto escolar, os jogos em grupo colaboram para o desenvolvimento cognitivo, emocional e social. Entretanto, é preciso que o professor fique atento, realizando intervenções e garantindo que a atividade possa colaborar no desenvolvimento de seu raciocínio lógico e na construção da aprendizagem Matemática. Dessa forma, é necessária que a atividade esteja adequada a série e que seus objetivos sejam bem definidos.

Outro aspecto relevante na prática da utilização de jogos, na sala de aula durante as aulas de Matemática, é o desafio enfrentado pelos alunos, pois lhes possibilitam tomar decisões com base na análise e na reflexão sobre o problema proposto.

A lógica dos problemas matemáticos é por si só, desafiadora e intrigante. Por isso, é importante considerar que o aprendizado dos conceitos pode passar pela utilização dos jogos e desafios que estimulam os alunos e que propiciem a aplicação de conceitos auxiliando-o a exercitarem não só o aprendizado do conteúdo, mas também a tomada, por ele mesmo, de decisões e de estabelecimento de regras internas para a fluência do trabalho. Nada mau para uma atividade lúdica! Melhor ainda é pensar que, enquanto jogamos, raciocinamos com alegria.

Cabral (2006) nos diz:

> Penso que através de jogos, é possível desenvolvermos no aluno, além de habilidades matemáticas, a sua concentração, a sua curiosidade, a consciência de grupo, o coleguismo, o companheirismo, a sua autoconfiança e a sua autoestima. Para tanto, o jogo passa a ser visto como um agente cognitivo que auxilia o aluno a agir livremente sobre suas ações e decisões fazendo com que ele desenvolva além do conhecimento matemático também a linguagem, pois em muitos momentos será instigado a posicionar-se criticamente frente a alguma situação. Além disso, na sociedade em que vivemos, designados por alguns como a sociedade da informação ou a sociedade do conhecimento, novas habilidades passam a ser exigidas não só no mercado de trabalho como, também, na vida social dos cidadãos (CABRAL, 2006, p.20).

Hoje em dia, devemos procurar novas metodologias de ensino, utilizar recursos como vídeos, calculadoras, computadores e jogos. Não fazê-los pode significar incorporar a educação clássica, valorizando a aula expositiva, centrada no professor. O papel do discente torna-se, dessa forma, muito mais dinâmico que outrora, e também mais importante, uma vez que cabe a nós selecionar, ditar e acompanhar o uso correto de toda essa produção. Através dos jogos, pretendemos fortalecer o conhecimento aprendido através das resoluções das atividades, criando um ambiente favorável e descontraído dentro da sala de aula.

Em Carvalho (2009), foi dito que

> O uso de jogos como um recurso às aulas de matemática favorece um ambiente adequado para resolução de problemas, aplicação e exploração de conceitos matemático e/ou para aprofundamentos destes. Assim, torna-se relevante a prática de jogos nas aulas de matemática, pois esses propiciam momentos de desbloqueios dos estudantes que, normalmente, apresentam aversão a disciplina. (CARVALHO, 2009, p.31).

É importante que os jogos façam parte das atividades de ensino e aprendizagem. O recurso de jogos não constitui apenas diferente modo de ensinar e aprender mais propicia a interação entre os alunos. Ao planejar as práticas que envolverão esse recurso, é preciso refletir sobre algumas questões, como: O que é possível aprender com a atividade? Que conhecimento pode ser ampliado? O funcionamento da atividade está adequado com o conhecimento que será sistematizado?

6.3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este material pedagógico, destinado a turmas do ensino médio, foi elaborado com a preocupação de garantir não apenas a abordagem do conteúdo Análise Combinatória, mas também o desenvolvimento de um processo de ensino-aprendizagem onde haja a parceria de alunos e professores, estes como sujeitos mais experientes. Com isso, entendemos que nossa proposta contribui com situações que provocam certo grau de incerteza e a procura pela solução de um problema proposto. Nessa perspectiva, procuramos organizar as atividades dos alunos para a busca do conhecimento, a partir do conhecido, contribuindo como mediador na preparação de planos para descoberta ou investigação de fatos.

As atividades propostas, em geral, podem ser feitas por diferentes caminhos. Espera-se que a exposição de opiniões e a apresentação de justificativas sejam parte integrante desse processo, além de instigar alunos e professores sobre os resultados alcançados.

Neste sentido, elaboramos um plano de ação para as aulas, conforme o quadro a seguir.

Quadro 3 - Síntese dos níveis, quanto à construção da combinatória.

TEMA DA AULA	NÚMERO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA	TEMPO ESTIMADO PARA AULA	OBJETIVOS	JOGO UTILIZADO
Principio fundamental da contagem (p.f.c.)	10	90 Minutos	Introduzir o conceito do princípio fundamental da contagem	
Exercícios	14	90 Minutos	Desenvolver a habilidade de resolver problemas envolvendo o P.F.C.	
Fatorial	10	90 minutos	Introduzir o conceito de fatorial	Pif-paf da Análise Combinatória
Cálculo da Permutação simples	10	90 Minutos	Introduzir o conceito de permutação e a noção de fatorial	Cartas da combinatória
Exercícios	10	90 Minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas envolvendo a permutação simples	
Introduzir a Diferença entre arranjo e combinação	8	90 Minutos	Introduzir o conceito de arranjo e combinação; fazer o aluno perceber a diferença entre arranjo e combinação e apresentar a representação $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$	Dominó Combinatório
Cálculo de arranjo simples	10	90 Minutos	Fazer o aluno perceber que $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$	
EXERCÍCIOS	10	90 Minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas de Arranjo simples	
Cálculo de Combinação simples	10	90 Minutos	Fazer o aluno perceber que $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Dominó Combinatório
Exercícios	10	90 Minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas que envolvam a Combinação simples	
Cálculo da Permutação com repetição	6	90 minutos	Fazer o aluno perceber que $P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!}$	
Exercícios	10	90 minutos	Desenvolver as habilidades de resolver problemas que envolvam a permutação com repetição.	

Fonte: Rosas (2018)

A seguir apresentaremos as atividades e nossas orientações em relação a cada uma delas. O preenchimento das tabelas nas atividades é de fundamental importância para o entendimento e verificação dos padrões (fórmulas) que serão verificados, facilitam a construção das conclusões e de modo geral dos conhecimentos aprendidos pelos alunos.

6.3.1. Atividade 1

ATIVIDADE 1

Título: Princípio Fundamental da contagem

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de contagem.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente cada questão da lista de questões;
- Resolva cada questão de lista;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir

QUESTÕES

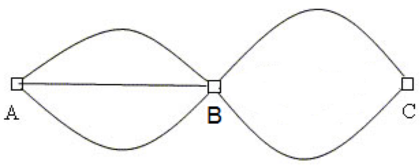
01. Um estudante possui 2 blusas diferentes da escola (Branca e Preta) e 2 calças distintas (Jeans e Preta). De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para ir à escola?

RESOLUÇÃO:

02. Para montar seu sanduiche na cantina da escola, Creuza precisa escolher somente um pão e somente um recheio, entre dois tipos de pães (careca ou de forma) e quatro tipos de recheios (queijo, carne, presunto ou salsicha). Quantos tipos de sanduíches Creuza pode montar?

RESOLUÇÃO:

03. Três cidades A, B e C são ligadas por estradas e rios. Uma estrada e dois rios ligam A e B. Dois rios ligam as cidades B e C. Não há estradas ou rios ligando A e C diretamente. De quantos modos diferentes pode-se viajar de A até C, passando por B?



RESOLUÇÃO:

04. No lançamento de duas moedas idênticas, quantos são os resultados possíveis? Lembre-se que os resultados em uma moeda podem ser Cara (C) ou Coroa (K).

RESOLUÇÃO:

05. Creuza irá para um aniversário de 15 anos onde o Buffet (jantar) será servido em três etapas: **entrada, prato principal e sobremesa**. De quantas maneiras distintas ela poderá compor o seu jantar (uma entrada, um prato principal e uma sobremesa), se há como opções 3 entradas, 2 pratos principais e 2 sobremesa?

RESOLUÇÃO:

06. Uma das parte de um teste psicotécnico é constituído por 3 questões do tipo "verdadeiro ou falso". Qual é o número total de gabaritos que podem ser marcados, nessas três questões?

RESOLUÇÃO:

07. Uma senha eletrônica é constituída de uma vogal (**a, e, i, o** ou **u**) no primeiro dígito e um algarismo ímpar (**1, 2, 3, 4** ou **5**) no segundo dígito. Qual o número total de senhas que podem ser formadas?

RESOLUÇÃO

Quadro 1

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas independentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibilidades?
			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª						
2ª						
3ª						
4ª						
5ª						
6ª						
7ª						

Descubra uma maneira prática para obter os resultados.

Conclusão:

Orientações didáticas

Na Atividade 1, separe a turma em grupos de preferência com quatro alunos, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas e a partir delas preencham o Quadro 1, para que percebam uma relação entre o número de possibilidades em cada etapa e o total de possibilidades de se realizar o evento, chegando a uma conclusão geral de como se resolver os problemas do P.F.C. de uma maneira prática, sem ter que dispor de todas as possibilidades.

As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Como resolver as questões? Oriente, de modo geral e nos grupos, que uma das maneiras de resolução é montar as possibilidades. Listando-as ou através da árvore de possibilidades. E a partir daí, segue-se para o preenchimento do Quadro 1.

2º) Ao preenchimento do Quadro 1.

Os alunos podem querer saber o que significa as palavras evento, etapa e a expressão "evento independente". Explique cada uma delas e isso será de fundamental importância para o desenvolvimento de todas as outras atividades. Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a da figura 2 a seguir.

Figura 1 - Quadro a ser preenchido da atividade 1.

Ques-tão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas indepen-dentes?	Qual é o número de possibilidades da			Qual o total de possibili-dades?
			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	
1ª	Vestiu-se para a escola	2	2	2	-	4
2ª	Montar o sanduiche	2	2	4	-	8
3ª	Saiu da cidade A p/ a C passando pela B	2	3	2	-	6
4ª	Resultado de duas moedas	2	2	2	-	4
5ª	Maneiras de montar seu preto	3	3	2	2	12
6ª	Gabarito do teste	3	2	2	2	8
7ª	Número total de senha	2	5	5	-	25

3º) A elaboração da conclusão

No momento da elaboração da concussão é possível que os alunos solicitem informações de como elaborar a conclusão. Peça que escrevam o que eles perceberam que é necessário para resolver as questões apresentadas na atividade, sem ter que montá-las, mas sim observando o Quadro 1 e deixe perguntas que possam servir de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões. Deixe-as no quadro da sala, nelas eles poderão encontrar expressões para fundamentar, de modo geral, suas conclusões.

As perguntas que podem ser colocadas no quadro antes das equipes elaborarem as conclusões são:

1ª – O evento feito em cada questão é dividido em etapas?

2ª – As etapas são sucessivas e independentes?

Após os grupos terminarem a atividade, interaja com eles a resoluções das questões, o preenchimento da tabela e as conclusões que foram escritas, analisando os pontos positivos e negativos, elaborando no final a sua conclusão a respeito do que seria o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.).

Uma atitude importante, para que os alunos aprofundem o conhecimento adquirido, é exercitar o que aprenderam. Então, prepare uma lista de fixação, onde haja questões mais complexas, com restrições que exijam um pouco mais de raciocínio, ao ponto de ampliar, aprofundar e consolidar o conhecimento adquirido. A seguir, apresentaremos uma lista exercícios, que serve como referência, ficando a critério a modificação das questões.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O P.F.C.

01. Em um concurso realizado numa universidade, apresentaram-se 4 candidatos para disputar a única vaga existente. A banca examinadora é constituída de 3 membros, devendo cada examinador escolher um candidato. De quantas maneiras diferentes podem ser dados os votos desses examinadores?

02. Ao chegar a frente de um prédio, uma pessoa observa que existem 3 portas de entrada que dão para um amplo hall onde existem dois elevadores. Se para visitar alguém que mora no 8º andar, esta pessoa precisa se utilizar das portas e dos elevadores, de quantas maneiras diferentes ela pode atingir o 8º andar e retornar ao ponto inicial, sem utilizar o mesmo elevador nem a mesma porta de entrada/saída duas vezes?

03. Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor. O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é

a) 64 b) 24

c) 12 d) 4

04. O grupo de estudantes Ana, Beto, Caio, Deise, Ester, Fábio e Gabriela foi assistir a uma palestra no auditório da Fatec-São Paulo e ocupou os lugares de uma fileira com exatamente sete cadeiras, de modo que cada um dos rapazes sentou-se entre duas moças do grupo.

