Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Zildomar Rodrigues de Medeiros

O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com o uso do software educacional GeoGebra

Belém
2018

Zildomar Rodrigues de Medeiros

O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com o uso do software educacional GeoGebra

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Fundamental
Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho

Belém
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Medeiros, Zildomar Rodrigues de
O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com uso do software educacional Geogebra / Zildomar Rodrigues de Medeiros; orientação de Roberto Paulo Bibas Fialho, 2018.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

1.Trigonometria 2. Educação matemática 3. Matemática – Ensino auxiliado por computador. I. Fialho, Roberto Paulo Bibas (orient.). II. Titulo.

CDD. 23º ed. 516.24

Zildomar Rodrigues de Medeiros

O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com o uso do software educacional GeoGebra

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Fundamental.

Data de aprovação: 06/04/2018

Banca examinadora

______________________________________. Orientador
Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho
Doutor em Educação em Ciências e Matemática
Universidade do Estado do Pará

______________________________________. Examinador (Interno)
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica
Universidade do Estado do Pará

______________________________________. Examinador (Externo)
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Doutor em Educação Matemática
Universidade Federal do Pará

“Educar não é ensinar respostas, educar
é ensinar a pensar”

(Rubem Alves)

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”

(Paulo Freire)

A minha mãe ***Maria do Carmo***, pela força e por sempre me proteger em suas orações.

AGRADECIMENTOS

A Deus, sempre em primeiro lugar, por tudo em minha vida!

Aos familiares e amigos pela força e pelas orações.

Ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho pela paciência, disponibilidade, dedicação e competência na orientação deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática (PMPEM) da Universidade do Estado do Pará – UEPA, pela competência e dedicação nas disciplinas ministradas. Sou grato pelos excelentes professores que tive ao longo dessa jornada, os quais foram essenciais nesta etapa de formação profissional e, até mesmo, pessoal.

Aos membros da banca examinadora, especialmente ao Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves e Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes, pelas valiosas contribuições dadas na melhoria e realização deste trabalho.

A Secretaria Municipal de Educação do munícipio de Marabá (SEMED), por me conceder licença para aperfeiçoamento profissional para a realização deste curso.

A toda equipe gestora e pedagógica da escola onde realizamos a experimentação da sequência didática, à professora de Matemática da referida escola, e a professora responsável pelo laboratório de informática pelo o apoio necessário para que tudo corresse dentro do planejado.

Por fim, gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

MEDEIROS, Zildomar Rodrigues de. **O ensino dos conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo com o uso do software educacional GeoGebra**. 2018. 131 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo investigar uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental, com vistas à construção dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo. Assim, foi desenvolvido um estudo a fim de responder ao seguinte questionamento: a aplicação de uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra favorece ao aluno do 9º ano do ensino fundamental à transposição de conhecimento para a construção dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo? Para responder a essa questão de pesquisa nos apoiamos na ideia de construção dos conceitos da Didática da Matemática, na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986), na noção de Transposição Didática de Yves Chevallard (1991) e no uso das novas tecnologias da informação e comunicação (TIC). Para o desenvolvimento da pesquisa adotamos como metodologia os pressupostos da Engenharia Didática conforme os estudos de Michelle Artigue (1988), assim sendo uma pesquisa do tipo pesquisa-ação referente à aplicação/experimentação de uma sequência didática voltada para alunos do 9º ano do ensino fundamental acerca das razões trigonométricas. Além disso, utilizamos duas abordagens de pesquisa, a saber: qualitativa e quantitativa. Os resultados evidenciaram que a sequência didática aplicada possibilitou a transposição do conteúdo ensinado, bem como favoreceu a construção dos conceitos básicos da trigonometria, especialmente das razões trigonométricas. As atividades da sequência de ensino favoreceram o desenvolvimento dos alunos no que diz respeito a capacidade de realizar investigações e verificar regularidades por meio de observações. Nosso estudo também mostrou que o uso das novas tecnologias favorece o desenvolvimento de situações didáticas, provocando mudanças de comportamento e a evolução no aprendizado dos alunos no que tange ao conteúdo de razões trigonométricas, o qual apresentou indícios da transformação do saber sábio para o saber escolar via recursos tecnológicos, ou seja, a transposição didática propriamente dita – proporcionando uma superação nas limitações que alguns recursos como o livro didático possuem.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Transposição Didática. Software GeoGebra. Razões trigonométricas.

ABSTRACT

MEDEIROS, Zildomar Rodrigues de. **Teaching the basic concepts of trigonometry in the triangle rectangle with the use of educational software GeoGebra**. 2018. 131 f. Dissertation (Professional Masters in Mathematics Teaching) - University of the State of Pará, Belém, 2018.

This work presents the results of a research that had as objective to investigate a didactic sequence with the help of GeoGebra software with the students of the 9th year of elementary school, with a view to the construction of the basic concepts of trigonometry in the triangle rectangle. Thus, a study was developed in order to answer the following question: the application of a didactic sequence with the help of GeoGebra software favors the student of the 9th year of elementary school to the transposition of knowledge for the construction of the basic concepts of trigonometry in the triangle rectangle? In order to answer this research question, we supported the idea of constructing the concepts of Mathematics Didactics, Guy Brousseau's Theory of Didactic Situations (1986), the notion of Didactic Transposition by Yves Chevallard (1991) and the use of the new technologies of information and communication (ICT). For the development of the research, we adopted as a methodology the assumptions of Didactic Engineering according to the studies of Michelle Artigue (1988), thus being a research-action research related to the application / experimentation of a didactic sequence directed to students of the 9th year of elementary education about the trigonometric ratios. In addition, we use two research approaches, namely: qualitative and quantitative. The results showed that the applied didactic sequence made possible the transposition of the contents taught, as well as favored the construction of the basic concepts of trigonometry, especially the trigonometric ratios. The activities of the teaching sequence favored students' development as regards their ability to conduct investigations and to verify regularities through observations. Our study also showed that the use of new technologies favors the development of didactic situations, provoking changes in behavior and the evolution in students' learning regarding the content of trigonometric ratios, which presented evidence of the transformation of wise knowledge into scholarly knowledge via technological resources, that is, didactic transposition proper - providing an overcoming in the limitations that some resources like the textbook have.