- Na situação descrita, o número de modos distintos que esse grupo poderia ocupar esses sete lugares é

a) 144. b) 360.

c) 720. d) 1 240.

e) 2 520.

05. O setor de terapia intensiva de um hospital conta com 12 enfermeiros, 20 técnicos em enfermagem e 6 médicos, que se revezam em turnos de trabalho. Em cada turno devem trabalhar 5 enfermeiros, 10 técnicos em enfermagem e 3 médicos. A tabela a seguir indica alguns dos funcionários que deverão trabalhar no turno da terapia intensiva desse hospital no sábado.

Enfermeiros	Paulo, Rita, Marina, Cláudia.
Técnicos em enfermagem	Maria, Celina, Alberto, Luís, Laura, Moisés, Telma, Cristina, Caio.
Médicos	Eunice, Sérgio

- O número de possibilidades distintas para completar a equipe de trabalho desse turno de sábado é igual a

06. pa.lin.dro.mo*: adj+sm* (*pálin+dromo*) Diz-se de verso ou frase que tem o mesmo sentido da esquerda para a direita ou ao contrario.

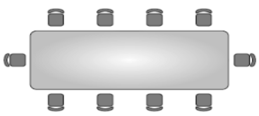
Disponível em:http://michaelis.uol.com.br. Acesso em: 13 nov. 2013 (adaptado).

Naturalmente, o conceito pode ser estendido para números inteiros: um número inteiro é palíndromo se ele é o mesmo lido da esquerda para a direita ou ao contrário. Por exemplo, 212 353 212 é palíndromo.

- Quantos são os números palíndromos de cinco algarismos que possuem três algarismos distintos?

a) 648
b) 720
c) 900
d) 27 216
e) 52 488

07. Na sala de reuniões de certa empresa há uma mesa retangular com 10 poltronas dispostas da forma como é mostrado na figura abaixo.



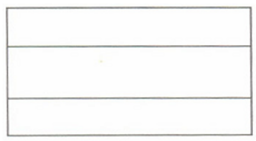
Certo dia, sete pessoas foram convocadas para participar de uma reunião a ser realizada nessa sala: o presidente, o vice-presidente, um secretário e quatro membros da diretoria. Sabe-se que:

- o presidente e o vice-presidente deverão ocupar exclusivamente as poltronas das cabeceiras da mesa;
- o secretário deverá ocupar uma poltrona ao lado do presidente.

- Considerando que tais poltronas são fixas no piso da sala, de quantos modos as sete pessoas podem nelas se acomodar para participar de tal reunião?

a) 3360
b) 2480
c) 1680
d) 1240
e) 840

08. Observe a figura. Nessa figura está representada uma bandeira que deve ser pintada com duas cores diferentes, de modo que a faixa do meio tenha cor diferente das outras duas faixas. O número de maneiras distintas de pintar a bandeira desse modo, utilizando as cores azul, preta, vermelha, amarela, verde e branca é:



a) 15
b) 30
c) 45
d) 60

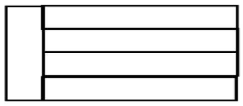
09. Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

10. Atual tendência alimentar baseada no maior consumo de legumes, verduras e frutas impulsiona o mercado de produtos naturais e frescos sem agrotóxicos e uma diminuição no consumo de produtos que levam glúten, lactose e açúcar. Uma empresa especializada no preparo de refeições, visando a esse novo mercado de consumidores, disponibiliza aos seus clientes uma “quentinha executiva” que pode ser entregue no local de trabalho na hora do almoço. O cliente pode compor o seu almoço escolhendo entradas, pratos principais e sobremesas. Se essa empresa oferece 8 tipos de entradas, 10 tipos de pratos principais e 5 tipos de sobremesas, o número de possiblidades com que um cliente pode compor seu almoço, escolhendo, dentre os tipos ofertados, uma entrada, um prato principal e uma sobremesa é

11. Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em quatro paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede, é:

a) 24 b) 30
c) 120 d) 360
e) 400

12. A figura abaixo mostra uma bandeira com cinco faixas. A proposta é pintar cada faixa dessa bandeira com uma cor, de modo que duas faixas com uma linha fronteira comum não poderão ter a mesma cor. Se dispusermos de 4 cores diferentes, o número de modos distintos de que essa bandeira poderá ser pintada será



a) 24. b) 36.
c) 96. d) 72.

13. O código de abertura de um cofre é formado por seis dígitos (que podem se repetir, e o código pode começar com o dígito 0). Quantos são os códigos de abertura com pelo menos um dígito 7?

a) 468.559 b) 468.595
c) 486.595 d) 645.985
e) 855.964

14. Um jovem descobriu que o aplicativo de seu celular edita fotos, possibilitando diversas formas de composição, dentre elas, aplicar texturas, aplicar molduras e mudar a cor da foto. Considerando que esse aplicativo dispõe de 5 modelos de texturas, 6 tipos de molduras e 4 possibilidades de mudar a cor da foto, o número de maneiras que esse jovem pode fazer uma composição com 4 fotos distintas, utilizando apenas os recursos citados, para publicá-las nas redes sociais, conforme ilustração abaixo, é

a) 24×120^4 b) 120^4

c) 24×120 d) 4×120

e) 120

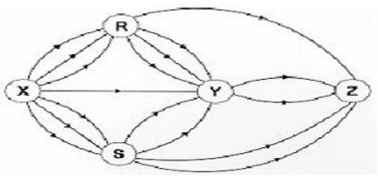
15. Se os produtos de uma empresa, para fins de informatização, são codificados com números de três algarismos, inclusive começando com zero, então o número de produtos, que poderão ser codificados, será calculado por

A) 9^3 B) 9.8.7

C) 10.9.8 D) 10.4.3

E) 10^3

16. Observe o diagrama. O número de ligações distintas entre X e Z é:



a) 39 b) 41

c) 35 d) 45

17. O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

- O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

18. O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho), Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado)

- De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14 b) 18
c) 20 d) 21
e) 23

19. O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

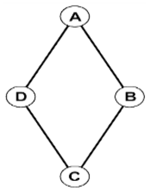
- Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

a) 24. b) 31.
c) 32. d) 88.
e) 89.

20. Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



- Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6 b) 12
c) 18 d) 24
e) 36

6.3.2. Atividade 2

ATIVIDADE 2

Titulo: Fatorial.

Objetivo: Conceituar fatorial.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões.

Procedimento:

- Leia atentamente cada questão da lista de questões;
- Resolva cada questão de lista;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Estão indo, à fila do caixa da lanchonete de uma escola cinco alunos. De quantas maneiras eles podem se posicionar nesta fila?

02. Utilizando-se dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantas senhas podem ser formadas com seis dígitos distintos?

03. Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer "palavra" (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Quantos são os anagramas da palavra **FUTEBOL**?

04. Uma competição de natação é realizada com oito atletas. De quantas maneiras diferentes podemos obter os oito primeiros colocados?

05. Nove amigos resolveram se posicionar, para bater uma foto e postar nas redes sociais. De quantas maneiras diferentes, esses jovens poderão se posicionar, um ao lado do outro, para a foto?

06. De quantas maneiras podemos organizar Dez dvd's diferentes em uma prateleira?

QUADRO 2

Questão	Qual o número de etapas indepen-dentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da										Cálculo necessário p/ se obter o resultado
			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?	6ª etapa?	7ª etapa?	8ª etapa?	9ª etapa?	10ª etapa?	
1ª													
2ª													
3ª													
4ª													
5ª													
6ª													

No estudo de problemas de análise combinatória, frequentemente nos deparamos com produtos em que os termos são números naturais consecutivos e positivos. Para facilitar a representação de alguns desses produtos, foi criada a notação fatorial.

O produto 5.4.3.2.1 é denominado de fatorial de 5.
A expressão fatorial de 5 é representada por 5!

CONCLUSÃO:

Orientações didáticas

Na Atividade 2, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que o procedimento será parecido com o da Atividade 1, onde a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 2, para que percebam uma característica no cálculo necessário para se obter os resultados e dessas informações deixadas abaixo do Quadro 2, cheguem a uma conclusão geral do que seria o fatorial de um número natural “n”.

Pela nossa experiência poucas dúvidas devem acontecer nas resoluções das questões e preenchimento do Quadro 2. As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Talvez algum grupo queira tentar montar as possibilidades. Caso isso aconteça, peça que se lembrem do que foi aprendido na atividade anterior.

2º) Ao preenchimento do quadro 2.

Os alunos podem querer saber, ainda, o que significa as palavras evento, etapa e a expressão “evento independente”, explique cada uma delas novamente, isso será de fundamental importância para o desenvolvimento da atividade. Fique atento para o preenchimento da última coluna, lá deve constar o cálculo necessário para se obter o resultado e não o total de possibilidades. Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida como a imagem a seguir.

Figura 2 - Quadro a ser preenchido da atividade 2.

Questão	Qual o número de etapas indepen-dentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da										Cálculo necessário p/ se obter o resultado
			1ª etapa ?	2ª etapa ?	3ª etapa ?	4ª etapa ?	5ª etapa ?	6ª etapa ?	7ª etapa ?	8ª etapa ?	9ª etapa ?	10ª etapa ?	
1ª	5	5	5	4	3	2	1						5.4.3.2.1
2ª	6	6	6	5	4	3	2	1					6.5.4.3.2.1
3ª	7	7	7	6	5	4	3	2	1				7.6.5.4.3.2.1
4ª	8	8	8	7	6	5	4	3	2	1			8.7.6.5.4.3.2.1
5ª	9	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1		9.8.7.6.5.4.3.2.1
6ª	10	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	10.9.8.7.6.5.4.3.2.1

3º) A elaboração da conclusão

Os alunos podem pedir informações de como elaborar a conclusão. Peça que definam o que é fatorial de um número natural “n”, escrevendo qual é a característica dos cálculos realizados para se obter os resultados, em cada questão, observando o Quadro 2 e deixe perguntas que possam servir de motivação e/ou incremento para o acabamento final da conclusão. Deixe-as no quadro da sala, nelas eles devem encontrar expressões para fundamentar, de modo geral, suas conclusões.

As perguntas que podem ser colocadas no quadro antes das equipes elaborarem as conclusões são:

“No cálculo necessário para se obter os resultados nas questões anteriores, os termos (fatores) das multiplicações são”:

- Números naturais?
- Consecutivos?
- Positivos?

Após os grupos terminarem a atividade, interaja com eles a resoluções das questões, o preenchimento da tabela e as conclusões que foram escritas, analisando os pontos positivos e negativos, elaborando no final a sua conclusão a respeito do que seria o fatorial de um número natural “n”.

Outra atitude importante, para que os alunos aprofundem o conhecimento adquirido, é exercitar o que aprenderam. Então, como sugestão, prepare uma lista de fixação, onde haja questões que trabalhem a ideia de fatorial e indicamos o jogo PIF-PAF da Análise Combinatória (em anexo), extraído de Pinheiro (2008), para que o conhecimento adquirido possa ser ampliado, aprofundado e consolidado.

Quantos ao jogo PIF-PAF da Análise Combinatória, o número de participantes é de dois a quatro e as regras são:

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;

- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro as triplas contendo em cada uma delas um enunciado, um processo e um resultado. Veja os

A seguir, apresentaremos uma lista exercícios, que serve como referência, ficando a critério a modificação das questões. A questão 4, dessa lista, irá ajudar muito no preenchimento dos quadros das Atividades 5 a 7.

Questões

1) Represente cada produto a seguir na forma de fatorial .

a) 6.5.4.3.2.1=

b) 8.7.6.5.4.3.2.1=

c) 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1=

d) 1.2.3.4.5.6.7 =

2) Escreva na forma de produto (multiplicação) os seguintes fatoriais

a) 2! =

b) 3! =

c) 4! =

d) 5! =

3) Calcule o que se pede a seguir.

a) $\frac{5!}{3!} =$

b) $\frac{9!}{8!} =$

c) $\frac{10!}{(12-4)!} =$

d) $\frac{12!}{8!.(12-8)!} =$

e) 2! + 3! =

f) 2! x 3! =

g) 4! – 3! =

h) $(3!)^2$ =

4) Represente cada produto na forma de quociente (divisão) entre fatoriais.

a) 5.4.3 =

b) 6.5.4 =

c) 7.6 =

d) 7.6.5.4.3 =

e) 8.7.6 =

f) 10.9.8 =

g) 12.11 =

h) 3.2 =

5) Colocando os símbolos de **( )**, **+** e/ou **!**, transforme a sentença em verdadeira.

a) 1 1 1 = 6

b) 2 2 = 24

6.3.3. Atividade 3

ATIVIDADE 3

Título: Permutação Simples

Objetivo: conceituar permutação simples

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões

Procedimento:

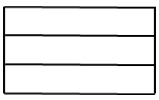
• Leia atentamente cada questão da lista de questões;

• Resolva cada questão de lista;

• Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Deseja-se confeccionar uma bandeira, com 3 faixas horizontais, dispondo de 3 cores (Azul, Branca e Vermelha), sem que haja repetição de cor. De quantas maneiras isto é possível?



02. Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer "palavra" (com ou sem significado) obtida trocando-se suas letras de posição. Um torcedor fanático, ao homenagear o filho, deu o nome do garoto de OMER, fazendo apenas a inversão das letras da palavra REMO. Porém, com essas letras, qual é o total de anagramas que poderiam ser formados?

03. Um colégio resolve fazer uma programação de Cinema, de Segunda a Sexta. Para isso, os organizadores escolhem cinco filmes (Aventura, Comédia, Ficção, Romance e Terror), que serão exibidos um por dia, sem repetição.

- Nesse caso, qual é o número de maneiras DIFERENTES de se fazer a programação nesses dias?

04. Seis amigos (**A**imê, **B**arbara, **J**ean, **L**éo, **P**aulo e **R**enato) resolveram passear pela orla de Belém, alugando uma bicicleta de 6 lugares.

- De quantas maneiras diferentes, os 6 amigos (**A**imê, **B**arbara, **J**ean, **L**éo, **P**aulo e **R**enato) podem se sentar, na bicicleta, para dar uma passeio?

05. Quantas senhas são possíveis formar, de sete dígitos, com as letras da palavra ENIGMAS?

Quadro 3

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas **"n"** (escolhas para realizar o evento) independentes no evento?	Qual o número **"p"** de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da							Qual o total de possibilidades?	Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado?
				SIM	NÃO	1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?	6ª etapa?	7ª etapa?		
1ª														
2ª														
3ª														
4ª														
5ª														

Conclusão:

Orientações didáticas

Na Atividade 3, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 3, para que percebam uma característica no cálculo necessário para se obter os resultados e dessas informações cheguem a uma conclusão geral do que seria a Permutação Simples de “n” elementos.

Pela nossa experiência poucas dúvidas devem acontecer nas resoluções das questões e preenchimento do Quadro 3. As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Como o raciocínio das questões e parecido com os das atividades anteriores, os grupos podem não ter dificuldades, possivelmente já estarão habituados em resolvê-las.

2º) Ao preenchimento do quadro 3.

Os grupos podem querer saber, o que significa as expressões etapas “n”, número “p” de elementos e a agrupamento, querendo informações do que fazer na coluna relacionada a essa palavra. Explique cada uma delas, isso será de fundamental importância para o desenvolvimento da atividade. Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a imagem a seguir.

Figura 3 - Quadro a ser preenchido da Atividade 3.

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas “n” (escolhas para realizar o evento) independentes no evento?	Qual o número “p” de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da							Qual o total de possibilidades?	Escreva o cálculo necessário p/ se obter o resultado?
				SIM	NÃO	1ª etapa ?	2ª etapa ?	3ª etapa ?	4ª etapa ?	5ª etapa ?	6ª etapa ?	7ª etapa ?		
1ª	Maneiras possíveis	3	3	x		3	2	1	-	-	-	-	6	3.2.1
2ª	Total de anagramas	4	4	x		4	3	2	1	-	-	-	24	4.3.2.1
3ª	maneiras diferentes	5	5	x		5	4	3	2	1	-	-	120	5.4.3.2.1
4ª	quantas maneiras podem se sentar	6	6	x		6	5	4	3	2	1	-	720	6.5.4.3.2.1
5ª	quantas são possíveis	7	7	x		7	6	5	4	3	2	1	5040	7.6.5.4.3.2.1

3º) A elaboração da conclusão

Os alunos talvez solicitem informações de como elaborar a conclusão. Peça que definam o que é Permutação Simples de “n” elementos, escrevendo qual é a característica dos cálculos realizados para se obter os resultados, em cada questão, observando o Quadro 3 e deixe perguntas que possam servir de motivação e/ou incremento para o acabamento final da conclusão. Deixe-as no quadro da sala, nelas eles devem encontrar expressões para fundamentar, de modo geral, suas conclusões.

As perguntas que podem ser colocadas no quadro antes dos grupos elaborarem as conclusões são:

Nas questões propostas na Atividade 3:

- Formamos agrupamentos? (conjunto de elementos organizados em sequência)
- Cada agrupamento se diferencia do outro, quando mudamos a posição dos elementos?
- O nº de etapas (n) é igual ao número de elementos (p) a disposição do evento?

Após os grupos terminarem a atividade, interaja com eles a resoluções das questões, o preenchimento da tabela e as conclusões que foram escritas, analisando os pontos positivos e negativos, elaborando no final a sua conclusão a respeito do que seria Permutação Simples de “n” elementos.

Uma atitude importante, para que os alunos aprofundem o conhecimento adquirido, é exercitar o que aprenderam. Então, como sugestão, temos o jogo Cartas da combinatória (no apêndice), adaptado de Pinheiro (2008) e prepare uma lista de fixação, onde haja questões mais complexas, com restrições que exijam um pouco mais de raciocínio, ao ponto de ampliar, aprofundar e consolidar o conhecimento adquirido.

Quantos ao jogo Cartas da combinatória, o número de participantes é de dois a quatro e as regras são:

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;

- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;
- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro uma trinca que possua a mesma significância entre elas.

A seguir, apresentaremos uma lista exercícios, que serve como referência, ficando a critério a modificação das questões.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA PERMUTAÇÃO SIMPLES

01. A partir da palavra NÚMEROS (o acento sempre acompanhará a letra u), responda:

a) Quantos anagramas são possíveis de serem formados?

b) Quantos anagramas têm como primeira letra uma vogal?

c) Quantos anagramas começam e terminam em vogal?

d) Quantos anagramas começam com n?

e) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n e u juntas e nessa ordem?

f) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras u e n juntas?

g) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m junta-se nessa ordem?

h) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m juntas?

02. O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é

a) 24 b) 48

c) 96 d)120

e)144

03. Quatro jogadores saíram de Manaus para um campeonato em Porto Alegre, num carro de 4 lugares. Dividiram o trajeto em 4 partes e aceitaram que cada um dirigiria uma vez. Combinaram também que, toda vez que houvesse mudança de motorista, todos deveriam trocar de lugar. O número de arrumações possíveis dos 4 jogadores, durante toda a viagem, é:

a) 4 b) 8

c) 12 d) 24

e) 162

04. Seis pessoas em fila gastam 10 segundos para mudarem de ordem. O tempo necessário para todas as mudanças possíveis é:

a) 4h b) 2h

c) 3h d) 5h

e) 6h

05. De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?

a) 6 b) 12

c) 48 d) 18

e) 36

06. Arranjam-se os dígitos 1, 2, 3 e 4 de todos os modos possíveis, formando-se 24 números de 4 dígitos distintos. Listam-se, em ordem crescente, os 24 números formados.

- Nessa lista, o número 3.241 ocupa a

a) 14ª posição. b) 13ª posição.

c) 16ª posição. d) 15ª posição.

07. Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é

a) 9.(9!) b) 8.(9!)

c) 8.(8!) d) $\frac{10!}{2}$

e) $\frac{10!}{4}$

08. Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas vermelhas e cinco vestem camisas verdes.

Deseja-se formar uma fila com essas pessoas de forma que as três primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as seguintes mantenham a sequência de cores dada pelas três primeiras.

- Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode fazer tal fila?

a) $3(5!)^3$ b) $(5!)^3$

c) $(5!)^3(3!)$ d) $\frac{15!}{3!5!}$

09. O número de anagramas da palavra BRASIL em que as vogais ficam lado a lado, e as consoantes também, é

a) 24 b) 48

c) 96 d) 240

e) 720

10. Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais, Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é

a) 288 b) 296

c) 864 d) 1728

11. Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar uma tirar a foto?

a) 24 b) 96

c) 720 d) 48

e) 120

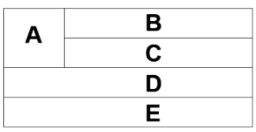
12. Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em quatro paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede, é:

a) 24 b) 30

c) 120 d) 360

e) 400

13. A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.



Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor.

O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

a) $2! \times 2!$ b) $3! \times 2!$

c) $3! \times 3$ d) $3! \times 2^2$

e) 3×2^4

14. Um cliente de uma locadora de vídeo tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a vídeo-locadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \times 8! + (3!)^2$ b) $8! \times 5! \times 3!$

c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$ d) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$

e) $\frac{16!}{2^8}$

15. Ao permutarmos, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, obtemos números de seis dígitos diferentes. Ordenando estes números, em ordem crescente, o número que ocupa a 239ª posição é

a) 265431. b) 265413.
c) 265314. d) 264531.

16. As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é

a) PROVA. b) VAPOR.
c) RAPOV. d) ROVAP.
e) RAOPV

6.3.4. Atividade 4

ATIVIDADE 4
Título: Diferença entre Arranjo e Combinação **Objetivo:** Descobrir uma maneira prática de diferenciar arranjo simples de combinação simples. **Material:** Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões. **Procedimento:** Leia atentamente cada questão da lista de questões; Resolva cada questão de lista; Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir. **QUESTÕES** **01.** Três amigos marcaram de se encontrar às 17 horas, na biblioteca da escola onde estudam, para realizar um trabalho de matemática. Chegando no local marcado, cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez. Quantos apertos de mãos foram dados? **RESOLUÇÃO:** **02.** Em um colégio, 4 alunas se candidataram a "miss" dos jogos. Sabendo-se que a 1ª e 2ª colocada mais votadas, receberão os títulos de **Rainha e princesa dos jogos**, respectivamente. Quantas são as possibilidades de escolha dessas duas garotas? **RESOLUÇÃO:** **03.** Quatro funcionários de uma empresa devem ser divididos em duplas, para a realização de algumas tarefas. De quantas maneiras isso poderá ser feito? **RESOLUÇÃO:** **04.** Creuza deseja pintar as unhas e para isso possui 5 cores distintas de esmalte, de quantas maneiras diferentes Creuza poderá escolher dois esmaltes, entre os que possui? **RESOLUÇÃO:**

05. Uma escola tem sete professores de matemática. Três deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de três professores são possíveis formar?

RESOLUÇÃO:

06. Em um torneio internacional de natação participaram oito atletas. De quantos modos distintos poderão ser distribuídas uma medalhas de ouro, uma de prata e outro de bronze entre os atletas?

RESOLUÇÃO:

De acordo com o que você realizou em cada uma das oito situações-problemas acima, preencha **quadro 4** e tire suas conclusões.

Questão	O que a questão pedia?	A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento?		Justificativa
		Sim	Não	
1ª				
2ª				
3ª				
4ª				
5ª				
6ª				

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento não altera o agrupamento a questão é um exemplo de **combinação dos elementos**.

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento altera o agrupamento a questão é um exemplo de **arranjo dos elementos.**

Quais das questões apresentadas são de arranjo?

Quais das questões apresentadas são de combinação?

Simbolicamente a combinação de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representada por: $C_{5,2}$ *ou* C_5^2

Simbolicamente o Arranjo de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representada por : $A_{5,2}$ *ou* A_5^2

Represente as seis questões na forma simbólica.

Orientações didáticas

Na Atividade 4, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 4, para que percebam quando a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento e dessas informações cheguem a uma justificativa revelando se a questão é de Arranjo Simples ou Combinação Simples. Após a conclusão do 4º Quadro, os alunos deverão ler e responder algumas informações deixadas que definam quando uma questão é de Arranjo Simples ou Combinação Simples e suas respectivas representações. As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões

Atenção para as resoluções, os grupos podem estar habituados a resolver as questões pelo P.F.C., com isso poderá ocorrer erros nas questões de Combinação Simples. Oriente, de modo geral e nos grupos, que montem as possibilidades e comparem com as resoluções feitas pelo P.F.C., perguntando em cada agrupamento formado, se a troca de elementos de posição altera o agrupamento.

2º) Ao preenchimento do Quadro 4

Os grupos podem querer saber o que colocar nas justificativas, oriente-os a escrever porque a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento. Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a imagem a seguir.