Keywords: Mathematics Teaching. Didactic Transposition. GeoGebra Software. Trigonometric reasons.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática certamente é uma das áreas do conhecimento mais importantes para a sociedade dado o papel que desempenha no campo da ciência e na vida das pessoas, sendo assim não é por acaso que a mesma se faz presente em toda matriz curricular da educação básica e em muitos cursos técnicos e superiores.

Enquanto disciplina, a Matemática não tem despertado o gosto e interesse da maioria dos alunos. Os altos índices de reprovação escolar e os baixos rendimentos obtidos nos exames de larga escala nesta disciplina refletem as dificuldades no ensino de matemática, indicando assim que algo precisa ser revisto no processo de ensino e aprendizagem desta área do conhecimento (BRASIL, 1998).

Desse modo, em relação ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, deve-se levar em conta três componentes essenciais de um sistema didático: aluno, professor e saber – os quais, segundo Brousseau (1986), formam uma tríade que estabelece uma interação triangular. No entanto, o sistema didático é regido por algumas concepções que influenciam de certa forma o processo educacional e a ação desses elementos.

Sabemos que historicamente o ensino de Matemática tem se pautado em ideias arraigadas que caracterizam o ensino como transmissão de conhecimentos, e aprendizagem como mera recepção de conteúdos. Isso significa que "a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na 'verbalização' do conhecimento, por parte do professor" (BRASIL, 2006, p.80).

Nessa concepção, o ensino de matemática segue usualmente o modelo: definição, exemplos e exercícios, ou seja, a introdução de um novo conceito se dá pela sua apresentação direta, seguida de alguns exemplos, servindo como padrão para uma série de exercícios, ditos de "fixação", sem contar no uso exagerado de fórmulas que para muitos alunos não tem o menor significado, tendo em vista que geralmente são apresentadas sem nenhuma motivação (BRASIL, 2006).

Temos visto que esse modelo de ensino não tem trazido bons resultados, tampouco despertado nos alunos o gosto pela matemática, tendo em vista que para muitos deles os conteúdos abordados não fazem o menor sentido, justamente por serem apresentados como algo mágico, pronto e acabado, muitas vezes desvinculados da sua realidade.

Conforme Brasil (2006):

> Se por um lado essa concepção teórica apresenta a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações. (BRASIL, 2006, p.80)

Neste sentido, grande parte dessa gama de motivações se deve ao surgimento das novas tecnologias da informação, o que se torna um grande desafio na atualidade para a atividade docente, no qual o professor além de deter o domínio do conteúdo o qual leciona, precisa procurar caminhos, estratégias e metodologias diferenciadas para atrair a atenção do aluno em meio a todas essas vantagens que o mundo digital oferece, sobretudo com o advento da internet.

Sabemos que a realidade do professor da educação básica, principalmente das escolas públicas não é das melhores, tendo em vista que muitas vezes não dispõe de tempo suficiente para planejar e repensar sua prática docente, além disso a falta de infraestrutura e de recursos as vezes limita a eficiência de sua ação neste processo de ensino. Entretanto, a tecnologia está adentrando todos os setores da sociedade e provocando mudanças no comportamento e forma de pensar das pessoas.

Entendemos que a escola como instituição responsável por preparar os alunos para a vida em sociedade deve estar inserida nas demandas que o mundo moderno exige, sendo imprescindível incorporar o uso das novas tecnologias as suas práticas pedagógicas, a fim de proporcionar um ensino mais dinâmico e atraente aos alunos, sobretudo no que diz respeito à Matemática.

Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) sugerem o uso das novas tecnologias em sala de aula para que alunos e professores possam usufruir das potencialidades que estas oferecem ao processo de ensino e aprendizagem, visto que as novas tecnologias podem ser grandes aliadas no desenvolvimento cognitivo, possibilitando ao aluno construir de maneira ativa seu conhecimento conforme seu próprio ritmo de aprendizagem.

Conforme Chevallard (1991), essa construção do conhecimento tem um caráter mais significativo, marcado como uma transformação que acontece no processo de ensino via tecnologia e recursos didáticos, entre outros meios. Um desses meios que proporciona esta construção do conhecimento é o livro didático, acompanhado ou não de mídia digital, constituindo-se como uma das maneiras de favorecer a *transposição didática* – a qual, Chevallard (1991), designa como a transformação que sofre um saber dito sábio (saber científico) para ser ensinado em um dado nível escolar.

Embora muitas orientações curriculares tenham apontado caminhos para abordagens diversificadas para o ensino de matemática, ao que parece, a maioria dos livros didáticos das escolas públicas, movidos por essa concepção e por uma rede de influência que interfere no sistema educativo a qual Chevallard (1991) denomina *noosfera*, não tem contribuído significativamente para o desenvolvimento de novas abordagens no processo de ensino e aprendizagem.

Além disso, ao longo de nossa trajetória como docente de matemática, temos notado dificuldades no ensino e aprendizagem do conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo. O uso de algumas metodologias, por parte dos professores, não tem despertado o interesse nem gerado resultados satisfatórios de aprendizagem, visto que muitos alunos têm apresentado diversos problemas na compreensão dos conceitos básicos da trigonometria, sobretudo nas razões trigonométricas no triângulo retângulo, trabalhadas no 9º ano do ensino fundamental.