Figura 4 - Quadro a ser preenchido da Atividade 4.

Questão	O que a questão pedia?	A ordem da escolha dos elementos no agrupamento altera o agrupamento?		Justificativa
		Sim	Não	
1ª	Formar apertos de mão		X	Não importa a ordem de escolha, a dupla será a mesma
2ª	Escolher rainha e princesa	X		Se trocar alguém de posição, ela não será mais a rainha
3ª	Formar duplas		X	Não importa a ordem de escolha, a dupla será a mesma
4ª	Escolher dois esmaltes		X	Esmalte amarelo e vermelho ou vermelho e amarelo a escolha não mudou.
5ª	Formar grupos		X	Se o trio for ABC ou CBA continua o mesmo
6ª	Distribuir ouro, prata e bronze	X		Se você falar que João foi o 1º e vier outra pessoa falar que ele é o 3º, não é a mesma coisa.

3º) Instruções e perguntas após o quadro da Atividade 4

Os alunos podem querer saber como responder as perguntas, oriente-os a ler o que foi respondido no quadro 4.

Após os grupos terminarem a atividade, interaja com eles a resoluções das questões, o preenchimento da tabela e as justificativas que foram escritas, analisando os pontos positivos e negativos, elaborando no final as suas justificativas, quando a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento.

Uma importante ferramenta para fixação dos conceitos estudados, nesta atividade, é o uso do jogo Dominó Combinatório extraído de Pinheiro (2008), um jogo bem divertido que deve abrilhantar a aula. Realize o jogo que segue em anexo. O número de participantes é de no mínimo dois participantes e as regras são:

- As cartas devem ser distribuídas em quantidades iguais para cada participante.
- Para definir quem dará início à partida sugerimos a maior jogada no dado, zerinho um, par ou ímpar, enfim o que melhor convier aos participantes.
- As cartas deverão ser despejadas na mesa formando uma sequência de cartas que deverão sempre ser associadas da seguinte forma: um texto de combinação à palavra COMBINAÇÃO, um texto de arranjo à palavra ARRANJO.
- Caso um participante associe uma carta errada, este terá sua carta de volta e perderá a chance de despejar outra carta.
- O participante que primeiro conseguir despejar todas as suas cartas de forma correta, será o vencedor.

6.3.5. Atividade 5

ATIVIDADE 5

Título: Arranjo Simples

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de Arranjo.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões

Procedimento:

• Leia atentamente cada questão da lista de questões;

• Resolva cada questão de lista;

• Com as informações obtidas preencha o quadro 3.

QUESTÕES:

01. Um torneio de futsal será disputado pelas seguintes seleções: **B**rasil, **I**tália, **E**spanha, **P**araguai e **A**rgentina. De quantas maneiras distintas o pódio (três primeiros colocados) poderá ser formado?

RESOLUÇÃO:

02. As finalistas do concurso Miss Universo, são Miss Brasil, Miss Japão, Miss Venezuela, Miss Itália e Miss França. De quantas formas os juízes poderão escolher a primeira e a segunda colocada neste concurso?

RESOLUÇÃO:

03. A senha de um celular é configurada por um teclado numérico, conforme ilustrado na figura.

TECLADO NUMÉRICO

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**
	0	

- Um professor que nasceu em **03/1978**, deseja criar uma senha com apenas três algarismos distintos (diferentes), dentre os que compõem o mês e ano de seu nascimento. Quantas senhas o professor poderia criar a sua disposição?

RESOLUÇÃO:

04. Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em duas paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede?

RESOLUÇÃO:

05. Maria deve criar uma senha de apenas 4 dígitos (algarismos) para sua conta bancária, somente com os algarismos 2, 4, 1, 9, 8 e 7 por representarem o dia e o ano de seu nascimento na ordem que aparecem e um mesmo algarismo não pode aparecer mais de uma vez (não pode haver repetição). De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

RESOLUÇÃO:

06. Uma escola tem quatro professores de matemática. Para participar de um projeto, devem ser indicados um professor chefe e um professor assistente.

- Com base nessa informação, de quantas maneiras distintas esses dois professores podem ser escolhidos?

RESOLUÇÃO:

Quadro 5

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, da situação?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da				Qual o total de possibili-dades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?				
1ª												
2ª												
3ª												
4ª												
5ª												
6ª												

OBSERVAÇÃO

CONCLUSÃO:

Orientações didáticas

Na Atividade 5, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 5, para que se chegue a fórmula geral de Arranjo Simples.

As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Como o raciocínio das questões e parecido com os das atividades um, dois e três, os grupos podem não ter dificuldades, possivelmente já estarão habituados em resolvê-las. Mas oriente que verifiquem se a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento, afinal eles precisarão para preencher o Quadro 5.

2º) Ao preenchimento do quadro 5.

Os grupos poderão ter dúvidas nas duas últimas colunas do Quadro 5. Faça com que eles completem essas colunas e consequentemente chegue à fórmula, realizando a seguinte postura para orientá-los.

- Preenchimento da antepenúltima coluna:

1ª – Pergunte para os grupos, o que falta para o resultado na antepenúltima coluna virar um número fatorial;

2º - Após completarem o resultado, transformando-o em um número fatorial, pergunte o que eles fariam para corrigir aquela multiplicação que eles tinham feito em excesso, alterando o resultado (Neste momento, lembre-os da 4ª questão realizada na atividade 2, na lista de questões sobre fatorial).

- Preenchimento da última coluna:

1º - Peça para que os grupos identifiquem quem era o “n” e o “p” em cada questão;

2º - Solicite que eles identificassem se no resultado, já estam aparecendo os valores de “n” e/ou “p”;

3º - Peça aos grupos para verificarem no resultado que, aonde não estiver em função de “n” e/ou “p”, o que eles poderiam fazer para colocá-los, sem alterar o resultado.

Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a imagem a seguir.

Figura 5 - Quadro a ser preenchido da Atividade 5.

Questão	Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação?	Qual o número p de elementos de cada agrupamento ?	A ordem dos elementos altera o agrupamento ?		Qual o número de possibilidades da				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação.
			SIM	NÃO	1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?				
1ª	5	3	x		5	4	3	-	60	5.4.3	$5!/2!$	$\frac{5!}{(5-3)!}$
2ª	5	2	x		5	4	-	-	20	5.4	$5!/3!$	$\frac{5!}{(5-2)!}$
3ª	6	3	x		6	5	4	-	120	6.5.4	$6!/3!$	$\frac{6!}{(6-3)!}$
4ª	6	2	x		6	5	-	-	30	6.5	$6!/4!$	$\frac{6!}{(6-2)!}$
5ª	6	4	x		6	5	4	3	360	6.5.4.3	$6!/2!$	$\frac{6!}{(6-4)!}$
6ª	4	2	x		4	3	-	-	12	4.3	$4!/2!$	$\frac{4!}{(4-2)!}$

3º) A elaboração da conclusão.

Os alunos poderão solicitar informações de como elaborar a conclusão. Peça-os que concluam o que é Arranjo Simples de “n” elementos tomados “p” a “p”, escrevendo qual é a característica sobre a ordem de escolhas dos elementos em cada agrupamento e identifique na última coluna o padrão que foi gerado mostrando uma fórmula geral para o cálculo. Deixe perguntas que possam servir de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões. Coloque-as no quadro da sala, nelas eles devem encontrar expressões para fundamentar, de modo geral, suas conclusões.

As perguntas que podem ser colocadas no quadro antes dos grupos elaborarem as conclusões são:

“Nos exemplos anteriores”:

• Formamos agrupamentos (conjunto de elementos organizados em sequencia)?

• Cada agrupamento se diferencia do outro, quando mudamos a posição dos elementos?

• Para se montar cada agrupamento, escolhemos **p** elementos dos **n** a disposição do evento?

• O que é o arranjo simples de “n” elementos tomados p a p?

• Que fórmula (padrão) matemática serviria para resolver qualquer problema de arranjo simples ($A_{n,p}$)?

Após os grupos terminarem a atividade, interaja com eles a resoluções das questões, o preenchimento da tabela e as conclusões que foram escritas, analisando os pontos positivos e negativos, elaborando no final a sua conclusão a respeito do que seria Arranjo Simples de “n” elementos tomados “p” a “p”.

Uma atitude importante, para que os alunos aprofundem o conhecimento adquirido, é exercitar o que aprenderam. Então, prepare uma lista de fixação, onde haja questões mais complexas, com restrições que exijam um pouco mais de raciocínio, ao ponto de ampliar, aprofundar e consolidar o conhecimento adquirido. A seguir, apresentaremos uma lista exercícios, que serve como referência, ficando a critério a modificação das questões.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O ARRANJO SIMPLES

01. Visando obter mais informações sobre a denúncia de que uma tribo da região Amazônica estava sendo dizimada, um repórter recorreu a seu computador para acessar a Internet, entretanto não lembrou a senha de acesso, que era composta por três algarismos. Lembrava apenas que a senha era composta por três dos cinco algarismos: 1, 3, 5, 6 e 9. Para encontrar a senha, o repórter escreveu num papel todos os possíveis agrupamentos com esses algarismos. O número de agrupamentos escritos por esse repórter, na tentativa de encontrar a senha de acesso à Internet, é:

a) 120 b) 108 c) 84
d) 60 e) 56

02. Dez pontos são marcados num plano de modo que não existem 3 pontos colineares. O número máximo de quadriláteros que podemos construir utilizando esses pontos é:

a) 120 b) 210 c) 720
d) 2.100 e) 5.040

03. Pode-se permutar **m** objetos de 24 maneiras diferentes. Suponha que se pretenda arranjar esses **m** objetos dois a dois. Nesse caso, de quantas maneiras diferentes esses **m** objetos poderão ser arranjados?

a) 10 b) 12
c) 14 d) 16

04. Considere os números inteiros maiores que 64000 que possuem 5 algarismos, todos distintos, e que não contém os dígitos 3 e 8. A quantidade desses números é:

a) 2 160 b) 1 320
c) 1 440 d) 2 280

05. Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países , as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo : 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Argentina ; 3º lugar, Colômbia). Se , em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69 b) 2.024 c) 9562
d) 12.144 e) 13.824

06. Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

- Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria

a) inferior ao dobro.

b) superior ao dobro e inferior ao triplo.

c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.

d) superior ao quádruplo e inferior ao quíntuplo.

e) mais que o quíntuplo.

07. Uma loja de um shopping Center na cidade de Manaus divulga inscrições para um torneio de Games. Para realizar essas inscrições, a loja gerou um código de inscrição com uma sequência de quatro dígitos distintos, sendo o primeiro elemento da sequência diferente de zero. A quantidade de códigos de inscrição que podem ser gerados utilizando os elementos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} é

a) 4.500 b) 4.536 c) 4.684

d) 4.693 e) 5.000

08. Os clientes de um banco, ao utilizarem seus cartões nos caixas eletrônicos, digitavam uma senha numérica composta por cinco algarismos. Com o intuito de melhorar a segurança da utilização desses cartões, o banco solicitou a seus clientes que cadastrassem senhas numéricas com seis algarismos.

- Se a segurança for definida pela quantidade de possíveis senhas, em quanto aumentou percentualmente a segurança na utilização dos cartões?

a) 10% b) 90% c) 100%

d) 900% e) 1900%

09. Usando-se apenas as letras A, B, C e D e os algarismos do sistema decimal de numeração, o número de placas de automóveis usadas no Brasil (exemplo: BBA 0557) possíveis de serem formadas é no máximo igual a

a) 120000 b) 240000 c) 360000

d) 480000 e) 640000

10. A Série Arte e Matemática na escola, que será apresentada pela TV ESCOLA, no Programa Salto para o Futuro, é constituída por cinco programas que pretendem oferecer um espaço de reflexão, interação e discussão sobre as múltiplas relações matemáticas existentes nas diversas linguagens.

(Fonte:www.tvebrasil.com.br/SALTO/boletins2002/ame/ameimp.htm

Considere que os programas acima sejam exibidos em três turnos: o primeiro pela manhã, o segundo pela tarde, e o terceiro pela noite. Então, o número de maneiras distintas que a sequência de programas pode ser exibida é:

a) 10 b) 30 c) 60

d) 80 e) 120

11 - Para se cadastrar em um site de compras, cada cliente digitava uma senha com quatro algarismos. Com o objetivo de aumentar a segurança, todos os clientes foram solicitados a adotar novas senhas com cinco algarismos. Se definirmos o nível de segurança com a quantidade possível de senhas, então a segurança nesse site aumentou em

a) 10% b) 25% c) 125%

d) 900% e) 1.100%

12 - Duas amigas foram a uma loja comprar guarda-chuvas. Na loja, havia apenas 5 guarda-chuvas do modelo desejado, cada um de uma cor diferente. Considerando que cada uma comprará apenas um guarda-chuva, o número de maneiras diferentes de elas escolherem seus guarda-chuvas é

a) 16. b) 18. c) 20.

d) 22. e) 24.