Diante dessas dificuldades que professores e alunos têm enfrentando perante o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, foi que nos propomos a elaborar uma sequência didática fazendo uso do software GeoGebra[1], de modo a possibilitar ao aluno à construção de conceitos básicos da trigonometria, bem como tornar o processo de ensino e aprendizagem mais significativo e interessante ao aluno a fim de favorecer a aplicação desses conceitos na resolução de problemas.

Para a elaboração da sequência didática, nos embasamos na ideia de construção dos conceitos que se constitui como um dos pilares da Didática da Matemática, bem como na Teoria das Situações Didáticas, na concepção de Transposição Didática e no uso das novas tecnologias da informação e comunicação (TICs) na educação.

---

[1] O Geogebra é um software de matemática dinâmica gratuito e de código aberto que combina geometria, álgebra, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação.

Assim, torna-se relevante desenvolver um estudo a fim de responder ao seguinte questionamento: **A aplicação de uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra favorece ao aluno do 9º ano do ensino fundamental à transposição de conhecimento para a construção dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo?**

Desse modo, traçamos alguns objetivos para o desenvolvimento de nosso estudo com vistas a responder nossa questão de pesquisa:

Objetivo geral:

- Investigar uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental, com vistas à construção dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo.

Objetivos específicos:

- Desenvolver situações didáticas referentes ao conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, de modo a favorecer a percepção do estado de conhecimento do aluno, do saber científico ao saber escolar, caracterizando assim a transposição de conhecimento;
- Realizar o uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC) a fim de contribuir à superação das limitações dos recursos atuais, como o livro didático, em relação ao processo de construção e institucionalização do conhecimento;
- Identificar as teorias estudadas enfatizando possíveis semelhanças e distinções entre elas, de modo que seja possível enxergá-las e aplicá-las no contexto e nas transformações possíveis da realidade.

A fim de atingirmos os objetivos elencados acima, utilizaremos os pressupostos da Engenharia Didática conforme os estudos de Michelle Artigue (1988).

Segundo Almouloud (2007) e Machado (2016), baseados nos estudos de Artigue, a Engenharia Didática pode ser compreendida tanto como uma metodologia de pesquisa quanto um esquema experimental para promover o ensino de algum conteúdo específico da Matemática.

Para Artigue (1988), a engenharia didática se caracteriza como um esquema experimental com base em “realizações didáticas” em sala de aula, ou seja, na concepção, realização e análise das sessões de uma sequência didática. Essa metodologia é composta por quatro fases: *análise preliminar; concepção e análise a priori; experimentação*, e *análise a posteriori* e *validação*.

Nesta metodologia o processo de validação da pesquisa ocorre por meio de uma comparação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Cabe registrar que não usaremos neste trabalho todos os aportes da engenharia didática, apenas seus pressupostos.

Além disso, utilizaremos duas abordagens de pesquisa, a saber: qualitativa e quantitativa. Segundo Gil (1999) a *pesquisa quantitativa* procura quantificar em números, opiniões e informações para classificar e analisar dados e fenômenos por meio do uso de técnicas estatísticas.

Por outro lado, Gil (1999), esclarece que a *pesquisa qualitativa* considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. Assim, a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Em geral, o pesquisador se envolve e age para a mudança de fenômenos.

Teixeira (2010) ressalta, ainda, que há um equívoco em achar que as diferenças entre essas duas abordagens se resume apenas na presença ou ausência de quantificação de dados. Assim, enfatiza que

> Na pesquisa qualitativa o pesquisador procura reduzir a distância entre a teoria e os dados, entre o contexto e a ação, usando a lógica da análise fenomenológica, isto é, da compreensão dos fenômenos pela sua descrição e interpretação. As experiências pessoais do pesquisador são elementos importantes para análise e compreensão dos fenômenos estudados. (TEIXEIRA, 2010, p. 137).

Essa pesquisa também se valerá do método bibliográfico e documental, tendo em vista que serão consultados livros, documentos e fontes oficiais do governo, bem como trabalhos acadêmicos como artigos, dissertações e teses que tratam do nosso objeto de estudo.

Ademais, faremos uma pesquisa-ação referente à aplicação/experimentação de uma sequência didática, voltada para alunos do 9º ano do ensino fundamental acerca das razões trigonométricas. Conforme Severino (2007, p.120)

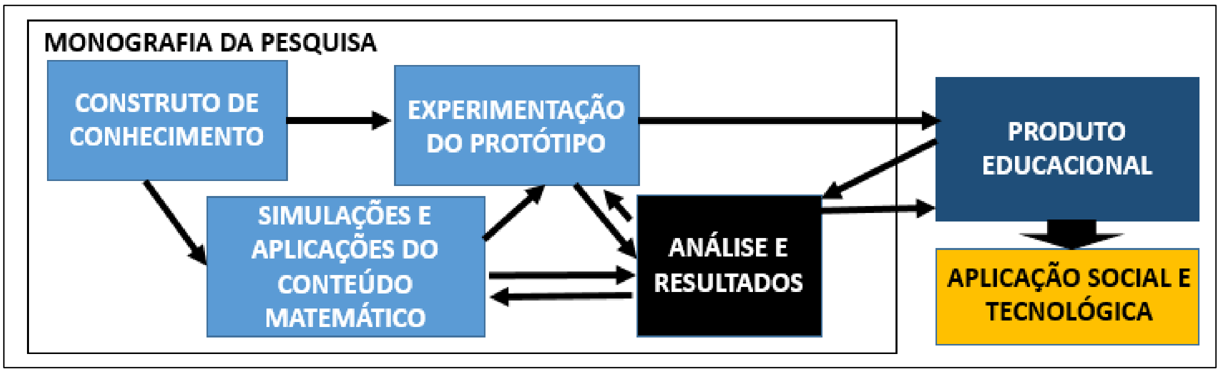
> A pesquisa-ação é aquela que, além de compreender, visa intervir na situação, com vistas a modificá-la. [..] Assim, ao mesmo tempo que realiza um diagnóstico e análise de uma determinada situação, a pesquisa-ação

> propõe ao conjunto de sujeitos envolvidos mudanças que levem a um aprimoramento de práticas analisadas.