13 - Uma determinada agência bancária adotou, para segurança de seus clientes, uma senha de acesso de 7 (sete) dígitos, em que os três primeiros dígitos são 3 (três) letras distintas e os quatro últimos dígitos são 4 (quatro) números distintos.

- Considerando o alfabeto de 26 (vinte e seis) letras e o conjunto de números de 0 (zero) a 9 (nove), o número possível de senhas distintas que podem ser criadas é:

a) $26! \times 10!$ b) $C_{26,3} \times C_{10,4}$

c) $A_{26,3} \times A_{10,4}$ d) $A_{36,7}$

e) $C_{36,7}$

14 - Supondo-se que do campeonato ilustrado na tirinha, apenas Mônica, Cebolinha, Magali, Cascão e Chico Bento tenham participado e que tenha ocorrido premiação apenas para os três primeiros colocados, pode-se afirmar que o número de maneiras distintas que essa premiação poderia ser distribuída é

01. 60 02. 68 03. 72

04. 84 05. 120

15 - Diante do caixa eletrônico de um banco, Mariana não conseguia lembrar-se da sua senha de seis dígitos. Lembrava-se , apenas dos dois primeiros (mês do seu nascimento) e dos dois últimos (sua idade atual). Supondo que levou cerca de um minuto em cada tentativa de completar a senha e que esgotou todas as alternativas distintas possíveis , somente acertando na última, Mariana retirou os reais desejados após cerca de ...

a) 1h 40min b) 1h 30min.

c) 1h 21min. d) 1h.

e) 45min

16 - A Série A do campeonato brasileiro de futebol é disputada por vinte equipes. De quantas formas, classificando o primeiro, o segundo e o terceiro colocados, poderá ser concluído o campeonato? Observe que a classificação após o terceiro lugar não importa.

a) 60. b) 1140.

c) 2280. d) 6840.

17 - Nas Olimpíadas PUCRS 2009, foram inscritas 12 equipes de futsal feminino. O número de resultados diferentes para os dois primeiros colocados é:

a) 6 b) 12

c) 66

d) 132 e) 264

18 - De quantas maneiras diferentes é possível escolher o primeiro, o segundo e o terceiro colocados, em uma competição artística da qual participam 15 pessoas, todos com a mesma chance de ganhar?

a) 45 b) 225

c) 455 d) 2730

19 - Se um alfabeto contém 6 vogais e 20 consoantes, qual o número máximo de palavras com 4 caracteres que se pode formar, contendo pelo menos uma consoante e pelo menos uma vogal?

a) 295678 b) 295680

c) 295682 d) 295684

e) 295686

20 - Em uma tribo indígena o pajé conversava com seu totem por meio de um alfabeto musical. Tal alfabeto era formado por batidas feitas em cinco tambores de diferentes sons e tamanhos. Se cada letra era formada por três batidas, sendo cada uma em um tambor diferente, pode-se afirmar que esse alfabeto possuía:

a) 10 letras. b) 20 letras.

c) 26 letras. d) 49 letras.

e) 60 letras.

6.3.6. Atividade 6

ATIVIDADE 6

Titulo: Combinação Simples

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de Combinação Simples.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões

Procedimento:

Leia atentamente cada questão da lista de questões;

Resolva cada questão de lista;

Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Um teste consta de 5 questões, das quais o aluno deve escolher apenas duas para resolver. De quantas formas diferentes ele poderá escolher as duas questões?

02. Desejamos formar um trio de alunos entre os cinco melhores de um colégio, para representar a escola em uma gincana de matemática, na cidade. Quantos trios diferentes poderiam ser formados?

03. Seis amigos marcaram de se encontrar às 15 horas, na biblioteca da escola onde estudam, para realizar um trabalho de matemática. Chegando no local marcado, cada amigo cumprimenta todas as outras uma única vez. Quantos apertos de mãos foram dados?

04. Dos seis funcionários de uma empresa, quatro devem ser escolhidos para uma viajem. De quantas maneiras diferentes isso poderá ser feito?

05. Creuza deseja viajar e levar 5 pares de sapatos, sabendo que ela possui em sua sapateira 7 pares, de quantas maneiras diferentes Creuza poderá escolher os pares de sapatos para a viagem?

06. Nos jogos estudantis de uma escola, apenas quatro competidores se escreveram para disputar um campeonato de xadrez, em que cada competidor joga uma vez com todos os outros. Quantos jogos serão realizados nesse campeonato?

Quadro 6

Ques-tão	Qual o número **n** de elementos à disposição do evento, da situação?	Quantos elemen-tos **p** devemos selecio-nar para realizar cada agrupa-mento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupa-mento, na forma de fatorial **(p!).**	Qual o número de possibilidades da						Qual o total de possibili-dades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Express e o resultado em função dos valores de n e de p na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolh a para o agrupa - mento?	2ª escolh a para o agrupa - mento?	3ª escolh a para o agrupa - mento?	4ª escolh a para o agrupa - mento?	5ª escolh a para o agrupa - mento?	6ª escolha para o agrupa-mento?				
1ª															
2ª															
3ª															
4ª															
5ª															
6ª															
7ª															

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

.

Orientações didáticas

Na Atividade 6, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas, a partir delas preencham o Quadro 6, para que se chegue a fórmula geral de Combinação Simples.

As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Atenção para as resoluções, os grupos podem estar habituados a resolver as questões pelo P.F.C. e mesmo tento trabalhado a diferença entre Arranjo Simples e Combinação Simples na Atividade 4, algum grupo pode ainda esquecer de verificar se a ordem de escolha dos elementos altera ou não o agrupamento. Oriente, de modo geral e nos grupos, que comparem e identifique se o problema e de Arranjo ou Combinação. Com eles ainda não sabem resolver problemas de Combinação adote a seguinte postura.

- Postura para orientá-los a responder as questões e gerar a fórmula de Combinação Simples.

1º - Deixe que resolvam as questões como se fosse de Arranjo Simples, depois solicite que montem todas as possibilidades listando-as.

1º - Peça para que verifiquem, se o resultado feito por Arranjo, coincide com o número de agrupamentos que foram montados;

2º - Questione se a resolução por meio de Arranjo Simples, esta fazendo com que se crie agrupamentos a mais;

3º - Pergunte para eles, se era necessário ter feito a permutação dos elementos dentro de cada arupamento, ou seja, se a troca de elementos alterava o agrupamento;

4º - Pergunte o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estam em excesso e se chegue ao resultado encontrado com a listagem das possibilidades.

2º) Ao preenchimento do quadro 6.

As perguntas anteriores, podem levá-los a completar a tabela até a antepenúltima coluna, que deverá ser parte mais dificultosa da construção, pois expressa o cálculo necessário para se obter o resultado. A partir daí, as dúvidas poderão diminuir, devido as duas últimas colunas terem a ideia da atividade anterior, de completar fatorial e escrever em função de “n” e “p”, respectivamente.

Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a imagem a seguir.

Figura 6 - Quadro a ser preenchido da atividade 6.

Questão	Qual o número n de elementos a disposição do evento, da situação?	Quantos elementos p devemos selecionar para realizar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (p!).	Qual o número de possibilidades da						Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de n e de p na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha para o agrupamento?	2ª escolha para o agrupamento?	3ª escolha para o agrupamento?	4ª escolha para o agrupamento?	5ª escolha para o agrupamento?	6ª escolha para o agrupamento?				
1ª	5	2		x	2!	5	4	-	-	-	-	10	$\frac{5.4}{2}$	$\frac{5!}{2!.3!}$	$\frac{5!}{2!.(5-2)!}$
2ª	5	3		x	3!	5	4	3	-	-	-	10	$\frac{5.4.3}{6}$	$\frac{5!}{3!.2!}$	$\frac{5!}{3!.(5-3)!}$
3ª	6	3		x	3!	6	5	4	-	-	-	20	$\frac{6.5.4}{6}$	$\frac{6!}{3!.3!}$	$\frac{6!}{3!.(6-3)!}$
4ª	6	4		x	4!	6	5	4	3	-	-	15	$\frac{6.5.4.3}{24}$	$\frac{6!}{4!.2!}$	$\frac{6!}{4!.(6-4)!}$
5ª	7	5		x	5!	7	6	5	4	3	-	21	$\frac{7.6.5.4.3}{120}$	$\frac{7!}{5!.2!}$	$\frac{7!}{5!.(7-5)!}$
6ª	4	2		x	2!	4	3	-	-	-	-	6	$\frac{4.3}{2}$	$\frac{4!}{2!.2!}$	$\frac{4!}{2!.(4-2)!}$

3º) A elaboração da conclusão.

Os alunos podem solicitar informações de como elaborar a conclusão. Peça-os que concluam o que é Combinação Simples de “n” elementos tomados “p” a “p”, escrevendo qual é a característica sobre a ordem de escolhas dos elementos em cada agrupamento e identifique na última coluna o padrão que foi gerado mostrando uma fórmula geral para o cálculo. Deixe perguntas que possam servir de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões. Coloque-as no quadro da sala, nelas eles devem encontrar expressões para fundamentar, de modo geral, suas conclusões.

As perguntas que podem ser colocadas no quadro antes dos grupos elaborarem as conclusões são:

- Formamos agrupamentos?
- Cada agrupamento se diferencia do outro, quando mudamos a posição dos elementos?
- Para se montar cada agrupamento, escolhemos **p** elementos dos **n** a disposição do evento?

- O que é a combinação simples de “n” elementos tomados p a p?
- Que fórmula (padrão) matemática serviria para resolver qualquer problema de combinação simples ($C_{n,p}$)?

Após os grupos terminarem a atividade, interaja com eles a resoluções das questões, o preenchimento da tabela e as conclusões que foram escritas, analisando os pontos positivos e negativos, elaborando no final a sua conclusão a respeito do que seria Combinação Simples de “n” elementos tomados “p” a “p”.

Uma atitude importante, para que os alunos aprofundem o conhecimento adquirido, é exercitar o que aprenderam. Então, como sugestão, temos o jogo DOMINÓ COMBINATÓRIO (em anexo), extraído de Pinheiro (2008) e prepare uma lista de fixação, onde haja questões mais complexas, com restrições que exijam um pouco mais de raciocínio, ao ponto de ampliar, aprofundar e consolidar o conhecimento adquirido.

Sobre o uso do jogo Dominó Combinatório, um jogo bem divertido que deve abrilhantar a aula. O número de participantes é de no mínimo dois participantes e as regras são:

- As cartas devem ser distribuídas em quantidades iguais para cada participante.
- Para definir quem dará início à partida sugerimos a maior jogada no dado, zerinho um, par ou ímpar, enfim o que melhor convier aos participantes.
- As cartas deverão ser despejadas na mesa formando uma sequência de cartas que deverão sempre ser associadas da seguinte forma: um texto de combinação à palavra COMBINAÇÃO, um texto de arranjo à palavra ARRANJO.
- Caso um participante associe uma carta errada, este terá sua carta de volta e perderá a chance de despejar outra carta.
- O participante que primeiro conseguir despejar todas as suas cartas de forma correta, será o vencedor.

A seguir, apresentaremos uma lista exercícios, que serve como referência, ficando a critério a modificação das questões.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA COMBINAÇÃO SIMPLES

01. Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

RESOLUÇÃO:

02. Se existem 11 pessoas em uma sala e cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez, o número de apertos de mão dados será igual a

a) 55 b) 65
c) 110 d) 121

03. Formam-se comissões de três professores entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formados é:

A) 35 B) 45 C) 210
D) 7^3 E) 7!

04. Numa congregação de 30 professores, 14 lecionam matemática, O número de comissões com 14 professores que podem ser formadas de modo que, em cada uma, tenha apenas um professor de matemática é

a) 7540 b) 7840
c) 8040 d) 8340

05. Um técnico de futebol de salão tem à disposição 8 jogadores de linha e 2 goleiros. Um time deve ter quatro jogadores de linha e um goleiro. O número de times distintos que o técnico pode escalar é:

a) 60 b) 70 c) 80
d) 120 e) 140

06. Por ocasião dos festejos da Semana da Pátria, uma escola decidiu exibir seus melhores atletas e as respectivas medalhas. Desses atletas, em número de oito e designados por a_1, a_2, a_3, …, a_8, serão escolhidos cinco para, no momento do desfile, fazerem honra à Bandeira Nacional. Do total de grupos que podem ser formados, em quantos o atleta a_2 estará presente?

RESOLUÇÃO:

07. Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.
RESOLUÇÃO:

08. Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus Nacionais	Museus Internacionais
Masp – São Paulo	**Louvre** – Paris
MAM – São Paulo	**Prado** – Madri
Ipiranga – São Paulo	**British Museum** – Londres
Imperial – Petrópolis	**Metropolitan** – Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?
RESOLUÇÃO:

09. Durante uma viagem, foram sorteados, entre os 300 passageiros do navio, três brindes, que eram viagens para 3 diferentes lugares. Pelo critério da empresa, a pessoa que ganhasse um brinde era eliminada para o outro sorteio Dessa forma, o número de maneiras distintas de realização do sorteio é dado por:
a) A_{300}^{3} b) $C_{300,3}$ c) 300^3
d) 300! e) $C_{300}^{3}.C_{299}^{2}.C_{298}^{3}$

10. Maria tinha 6 palpites de números para jogar no concurso da MEGASENA (6 números) da Caixa econômica Federal. Quantas cartelas (jogos) ela conseguirá formar?
RESOLUÇÃO:

11. Uma empresa realizou um concurso para preencher 2 vagas de agente administrativo, 3 para técnico em informática, e 1 para serviços gerais. Dos candidatos inscritos, 8 concorreram ao cargo de agente administrativo, 10 ao de técnico em informática e 7 ao de serviços gerais. Qual das alternativas abaixo, indica o número de maneiras distintas que estas vagas podem ser preenchidas pelos candidatos?
RESOLUÇÃO:

12. A graviola é uma fruta que possui diversos nutrientes, como as Vitaminas C, B1 e B2 e os Sais Minerais: Cálcio, Fósforo, Ferro, Potássio e Sódio. Uma indústria química deseja fabricar um produto a partir da combinação de 4 daqueles nutrientes, entre vitaminas ou sais minerais, encontrados na graviola. A quantidade de produtos que poderá ser fabricada, se forem utilizados no máximo 2 tipos de vitaminas, será de

a) 26 b) 30 c) 32
d) 60 e) 65

13. Um fisioterapeuta recomendou a um paciente que fizesse, todos os dias, três tipos diferentes de exercícios e lhe forneceu uma lista contendo sete tipos diferentes de exercícios adequados a esse tratamento. Ao começar o tratamento, o paciente resolve que, a cada dia, sua escolha dos três exercícios será distinta das escolhas feitas anteriormente. O número máximo de dias que o paciente poderá manter esse procedimento é

A) 35 B) 38 C) 40
D) 42 E) 60

14. Na agenda de um médico, há dez horários diferentes disponíveis para agendamento de consultas, mas ele irá disponibilizar dois desses horários para o atendimento de representantes de laboratórios. O número de maneiras diferentes que esse médico poderá escolher os dois horários para atender os representantes é

a) 40. b) 43. c) 45.
d) 38. e) 35.

15. Maria foi a uma lanchonete que oferece seis frutas diferentes para o preparo de sucos (laranja, maracujá, morango, abacaxi, acerola e goiaba) e permite que o cliente escolha duas frutas diferentes para o preparo de cada suco. Sabendo que Maria não mistura goiaba com outras frutas e não gosta de morango com acerola, o número de maneiras diferentes de Maria escolher as duas frutas para o seu suco é

a) 6. b) 7. c) 8.
d) 9. e) 10.

16. Em uma sala estão presentes n pessoas, com n>3. Pelo menos uma pessoa da sala não trocou aperto de mão com todos os presentes na sala, e os demais presentes trocaram apertos de mão entre si, e um único aperto por dupla de pessoas. Nessas condições, o número máximo de apertos trocados pelas n pessoas é igual a

a) $\frac{n^2+3n-2}{2}$ b) $\frac{n^2-n+2}{2}$ c) $\frac{n^2+2n-2}{2}$
d) $\frac{n^2-3n+2}{2}$ e) $\frac{n^2-n-2}{2}$

17. Um farmacêutico dispõe de 3 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais. Deseja combinar 3 desses nutrientes para obter compostos químicos.

- O número de compostos químicos distintos que poderá ser preparado usando, no máximo, duas vitaminas é igual a

a) 9 b) 10 c) 18
d) 19 e) 20

18. Para aumentar as chances de ganhar no sorteio da mega-sena da virada, um grupo de dez amigos se juntou e fez todos os jogos possíveis de seis “dezenas” diferentes, escolhidas dentre quinze “dezenas” distintas previamente escolhidas. Qual o total de jogos que foram realizados por este grupo de amigos?

a) 5.000 b) 5.005 c) 5.010
d) 5.015 e) 5.020

19. Os sintomas mais comuns do vírus ebola são febre, diarreia, dores de cabeça, fraqueza, dor de garganta, dores nas articulações e calafrios. Em um hospital, depois que alguns pacientes foram examinados, constatou-se que cada um deles tinha exatamente três dos sete sintomas desse vírus, mas quaisquer dois deles não apresentavam os mesmos três sintomas.

- A partir dessas informações, infere-se que o número máximo de pacientes examinados foi

a) superior a 30 e inferior a 40.
b) superior a 40.
c) inferior a 20.
d) superior a 20 e inferior a 30.

20. Geralmente os alunos que terminam o Ensino Médio fazem uma festa de formatura, e durante o ano esses alunos realizam bingos, festas, etc para arrecadar fundos para a festa. Em uma escola há somente uma turma com 20 alunos, que se reuniram para formar uma comissão com 3 membros.

- Quantos grupos diferentes podem ser formados, sabendo que a líder da classe terá de fazer parte do grupo?

6.3.7. Atividade 7

ATIVIDADE 7

Titulo: Permutação com Repetição

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de Permutação com repetição.

Material: Roteiro da atividade, caneta ou lápis e lista de questões

Procedimento:

- Leia atentamente cada questão da lista de questões;
- Resolva cada questão de lista;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

QUESTÕES

01. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ANA?

02. Um aluno, que nasceu em 1999, resolveu criar uma senha de acesso ao seu computador, utilizando os 4 dígitos que formam o ano de seu nascimento. Quantas senhas ele terá a sua disposição?

03. De quantas formas quatro sinais de + (mais) e um sinais de – (menos), podem ser colocados **entre** os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, ficando cada um entre dois algarismos (Exemplo: 1 + 2 + 3 + 4 – 5 + 6)?

04. De quantas maneiras distintas podem-se alinhar duas estacas azuis idênticas e duas brancas também idênticas?

05. Um cacique, ao homenagear a filha, deu o nome à nossa querida fruta (AÇAI), fazendo apenas a inversão das letras da palavra IAÇA. Porém, com essas letras, qual é o total de anagramas que poderiam ser formados?

06. Quantos anagramas podemos formar, com as letras da palavra ERRAR?

Quadro 7.

Situa -ção	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual o número de etapas **p** (escolhas para realizar o evento) indepen -dentes no evento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Quantos elementos repetidos aparecem em cada situação?	Permute os elementos repetidos em cada situação e escreva o resultado em forma de fatorial.	Qual o número de possibilidades da					Qual o total de possibili- dades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.
			SIM	NÃO			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?			
1ª														
2ª														
3ª														
4ª														
5ª														
6ª														

OBSERVAÇÃO:

CONCLUSÃO:

Orientações didáticas

Na Atividade 7, separe a turma com os mesmos grupos da atividade anterior, explique que a intensão é fazer com que eles resolvam as questões propostas e a partir delas preencham o Quadro 7, para que se chegue a fórmula geral de Permutação com Elementos Repetidos.

As principais dúvidas que poderão ocorrer durante esta atividade, serão relacionadas:

1º) A resolução das questões.

Atenção para as resoluções, os grupos podem estar habituados em resolvê-las pelo P.F.C., quando não há elementos repetidos. Adote a seguinte postura para ajudá-los em suas conclusões.

- Postura para orientá-los a responder as questões e gerar a fórmula de Permutação com Elementos Repetidos.

1º - Deixe que resolvam as questões como se fossem de Permutação Simples e solicite que montem todas as possibilidades listando-as.

2º - Peça para que verifiquem, se o resultado feito por Permutação Simples coincide com o número de agrupamentos que foram montados;

3º - Questione se a resolução por meio de Permutação Simples, estava fazendo com que se crie agrupamentos a mais;

4º - Pergunte para eles, se era necessário ter feito a permutação dos elementos repetidos dentro de cada arupamento, ou seja, se a troca de posição desses elementos alterava o agrupamento;

5º - Pergunte o que eles poderiam fazer, para corrigir o número de agrupamentos que estam em excesso e se chegue ao resultado correto, encontrado com a listagem das possibilidades.

2º) Ao preenchimento do Quadro 7.

As perguntas anteriores, podem os levar a completar a tabela até a penúltima coluna, que será a parte mais dificultosa da construção, pois expressa o cálculo necessário para de obter o resultado. A partir daí, faltará preencher a última coluna e pelas experiências adquiridas anteriormente, os alunos podem não ter dificuldades em escrever o cálculo por meio de fatorial. Após a tabela ser preenchida, peça para que eles verifiquem se os fatoriais na última coluna estão em função do número total de elementos e do número de elementos repetidos de cada questão, ou seja, se foi gerado um padrão. A 6ª coluna (Permute os elementos repetidos em cada situação e escreva o resultado em forma de fatoriial), a ser preenchida, também poderá causar dúvidas, peça que considere cada elemento repetido como se fossem diferentes (como X, **X**, X, ...) e que apenas dessa maneira poderá permutá-los.

Após o preenchimento do quadro os alunos terão uma visualização parecida com a imagem a seguir.

Figura 7 - Quadro a ser preenchido da Atividade 7.

Situa-ção	Qual o número n de elemen-tos a disposi-ção do evento, na situação?	Qual o número de etapas p (escolhas para realizar o evento) indepen-dentes no evento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Quantos elemen-tos repeti-dos (a,b,c,...) apare-cem em cada situação?	Permute os elementos repetidos em cada situação e escreva o resultado em forma de fatorial.	Qual o número de possibilidades da					Qual o total de possibili-dades?	Cálculo realizado para obter o resultado	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.
			SIM	NÃO			1ª etapa?	2ª etapa?	3ª etapa?	4ª etapa?	5ª etapa?			
1ª	3	3	x		2	2!	3	2	1	-	-	3	$\frac{3.2.1}{2}$	$\frac{3!}{2!}$
2ª	4	4	x		3	3!	4	3	2	1	-	4	$\frac{4.3.2.1}{6}$	$\frac{4!}{3!}$
3ª	5	5	x		4	4!	5	4	3	2	1	5	$\frac{5.4.3.2.1}{24}$	$\frac{5!}{4!}$
4ª	4	4	x		2 e 2	2! e 2!	4	3	2	1	-	6	$\frac{4.3.2.1}{4}$	$\frac{4!}{2!.2!}$
5ª	4	4	x		2	2!	4	3	2	1	-	12	$\frac{4.3.2.1}{2}$	$\frac{4!}{2!}$
6ª	5	5	x		3	3!	5	4	3	2	1	20	$\frac{5.4.3.2.1}{6}$	$\frac{5!}{3!}$

3º) A elaboração da conclusão.

Os alunos podem solicitar informações de como elaborar a conclusão. Peça-os que concluam o que é permutação com Elementos Repetidos, escrevendo qual é a característica sobre a ordem de escolhas dos elementos em cada agrupamento e identifique na última coluna o padrão que foi gerado mostrando uma fórmula geral para o cálculo. Deixe perguntas que devem servir de motivação e/ou incremento para o acabamento final das conclusões. Coloque-as no quadro da sala, nelas eles podem encontrar expressões para fundamentar, de modo geral, suas conclusões.

As perguntas que poderão ser colocadas no quadro antes dos grupos elaborarem as conclusões são:

- Permutamos elementos?
- Cada agrupamento se diferencia do outro, quando mudamos a posição dos elementos?
- Em cada agrupamento aparece elementos repetidos? Quantas vezes?
- O que é a Permutação com Elementos Repetidos?

- Que fórmula (padrão) matemática serviria para resolver qualquer problema de Permutação com Elementos Repetidos ($P_n^{a,b,c,\ldots}$)?