Através dos objetivos delineados neste trabalho, resultará da pesquisa um produto educacional – livreto com a sequência didática usada na pesquisa – em formato impresso e/ou digital, destinado ao professor a fim de contribuir com a prática docente em sala de aula no que diz respeito ao ensino das razões trigonométricas no 9º ano do ensino fundamental.

A figura a seguir ilustra os passos gerais da nossa pesquisa.

Figura 1 – Fluxograma das fases da pesquisa



Fonte: Autor e orientador (2017)

Note que tendo como ponto de partida o *constructo de conhecimento*, isto é, a própria pesquisa bibliográfica (estudo histórico/epistemológico e a revisão de literatura), concebe-se o *protótipo* (pré-produto) – o qual passará previamente por *simulações e aplicações do conteúdo matemático* (testagem e aperfeiçoamento) a fim de ser aprimorado e, consequentemente, utilizado na fase de *experimentação* da pesquisa, ou seja, na aplicação propriamente dita em sala de aula.

Decorre dessas fases *a análise e resultados*, que em tese é a última etapa da dissertação e que também está relacionada a validação da sequência didática. Todavia, dessa etapa resulta o *produto educacional*, embora inicialmente atrelado à pesquisa acadêmica o mesmo pode posteriormente ser desenvolvido de modo independente proporcionando uma aplicação social e tecnológica, e até mesmo mercadológica – razão pela qual está do lado externo no esquema apresentado acima, porém com uma seta dialética, no sentido de ir e retornar.

Vale ressaltar que, o produto educacional em questão nada mais é que a sequência didática transformada em material didático impresso e/ou digital com versões direcionadas tanto ao professor quanto aos alunos.

Dessa forma, além desse capítulo introdutório, nossa dissertação está estruturada da seguinte maneira:

No capítulo 2, apresentaremos nossa fundamentação teórica, tecendo sobre a Teoria das Situações Didáticas, a noção de Transposição Didática e as reflexões sobre as novas tecnologias da informação e comunicação (TIC) no contexto educacional, bem como uma apresentação do software GeoGebra.

E no capítulo 3, apresentaremos uma revisão bibliográfica de estudos correlatos ao nosso objeto de pesquisa, a fim de compreendermos alguns obstáculos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo de modo a favorecer a concepção de uma sequência didática.

Já no capítulo 4, abordaremos a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados no desenvolvimento de nossa pesquisa. Assim, apresentaremos a Engenharia Didática, enfatizando de maneira sistematizada como se configurou as fases dessa metodologia em nosso trabalho.

No capítulo 5, faremos um breve estudo histórico da Trigonometria, retratando sua origem e desenvolvimento ao longo dos anos pelas mais diversas civilizações, sua incorporação nos variados campos da ciência moderna, até tornar-se objeto de ensino. Em seguida, exibiremos um panorama de como esse conteúdo se apresenta atualmente nas propostas curriculares brasileiras de ensino, nos livros didáticos e nas avaliações educacionais de larga escala.

No capítulo 6 apresentaremos a fundamentação matemática com o intuito de oferecer ao leitor um aprofundamento matemático necessário para melhor compreensão da trigonometria no triângulo retângulo. Cabe registrar que essa fundamental foi essencial para a elaboração das atividades da sequência didática.

Já o capítulo 7 tratará da sequência didática. Desse modo, apresentaremos cada uma das atividades da sequência didática com suas respectivas análises a *priori*. Em seguida, faremos uma breve descrição sobre a escola onde aconteceu a experimentação e os sujeitos da pesquisa. Ainda neste capítulo, abordaremos o processo de familiarização dos alunos com o software GeoGebra, a aplicação efetivamente das atividades com suas respectivas análises *a posteriori*, bem como as análises dos resultados e a validação.

Por fim, nas considerações finais apresentamos os principais resultados da nossa investigação, bem como algumas sugestões para novas pesquisas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para fundamentar nossa pesquisa e atingir nossos objetivos se apoiamos nos princípios da Didática da Matemática, especialmente na Teoria das Situações Didáticas e na noção de Transposição Didática. Além disso, lançamos mão das reflexões acerca do uso das novas tecnologias (TIC) na educação.

A Didática da Matemática surgiu na França em meados dos anos de 1970, tendo como principal objetivo a melhoria do ensino e aprendizagem em matemática nos diversos níveis de ensino. Segundo Almouloud (2007), a Didática da Matemática pode ser entendida como uma ciência que investiga os fenômenos que interferem no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, bem como as condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos.

As pesquisas nessa área se desenvolveram em torno do fracasso do famoso Movimento Matemática Moderna, o qual levou alguns pesquisadores, especialmente os franceses, a se interessarem pelo estudo e pela investigação de problemas relativos ao ensino e à aprendizagem matemática. Assim, as primeiras pesquisas nessa área apoiaram-se, essencialmente, nas teorias psicológicas de Piaget, considerando os aspectos fundamentais do construtivismo piagetiano, tais como a noção de desenvolvimento cognitivo e o papel central da ação no desenvolvimento (ALMOULOUD, 2007).