Após os grupos terminarem a atividade, interaja com eles a resoluções das questões, o preenchimento da tabela e as conclusões que foram escritas, analisando os pontos positivos e negativos, elaborando no final a sua conclusão a respeito do que seria Permutação com Elementos Repetidos.

Uma atitude importante, para que os alunos aprofundem o conhecimento adquirido, é exercitar o que aprenderam. Então, prepare uma lista de fixação, onde haja questões mais complexas, com restrições que exijam um pouco mais de raciocínio, ao ponto de ampliar, aprofundar e consolidar o conhecimento adquirido. A seguir, apresentaremos uma lista exercícios, que serve como referência, ficando a critério a modificação das questões.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA A PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

01. Quantos números de cinco algarismos podemos escrever apenas com os dígitos 1, 1, 2, 2 e 3, respeitadas as repetições apresentadas?

02. Um cacique, ao homenagear a filha, deu o nome à nossa querida fruta (AÇAI), fazendo apenas a inversão das letras da palavra IAÇA. Porém, com essas letras, o total de anagramas que poderiam ser formados é de:

a) 36 b) 24 c) 18
d) 12 e) 6

03. Quantos anagramas distintos com as letras da palavra PINDAMOIANGABA podemos formar?

04. Quantos anagramas com a palavra ARARA?

05. É do grande poeta português Fernando Pessoa a belíssima frase

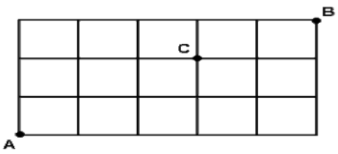
“<u>Tudo</u> <u>vale</u> <u>a</u> <u>pena</u> <u>se</u> <u>a</u> <u>alma</u> <u>não</u> <u>é</u> <u>pequena</u>”

Tomados pelo espírito dessa frase, queremos formar novas sequências de palavras, permutando-se as palavras do verso, indiferentemente de constituir ou não frases, Por exemplo: “<u>A</u> <u>pena</u> <u>não</u> <u>vale</u> <u>tudo</u> <u>se</u> <u>pequena</u> <u>é</u> <u>a</u> <u>alma</u>” ou “<u>A</u> <u>a</u> <u>é</u> <u>pena</u> <u>não</u> <u>se</u> <u>vale</u> <u>pequena</u> <u>tudo</u> <u>alma</u>”.

É correto afirmar que o número de sequências distintas de palavras que se pode construir, utilizando-se todas as dez palavras, é igual a

a) 453.600 b) 907.200 c) 1.814.400
d) 3.628.800 e) 7.257.600

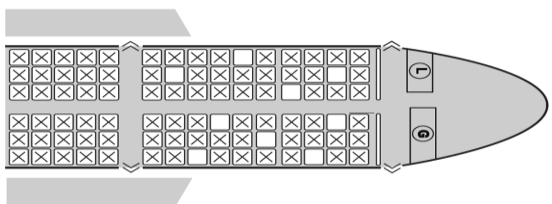
06. No desenho a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões.



A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A e B que passam por C é

a) 12 c)15 e) 30
b) 13 d)24

07. Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net.
Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$ b) $\frac{9!}{7!\times 2!}$ c) 7!

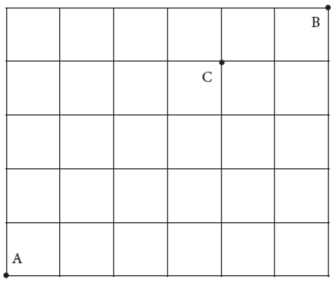
d) $\frac{5!}{2!}\times 4!$ e) $\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}$

08. Durante a aula de matemática, o professor colocou as 30 cadeiras em círculos e pediu para que os 30 alunos se sentassem. De quantos modos diferentes eles podem fazer esse círculo?

09. Uma roda Gigante é constituída de 15 acentos duplos. Assim sendo de quantos modos podemos dispor 15 casais nesse Brinquedo de modo que sempre cada casal permaneça junto?

10. A figura a seguir supostamente representa o mapa da cidade onde se encontra Paulo, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste. Se na praça localizada no ponto B ocorre uma manifestação pacífica, organizada por estudantes, e Paulo encontrase no ponto A, quantos são os trajetos de comprimento mínimo que Paulo pode escolher, a fim de participar dessa manifestação, se ele deseja passar

antes na casa do seu tio, que se encontra localizada no ponto C? Assinale a alternativa que contenha a resposta correta:



a) 13 possibilidades

b) 462 possibilidades

c) 70 possibilidades

d) 210 possibilidades

7. LEITURAS RECOMENDADAS

Para maior aprofundamento, relativo ao que descrevemos em nosso produto, recomendamos que leiam com mais propriedade os seguintes textos:

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa Anísio Teixeira – INEP. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf. Acesso em 24 de fevereiro de 2018.

CABRAL, M. A. **A Utilização de Jogos no Ensino de Matemática**. 52p. Monografia para habilitação em Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2006.

DANTE, L, R. **Didática da resolução de problemas**. 12 ed. São Paulo: Ática 2002.

MENDES, I. A., CHAQUIAM, M. **História nas Aulas de Matemática:** fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

SANTOS, José P. de O.; MELO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Editora da UNICAMP, Campinas - SP, 1995.

SÁ, P. F. de. **Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, P. F. de. A resolução de problemas: concepção e sugestões para aula de Matemática. **Traço**: revista do centro de ciências exatas e tecnologia. Belém: UNAMA, v.7, n.16, p. 63-77, 2005.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho é fruto de uma sequência didática desenvolvida na dissertação de Rosas (2018), que teve por objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática diferente da tradicional, sobre a participação e o desempenho na resolução de questões de Análise Combinatória. Haja vista, que o assunto tem mostrado que professores e alunos sentem dificuldades de se socializar com a mesma, tornando o ensino-aprendizagem pouco satisfatório. Com isso, esperamos que docentes do ensino médio e/ou fundamental, considerem o nosso produto e saibam administrar as atividades garantindo o envolvimento de todos na sala de aula. Que nessa metodologia, o aluno seja estimulado a discutir com seus colegas e professores, atividades e estratégias que julgamos adequadas para compreensão de cada tópico do conteúdo, que desenvolva o pensamento lógico, a criatividade, a intuição e a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação, para ser capaz de questionar a realidade que o cerca.

REFERENCIA

ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática:** um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. 166p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ALMEIDA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área.** Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) Universidade Católica de Brasília – UCB, Brasília, 2006.

ANTUNES, L. R; DO Vale, M. B.; **Análise Combinatória na Escola Pública**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Centro de Ciências Sociais e Educação. Belém, UEPA, 2005. p. 89.

BASTOS, A. C. O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de Situações-Problema e Sob uma Abordagem Histórica. In: **XVII Encontro Nacional de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, Instituto Federal do Espírito Santo, 2013.

BATANERO, C.; GODINO, J.D; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio En Alumnos de Secundaria**. Educación Matemática, México, V.8, p. 26-39, agosto, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 2000.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa Anísio Teixeira – INEP. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf. Acesso em 24 de fevereiro de 2018.

CABRAL, M. A. **A Utilização de Jogos no Ensino de Matemática**. 52p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2006.

CARVALHO, G. Q. **O Uso de Jogos na Resolução de problemas de Contagem:** um estudo de caso em uma turma do 8º ano do colégio militar de Porto Alegra. 195 p. Dissertação (Mestrado em ensino de Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2009.

COSTA, E. R. S. **Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do Ensino Médio**. 108 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Lavras. Minas Gerais. 2013.

DURO, M. L. **Análise Combinatória e Construção de Possibilidades:** O raciocínio formal no ensino médio. 106 p. Dissertação (Mestrado em educação Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2012.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental**. São Paulo, 2000, 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Domingues, H. H. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 5. São Paulo: Atual, 1993.

KNOBLOCH, E. The origins of modern combinatorics. In: WATKINS, John J.; WILSON, R. **Combinatorics: ancient and modern**. Oxford: Oxford University Press, 2013. Cap. 6. p. 147-163.

LIMA JÚNIOR, R. A. de. **Estratégias utilizadas por alunos do ensino médio em problemas de Análise Combinatória**. 2014. 76p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – UEPA, Belém, 2014.

MENDES, D. F. **A abrangência das permutações na análise combinatória.** 68 p. Dissertação (Mestrado profissional em matemática). Universidade de Brasília. Brasília. 2014.

OLIVEIRA, M.R. de; CARNEIRO, M. L. da R. **Elementos da Matemática**. 2ª ed. Belém: GTR, 2009.

PACHECO, A. B. **Uma investigação sobre erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais e não-verbais no campo da Análise Combinatória**. 257 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2001.

PINHEIRO, C.A.M. **O ensino de análise combinatória a partir de situações problema**.166 fls. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

PINHEIRO, C. A. M; ROSA, I. S. **Dá Análise Combinatória: o que ficou em alunos e professores do Ensino Médio?** 52 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Centro de Ciências Sociais e Educação. Universidade do Estado do Pará. Belém, 2006.

PINHEIRO, C.A.M.; Jucá, R. S. Análise combinatória: elementos históricos e culturais. In: **Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Ilhéus. p.521 - 532, 2015.

ROSAS, L. da S. **Ensino de análise combinatória por atividades**. 315p. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

SANCHIS, I de P.; MAHFOUD, M. Interação e construção: o sujeito e o conhecimento no construtivismo de Piaget. **Ciências & Cognição:** revista científica de estudos da cognição. Publicado on line em 03 de dezembro de 2007. v.12, p.165-177, 2007.

SANTOS, José P. de O.; MELO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Editora da UNICAMP, Campinas - SP, 1995.

SÁ, P. F. de. **Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, P. F. de. A resolução de problemas: concepção e sugestões para aula de Matemática. **Traço**: revista do centro de ciências exatas e tecnologia. Belém: UNAMA, v.7, n.16, p. 63-77, 2005.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**. 94f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. 1999.

TATAIA, E. C. de O. **Análise combinatória para o ensino médio.** Monografia (Especialização em educação Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte. 2012.

VAZQUEZ, C. M. R. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadoras em uma escola do interior paulista.** 90 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2011.

SITES

http://www.socontabilidade.com.br/conteudo/biografia_autores.php - Acesso em: 24 Fev. 2018.

http://matematicaestud.blogspot.com.br/2013/09/os-jogos-de-azar-e-analise-combinatoria.html - Acesso em: 24 Fev. 2018.

http://www.somatematica.com.br/biograf/fermat.php - Acesso em: 24 Fev. 2018.

http://www.aprender-mat.info/portugal/historyDetail.htm?id=MacMahon - Acesso em: 24 Fev. 2018.

http://apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Rota - Acesso em: 24 Fev. 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – JOGO: CARTA DA COMBINATÓRIA

Participantes: de dois a quatro participantes;

Objetivo: Fixar o conceito de permutação e a noção de fatorial.

Regras:

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;
- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro uma trinca que possua a mesma significância entre elas.

De quantas maneiras diferentes cinco pessoas A, B, C, D e E podem ser dispostas em uma fila indiana.	P_5	120
5.4.3.2.1	P_4	4.3.2.1
4!	24	6!

6.5.4.3.2.1	P_6	720
(3 - 1)!	2!	2.1
$P_3 - \frac{\mathbf{4}!}{\mathbf{3}!}$	De quantas maneiras diferentes podemos dispor, numa mesma prateleira de uma estante, três livros de Matemática e quatro de Física, de modo que os de mesma matéria permaneçam juntos?	$P_3.P_4.P_2$

288

3.2.1.4.3.2.1.2.

1

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}$$

n

$$\frac{\boldsymbol{n}.\,(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}$$

n fatorial dividido por n menos um

fatorial

Anagramas são palavras formadas pela reordenação das letras de uma outra palavra. Sendo assim, calcule o número de anagramas da palavra SOL.

P_3

3.2.1

$3!$	$(7 + 1)!$	$8!$
P_8	8.7.6.5.4.3.2.1	$\frac{\mathbf{5}!}{\mathbf{6}!}$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$	$\frac{\mathbf{5.\,4.\,3.\,2.\,1}}{\mathbf{6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1}}$	Permutação de 5 elementos dividido pela permutação de 6 elementos.