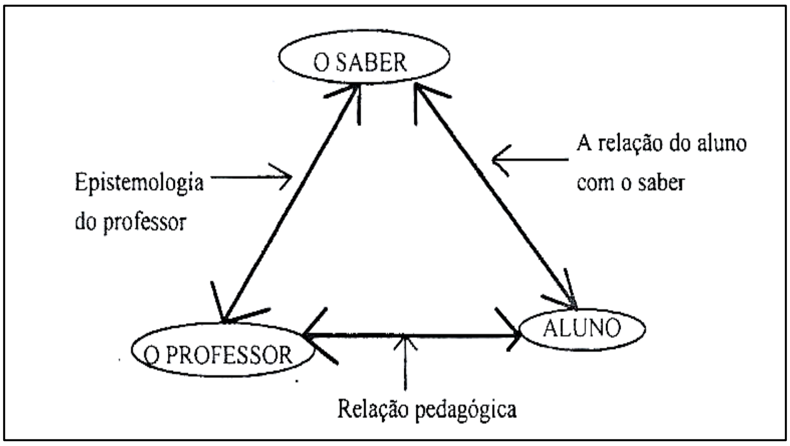
Dentre os estudos desenvolvidos pela Didática da Matemática destacam-se a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau e as reflexões sobre Transposição Didática proposta por Yves Chevallard, as quais explicitaremos a seguir.

2.1 Teoria das Situações Didáticas

Criada pelo francês Guy Brousseau (1986), a Teoria das Situações Didáticas tem por objetivo estudar os fenômenos que envolvem o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e propor um modelo teórico, destinado à sala de aula, para a construção, a análise e a experimentação de situações didáticas, levando em consideração as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber (ALMOULOUD, 2007).

De acordo com essa teoria, o ambiente da sala de aula é caracterizado por três elementos essenciais: professor, aluno e saber – os quais interagem entre si e constituem uma relação triangular, que é denominada por Brousseau (1986) como *triângulo das situações didáticas*, conforme figura abaixo.

Figura 2: Triângulo didático



Fonte: Almouloud (2007)

Freitas (2016), destaca que a teoria das situações didáticas valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber matemático, bem como o trabalho do professor que consiste em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie do conhecimento matemático.

Contudo, Almouloud (2007) enfatiza que o objeto central de estudo dessa teoria é a *situação didática*, na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber. Assim, Brousseau (1986, *apud* FREITAS, 2016, p. 80) define *situação didática* como:

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo *milieu*, compreendendo

> eventualmente instrumentos ou objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição.

Neste sentido, segundo Brousseau (1986), o aluno aprende adaptando-se a um *milieu* [2] (meio) que se constitui um fator de dificuldades, contradições e desiquilíbrio – semelhante ao que propõe a teoria construtivista de aprendizagem, segundo a qual a aprendizagem decorre por meio de um processo de adaptação do sujeito perante situações problemáticas (ALMOULOUD, 2007).

Freitas (2016, p.79) salienta também que "é no *meio* que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos, contradições e possibilidades de aprendizagem de novos conhecimentos". Nesse contexto, as situações didáticas são regidas por um *contrato didático*, isto é, por um conjunto de obrigações recíprocas explícitas ou implícitas entre alunos e professores envolvendo um determinado saber.

Desse modo, uma situação didática fica caracterizada sempre que houver a intencionalidade, por parte do professor, de proporcionar ao aluno a aprendizagem de determinado conteúdo. E, como parte essencial de uma situação didática, tem-se a *situação adidática*, que se configura, de acordo com Almouloud (2007, p.33), como "uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar".

No entanto, Freitas (2016) ressalta que uma *situação adidática* não pode ser confundida com uma *situação não-didática*, aquelas que não foram planejadas visando uma aprendizagem. Para Brousseau (1986, *apud* ALMOULOUD, 2007, p.33) uma *situação adidática* possui as seguintes características:

> - O problema matemático, é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
> - O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelos às razões didáticas, isto é, o aluno aprende por uma necessidade própria e não por uma necessidade aparente do professor ou da escola;
> - O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir das atividades propostas

[2] O *milieu* ou "meio" (tradução do francês para o português) é onde acontece as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age (FREITAS, 2016, p.79).

Dessa maneira, uma *situação adidática* é caracterizada essencialmente por momentos, dentro do processo de ensino e aprendizagem, nos quais o aluno trabalha de maneira independente, sem a interferência direta do professor, a fim de que o aluno vivencie a situação como um pesquisador que busca encontrar uma solução sem a ajuda do mestre (FREITAS, 2016).

Isso não significa que o professor não tenha o controle no andamento da situação; pelo contrário, mobilizar situações adidáticas é bem mais desafiador do que se imagina, pois exige do professor um trabalho cauteloso para preparar, organizar e conduzir situações que possam criar condições do aluno se desenvolver de maneira autônoma e construir novos conceitos a partir dos que ele já detém.

Diante disso, o professor assume um papel fundamental no desenvolvimento das situações didáticas, tendo em vista que o mesmo

> Deve evitar a apresentação precoce de resultados gerais envolvendo conteúdos formalizados e, sempre que possível promover a simulação de um ambiente de pesquisa que permita aos alunos vivenciarem momentos de investigação em sala de aula (FREITAS, 2016, p.82).

A forma de propor os problemas ao aluno é extremamente importante para desencadear a *devolução*, isto é, o ato pelo qual o professor transfere a responsabilidade ao aluno, fazendo com que ele aceite o desafio de resolver o problema, por uma necessidade própria e não porque o professor quer. Assim, se o aluno toma o problema para si e aceita participar do processo intelectual, então inicia-se o processo de aprendizagem (FREITAS, 2016).