$(n-1)! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1$	$(n-1)! = 9!$	$n = 10$
P_9	$\frac{\mathbf{4}!}{(\mathbf{4}-\mathbf{2})!}$	4.3
12	$\frac{\mathbf{4}!}{\mathbf{2}!}$	$\frac{\mathbf{8}!}{(\mathbf{8}-\mathbf{2})!}$

8.7	56	$\frac{\mathbf{8}!}{\mathbf{6}!}$
$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}!}$	2	$\frac{\mathbf{4.3.2.1}}{\mathbf{2.1.3.2.1}}$
$\frac{\mathbf{4}!}{\mathbf{2}!.\,\mathbf{3}!}$		

ANEXOS

ANEXO A – JOGO: PIF-PAF DA COMBINATÓRIA

Participantes: de dois a quatro participantes;

Regras:

- Inicia o jogo quem sortear por primeiro entre todas as cartas um enunciado, quem sortear por segundo um enunciado será o segundo a jogar e assim, sucessivamente, até o último participante;
- O participante que sortear por último o enunciado distribuirá, aleatoriamente e alternadamente, nove cartas a cada um dos participantes;
- O jogo começa quando o primeiro participante tira uma das cartas restantes, tendo as opções de trocar por outra que ele já possua ou descartá-la, passando a vez para o próximo participante que poderá pegar a carta descartada ou pegar outra no lote das cartas restantes e sucessivamente;
- Vence o jogo o participante que conseguir formar primeiro as triplas contendo em cada uma delas um enunciado, um processo e um resultado. Veja os **Exemplos a seguir**:

Sabendo que um salão tem 5 portas, determine o número de maneiras distintas de entrar nele e sair dele sem usar a mesma porta?	**5 . 4**	**20**
Uma moça possui 3 blusas e 2 saias. De quantas formas ela pode se vestir?	**3 . 2**	6

Eis as cartas:

CARTA PROBLEMA 01

Com os números 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números naturais de três algarismo distintos podem ser escritos ?	$5 \cdot 4 \cdot 3$	$5 \cdot 4 \cdot 3$	60

CARTA PROBLEMA 02

Miranda deseja formar um conjunto calça-blusa para vestir-se. se ele dispõe de 7 calças e 8 blusas para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto?	$7 \cdot 8$	$7 \cdot 8$	56

CARTA PROBLEMA 03

No campo do Combinatória Esporte Clube há 10 portas de entrada. Quantas maneiras diferentes existem de um torcedor entrar por uma porta e sair por outra diferente?	$10 \cdot 9$	$10 \cdot 9$	90

CARTA PROBLEMA 04

Dionísio vai a um restaurante disposto a comer um prato de carne e uma só sobremesa. o cardápio oferece dez pratos distintos de carne e seis diferentes Tipos de sobremesa. de quantas maneiras diferentes Dionísio pode fazer seu pedido?	$\boxed{10 \cdot 6}$	$\boxed{10 \cdot 6}$	$\boxed{60}$

CARTA PROBLEMA 05

Um "Shopping Center" possui 8 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 2 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?	$\boxed{8 \cdot 5 \cdot 2}$	$\boxed{8 \cdot 5 \cdot 2}$	$\boxed{80}$

CARTA PROBLEMA 06

Uma fechadura de segredo possui 3 contadores que podem assumir valores de 0 a 9 cada um, de tal sorte que, ao girar os contadores, esses números podem ser combinados, para formar o segredo e abrir a fechadura. De quantos modos esses números podem ser combinados para se tentar encontrar o segredo?	$\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$	$\boxed{10 \cdot 10 \cdot 10}$	$\boxed{1000}$

CARTA PROBLEMA 07

Uma sorveteria oferece uma taça de sorvete que pode vir coberto com calda de chocolate ou de morango ou de caramelo. Se o sorvete pode ser escolhido entre 10 sabores diferentes, quantos são as opções para um cliente escolher a taça com cobertura?	$\boxed{10 \cdot 3}$	$\boxed{10 \cdot 3}$	$\boxed{30}$

Carta problema 08

De quantas maneiras podemos classificar os 4 empregados de uma micro-empresa nas categorias A ou B, se um mesmo empregado pode pertencer às duas categorias?	$\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$	$\boxed{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$	$\boxed{81}$

Carta problema 09

Num concurso de 12 participantes, se nenhum puder ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras poderão ser distribuídos um primeiro e um segundo prêmios?	$\boxed{12 \cdot 11}$	$\boxed{12 \cdot 11}$	$\boxed{132}$

Carta problema 10

Dez atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1^0 , 2^0 e 3^0 lugares?	$\boxed{10 \cdot 9 \cdot 8}$	$\boxed{10 \cdot 9 \cdot 8}$	$\boxed{720}$

ANEXO B – JOGO: DOMINÓ COMBINATÓRIO

Este jogo consiste em 30 cartas. Algumas contêm um par de situações que representam COMBINAÇÃO/ARRANJO, COMBINAÇÃO/COMBINAÇÃO, ARRANJO/ARRANJO, que serão associadas às demais cartas nas quais estão os seguintes pares de palavras: COMBINAÇÃO/COMBINAÇÃO, ARRANJO/ARRANJO, COMBINAÇÃO/ARRANJO.

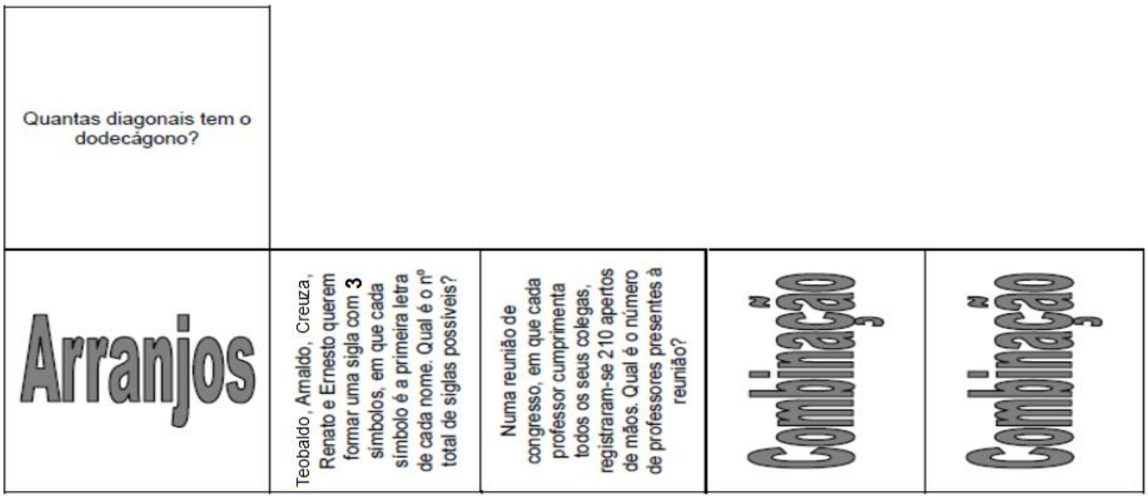
Objetivo: Livrar-se de todas as suas cartas, deitando-as na mesa, uma em cada rodada, associando uma situação de combinação (texto) à palavra COMBINAÇÃO; ou uma situação de arranjo (texto) à palavra ARRANJO.

Participantes: no mínimo dois.

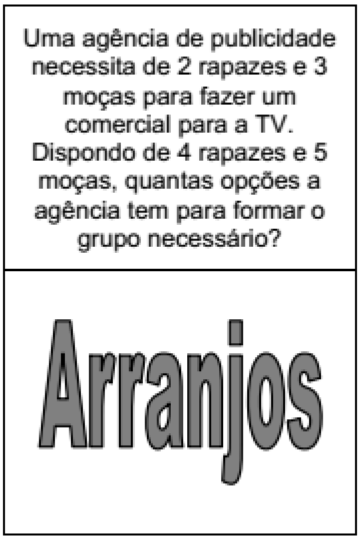
Regras:

- As cartas devem ser distribuídas em quantidades iguais para cada participante.
- Para definir quem dará início à partida sugerimos a maior jogada no dado, zerinho um, par ou ímpar, enfim o que melhor convier aos participantes.
- As cartas deverão ser despejadas na mesa formando uma sequência de cartas que deverão sempre ser associadas da seguinte forma: um texto de combinação à palavra COMBINAÇÃO, um texto de arranjo à palavra ARRANJO.

- Caso um participante associe uma carta errada, este terá sua carta de volta e perderá a chance de despejar outra carta.
- O participante que primeiro conseguir despejar todas as suas cartas de forma correta, será o vencedor.



A seguir as peças do Dominó Combinado;



Um examinador dispõe de 6 questões de Álgebra e 4 de Geometria para montar uma prova de 4 questões. Quantas provas diferentes ele pode montar usando 2 questões de Álgebra e 2 de Geometria?	Combinação
Combinação	Arranjos
Entre quatro alunos de uma turma será escolhida a diretoria do grêmio, formada por presidente, secretário e tesoureiro. De quantas maneiras tal diretoria pode ser formada com esses elementos?	Combinação
Combinação	Arranjos
Numa reunião de congresso, em que cada professor cumprimentou todos os seus colegas, registraram-se 210 apertos de mãos. Qual o número de professores presentes à reunião?	Combinação
Alfredo, Otavio, Ricardo, Sergio e Luiz querem formar uma sigla com 3 símbolos, em que cada símbolo é a primeira letra de cada nome. Qual é o numero total se siglas possíveis?	Combinação

Arranjos	Quantas palavras de três vogais não repetidas podemos formar com as vogais a, e, i, o, u?	Você faz parte de um grupo de 12 pessoas, 5 das quais deverão ser selecionadas para formar um grupo de trabalho. De quantos modos você poderá fazer parte do grupo a ser formado?
Arranjos	Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, quantos números três algarismos distintos podem ser formados?	**Arranjos**
Combinação	**Arranjos**	Dispomos de 7 frutas para fazer uma salada de frutas. De quantas maneiras diferentes podemos preparar a sala com apenas 5 frutas?
Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas com 7 alunos de uma escola?	Uma empresa possui 8 sócios, dos quais serão escolhidos 2 para os cargos de presidente e vice-presidente. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a escolha?	**Arranjos**
Uma empresa quer constituir uma comissão de empregados. Dentre os dez mais cotados e atuantes devem ser escolhidos três. De quantas maneiras essa comissão pode ser constituída?	Dez pessoas disputam uma corrida. Quantos são os possíveis resultados para as três primeiras colocações, sabendo que não pode haver empates?	**Arranjos**
Combinação	Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele	**Arranjos**

Combinação	Combinação
Em um colégio, há três estudantes concorrendo à presidência ou vice-presidência do grêmio: Bia, Cláudia e David. De quantas formas esses dois cargos podem ser preenchidos?	Arranjos
Combinação	Arranjos
Duas pessoas entram num ônibus que tem 7 lugares vagos. De quantas maneiras diferentes as 2 pessoas podem ocupar esses lugares?	Em um campeonato de boxe há doze inscritos. Quantas lutas podem ser realizadas?
Dispomos de 8 cores e queremos pintar uma bandeira de 5 listas, cada lista com um cor. De quantas formas isso pode ser feito?	Num determinado setor de um hospital trabalha 10 enfermeiras. De quantas maneiras diferentes podemos escolher três enfermeiras para um plantão extra no hospital?
Combinação	Arranjos

Arranjos

Arranjos

Combinação

Combinação

Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas a partir de um grupo de 10 pessoas?

Em um campeonato de futebol, participam 20 times. Quantos resultados são possíveis para os três primeiros lugares?

Numa urna existem 100 cartelas numeradas de 1 a 100. São extraídas, ao acaso, três cartelas para serem distribuídos três prêmios diferentes. Quantas maneiras diferentes existem para distribuir os prêmios entre as 100 pessoas

Uma organização dispõe de 10 economistas. De quantas maneiras diferentes os dirigentes podem escolher três economistas para desenvolver um projeto econômico para o governo?

Dispondo de 5 latas de tinta de cores diferentes e necessitando pintar três paredes de um quarto, cada uma com cor diferente, quantas escolhas são possíveis?

Com 15 jogadores, quantos times de futebol de salão podem ser formados, sabendo-se que qualquer jogador poderá ocupar a posição do goleiro?

Uma papelaria tem 8 cadernos de cores diferentes, e quero comprar 3 de cores diferentes. Quantas possibilidades de escolha eu tenho?

Combinação

Formam-se comissões de três professores escolhidos entre os sete de uma escola.
O número de comissões distintas que podem, assim, ser formadas é:

Uma empresa possui 16 funcionários administrativos, entre os quais serão escolhidos 3, que disputarão para os cargos de diretor, vice-diretor e tesoureiro. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?