Percebe-se que nesse processo de ensino e aprendizagem o professor é um mediador e o aluno é o protagonista e responsável pela construção do seu conhecimento. Embora o aluno saiba que tudo que lhe é proposto em sala de aula tem algum propósito de aprendizagem, o mesmo não consegue distinguir de imediato o que é de origem didática ou adidática. Assim, para Brousseau (1986):

> A concepção moderna de ensino vai, portanto, requerer que o professor provoque no aluno as adaptações desejadas, por meio de uma escolha cuidadosa dos problemas, de modo que o aluno possa aceitá-los, agir, falar, refletir, evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e aquele em que produz sua resposta, o professor se recusa a intervir, como alguém que propõe os conhecimentos que deseja ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para que ele possa adquirir um novo conhecimento, mas também deve saber que esse conhecimento é justificado pela lógica interna da situação e que ele pode construí-lo sem apelar a razões didáticas (BROUSSEAU, 1986, *apud* FREITAS, 2016, p.84).

Na Teoria das Situações Didáticas, podemos constatar a presença de quatro fases diferentes e interligadas: *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização*. Conforme Almouloud (2007):

Na fase de *ação*, é proposto ao aluno um problema para que ele, valendo-se de seus conhecimentos prévios, possa resolvê-lo; porém a melhor solução é o conhecimento que se deseja ensinar. Nesta fase, recomenda-se que o professor faça o mínimo de intervenção a fim de levar o aluno a agir e refletir sobre sua ação. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro – provocando uma aprendizagem por adaptação.

Na *formulação*, o aluno troca informações com uma ou mais pessoas, por meio de mensagens escritas ou orais na língua materna ou matemática. Ou seja, é o momento em que o aluno explicita suas conjecturas, as ferramentas utilizadas e a solução encontrada. Freitas (2016) ressalta que nesta fase o aluno apresenta na solução do problema alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos.

A fase da *validação* está relacionada ao plano da racionalidade, servindo para confirmar ou refutar a veracidade das conjecturas e do modelo criado pelo aluno. Assim, após o debate e discussões, o aluno submete suas proposições a algum tipo de prova ou julgamento por outra pessoa.

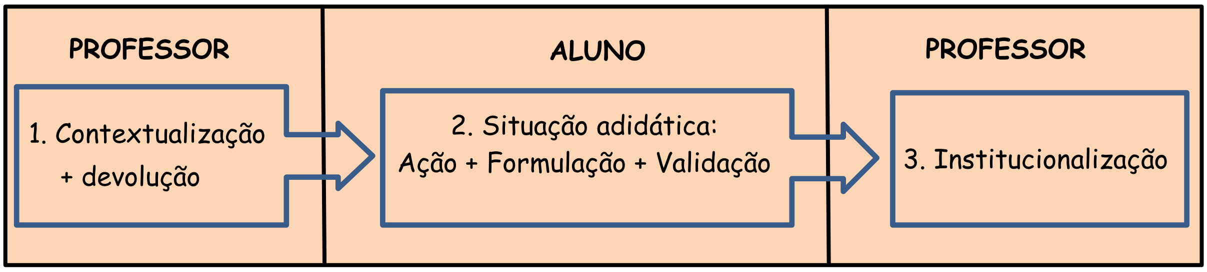
E por fim, temos a *institucionalização* na qual o professor, baseado nos debates e nas conclusões feitas pelos alunos nas fases anteriores, formaliza o saber segundo uma fundamentação matemática. De acordo com Freitas (2016), essa fase visa estabelecer o carácter de objetividade e de universalidade do conhecimento, o qual passa a ter um estatuto mais universal do que aquele limitado e imposto pela particularidade do problema estudado. Nesta fase, a situação deixa de ser adidática e torna-se essencialmente didática.

Neste sentido, a *institucionalização* é caracterizada

> Pela sistematização por meio da apresentação de definições, propriedades e teoremas, em linguagem matemática mais formalizada, onde deve ocorrer uma socialização, professores e alunos dialogam sobre conhecimentos matemáticos historicamente construídos relativos ao problema abordado (FREITAS, 2016, p.103).

O esquema a seguir ilustra de maneira sintetizada os momentos didáticos da Teoria das Situações Didáticas e participação de cada sujeito no processo.

Figura 3 – Os agentes nas fases da Teoria das Situações Didáticas



Fonte: Adaptado de Freitas (2016)

De acordo com o esquema acima proposto por Freitas (2016), observa-se que nos momentos de *contextualização* e *devolução*, o professor torna-se protagonista, com a missão de cativar os alunos para que entrem no jogo. Em seguida, tem-se as situações adidáticas de *ação*, *formulação* e *validação*, onde os atores principais são os alunos, os quais tem a responsabilidade de gerenciar sua relação com o saber. E, finalmente, ocorre a *institucionalização* onde professor se encarrega de determinar o modo e o conteúdo do saber o qual ele quer dar um estatuto oficial, levando em conta a noção de transposição didática a qual veremos a seguir.

2.2 Transposição Didática

Ao tratar do processo de ensino e aprendizagem da matemática, além de considerar as relações existentes que envolvem professor, aluno e saber, faz-se necessário compreender como se dá o processo de transformação do saber científico (saber sábio) para o saber escolar. Assim, somos conduzidos a fazer algumas reflexões acerca da noção de *Transposição Didática*.

O termo “transposição didática” foi introduzido pelo sociólogo Michel Verret, em 1975, com vistas ao interesse da ação humana no que se refere à transmissão de saberes, de modo a torná-los prontos a serem “ensináveis” e aprendidos, levando em conta a idade e os conhecimentos prévios dos alunos (ALMOULOUD, 2011).

No entanto, foi através dos estudos do matemático francês Yves Chevallard, em 1980, que a Transposição Didática ganhou destaque adquirindo o *status* de teoria, no âmbito da Didática da Matemática. Segundo, Chevallard (1991, p.31):

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O “trabalho” que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de *transposição didática*.

Assim, a transposição didática designa o conjunto das transformações porque passam o saber científico (saber sábio) para ser ensinado em um dado nível escolar. Em outras palavras, refere-se às transformações pelas quais passam as teorias científicas para se tornarem saberes escolares – primeiramente nas propostas curriculares, depois nos livros didáticos e em sala de aula (ALMOULOUD, 2011).

Chevarllard, em sua obra *La transposicion didactique* (1991), alerta quanto aos cuidados que as transposições do saber sofrem quando passam do campo científico para o contexto escolar, tendo em vista que o saber produzido de forma científica, através de pesquisas para responder determinados questionamentos ligados ao contexto histórico, sociocultural, não chega a escola tal qual foi produzido, devido as modificações sofridas quando trabalhados no âmbito escolar (OLIVEIRA, 2013).

Pais (2008) salienta também que:

> A transposição didática permite interpretar as diferenças que ocorrem entre a origem de um conceito da matemática, como ele encontra-se proposto nos livros didáticos, a intenção de ensino do professor e, finalmente, os resultados obtidos em sala de aula (PAIS, 2008, p.12).

De acordo com Almouloud (2011), para ensinar uma noção científica em um dado nível de escolaridade é necessário torná-la acessível aos alunos. Portanto, tal noção precisa sofrer algumas adaptações (transformações) a partir de um saber tomado como referência que, em geral, é o saber dos especialistas de uma dada área do conhecimento (saber sábio).

Assim, para se adequar ao ensino, inclusive em termos didáticos, esse saber sábio precisa, necessariamente, passar por transformações. Segundo Almouloud (2011, p. 194), “na escola, essas transformações começam com a transposição externa (transformação de saberes e práticas em propostas curriculares) e prosseguem pela efetivação das propostas (transposição interna)”.

Nesse contexto, a *transposição didática externa* refere-se as transformações, as inclusões ou exclusões sofridas pelos objetos do conhecimento, desde o momento de sua criação até o momento em que chegam às escolas. Tais transformações são concebidas numa esfera exterior à escola, porém sempre como resposta às suas demandas, se materializando em propostas curriculares, livros didáticos e outros materiais de apoio (BRASIL, 2006).

Sabe-se que em função das necessidades sociais e econômicas a sociedade requer o ensino e a apropriação, ao menos em parte, do saber sábio. Assim, evidentemente, haverá de alguma maneira a interferência de órgãos e de agentes – cientistas, professores, políticos, os meios de comunicação, autores de livros, editoras, pais de alunos, entre outros – formando um conjunto de fontes de influências o qual Chevallard denomina de *noosfera*.

> A noosfera é o centro operacional do processo de transposição, que traduzirá nos fatos a resposta ao desequilíbrio criado e comprovado [entre os ideais e possibilidades dos saberes científicos] (expressos pelos matemáticos, pelos pais, pelos professores mesmos). Ali na noosfera se produz todo conflito entre sistema e entorno e ali encontra seu lugar privilegiado de expressão. Nesse sentido (do conflito de interesses), a noosfera desempenha um papel de obstáculo (CHEVALLARD, 1991, p. 34).

Pais (2008) enfatiza que a noção de transposição estuda a seleção que ocorre através de uma extensa rede de influências, envolvendo diversos segmentos do sistema educacional. Tais influências contribuem para a redefinição de aspectos conceituais e na reformulação de sua forma de apresentação. Isso significa que o resultado seletivo da noosfera determina não só a escolha de conteúdos como também a definição de valores, objetivos e métodos que conduzem a prática de ensino, ou seja, a noosfera dita o funcionamento do sistema didático como um todo.

Por outro lado, a *transposição didática interna* ocorre no contexto escolar e, de modo particular, no interior das salas de aula. É o momento em que cada professor vai transformar os conteúdos que lhes foram designados em conhecimentos a serem efetivamente ensinados. Nesse momento, as escolhas feitas pelo professor é que vão determinar, de certa forma, a aprendizagem dos alunos (BRASIL, 2006).

Segundo Muniz (2008), o professor, de posse das propostas curriculares e com o apoio dos livros didáticos, deverá realizar uma seleção prioritária dos conteúdos a serem trabalhados, uma reformulação na maneira de apresentá-los e a elaboração de metodologias que sejam adequadas à realidade de sua escola e, de modo particular, aos seus alunos.

Ainda conforme esse autor, a escola tendo como finalidade a aprendizagem, não deve conceber a ideia de transmitir o saber sábio tal qual tratado em âmbito científico – o que requer dos responsáveis e envolvidos no processo escolar uma transformação desse saber matemático apurado, adequando-o às necessidades e ao nível cognitivo dos alunos.

Neste sentido, Pais (2016, p. 30 – 31) enfatiza que:

> [..] o trabalho do professor envolve um importante desafio, que consiste em realizar uma atividade que é, num certo sentido, inversa daquela do pesquisador. Pois, enquanto o matemático elimina as condições contextuais de sua pesquisa e busca níveis mais amplos de abstração e generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais significativa para o aluno.

Assim, a transposição realizada pelo professor deve produzir um conhecimento que, possibilite ao aluno o acesso aos aspectos e conceitos da matemática mais presentes à sua realidade cultural e social, expressos em uma linguagem acessível, sem deixar, contudo, de ser fiel à essência das ideias científicas que os sustentam (MUNIZ, 2008).

Muniz (2008), também, chama atenção para os cuidados que o professor deve tomar ao realizar a transposição didática, tendo clareza do que realmente é um fato matemático que deve ser transformado em objeto de ensino, bem como reconhecer quando um objeto de ensino não é objeto matemático, mas sim, conforme Chevallard denomina, verdadeiras *criações didáticas* incorporadas à lista oficial dos conteúdos. Nesse sentido, Pais (2008, p.20) salienta que

> A princípio tais criações têm uma finalidade eminentemente didática, entretanto, o problema surge quando sua utilização acontece de forma desvinculada de sua finalidade principal. Este é o caso dos produtos notáveis que, quando ensinados sem um contexto significativo, passam a figurar apenas como o objeto de ensino em si mesmo. Para estar atento a essas distorções, se faz necessário cultivar um permanente espírito de vigilância que deve prevalecer ao longo de toda a análise da transposição didática.

Além disso, conforme Almouloud (2007), o tempo é outro fator relevante no contexto didático, visto que existe o *tempo de ensino* (didático) e o *tempo de aprendizagem* os quais o professor necessita ter compreensão e habilidades para saber lidar com cada um deles.

Segundo Pais (2008), o *tempo didático* é aquele estabelecido nos programas escolares e nos livros didáticos em cumprimento a uma exigência legal; enquanto, o *tempo de aprendizagem* é aquele necessário para que o aluno possa superar suas dificuldades e atingir uma posição de equilíbrio no processo educativo.

Assim, o professor desempenha um papel importante e crucial no processo de transposição didática, de acordo com Muniz (2008), não basta apenas saber o conteúdo matemático, é preciso ter domínio de outros saberes, como psicologia, pedagogia e didática específica, para proporcionar condições adequadas para que a aprendizagem matemática aconteça.

Segundo Pais (2016, p.23)

> Para viabilizar a passagem do saber científico para o saber escolar, torna-se necessário um trabalho didático efetivo, para proceder a uma reformulação visando a prática educativa. É necessário, portanto recorrer à elaboração de uma forma didática, surgindo assim a importância de uma metodologia fundamentada numa proposta pedagógica.

Nesse sentido, as novas tecnologias aparecem como caminhos para uma transposição didática mais efetiva nas práticas pedagógicas. Na seção a seguir, veremos como as novas tecnologias têm-se apresentado como um interessante e valioso recurso didático.

2.3 As novas tecnologias no contexto educacional

Vivemos numa época de grandes transformações e avanços tecnológicos, na qual as novas tecnologias da informação e comunicação têm provocado mudanças nos mais diversos setores da sociedade em função de sua eficiência e otimização de tarefas, além do entretenimento que muitas mídias têm proporcionado às pessoas por meio da internet. Assim, é notório que os computadores, as calculadoras e vários outros elementos tecnológicos estejam cada vez mais presentes nas mais variadas atividades humanas.

Sendo assim, entendemos que a escola como instituição responsável por preparar os alunos para a vida em sociedade não pode ignorar as demandas exigidas pelo mundo moderno. A inserção das novas tecnologias nas práticas educacionais torna-se cada vez mais uma necessidade, e é algo que vem sendo defendido por diversos pesquisadores da área educacional.

Borba e Penteado (2001) destacam que o acesso a informática deve ser visto como um direito do aluno, sendo uma "alfabetização tecnológica" parte necessária para que ele possa aprender a ler, escrever e refletir através dessa nova mídia. Desse modo, a informática no ambiente educacional passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania.

Valente (1999, p.1), enfatiza que:

> A utilização de computadores na educação é muito mais diversificada, interessante e desafiadora, do que simplesmente a de transmitir informação

> ao aprendiz. Assim, o computador pode ser utilizado para enriquecer ambientes de aprendizagem e auxiliar o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento.

Contudo, o uso das novas tecnologias como recurso didático não é uma unanimidade. Há quem diga que o uso de recursos tecnológicos nas práticas pedagógicas de matemática pode deixar os alunos dependentes da tecnologia e que poderão perder a capacidade de pensar, de realizar cálculos mentais e de executar algoritmos de maneira escrita.

O fato é que cada vez mais cedo as crianças estão tendo contato com os computadores e outros tipos de elementos tecnológicos. A tecnologia cada dia mais vai adentrando os diversos segmentos sociais, sendo assim, a escola deve procurar acompanhar essa evolução no sentido de valer-se dos recursos tecnológicos para contribuir na construção do conhecimento.

De acordo com Borba e Penteado (2001) é preciso superar a resistência e os preconceitos contra a tecnologia, porém sem entregar-se cegamente ao apelo por modismos. Isto é, a escola como um todo deve estar ciente da importância e necessidade da introdução dos recursos tecnológicos nas práticas educacionais, mas deve manter-se em vigilância em relação a crença de que a tecnologia vai dar conta de todos os problemas do ensino.

Portanto, é preciso estar atento ao modo de se valer adequadamente das novas tecnologias com propósitos pedagógicos, pois senão o professor estará, conforme Valente (1999), apenas mudando de mídia, saindo do quadro e giz para o computador.

A inserção das novas tecnologias nas práticas educativas implica em mudanças no ambiente escolar que vão além da mera instalação de equipamentos. Para Valente (1999) a mudança pedagógica almejada por todos é a passagem de uma educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu próprio conhecimento.

Tais mudanças refletem na escola como um todo: na organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos e na relação com o conhecimento. Isso significa que a escola tem o desafio de incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer. Sendo assim, Miskulin (2008, p.219) ressalta que “a inserção da tecnologia na educação deve ser compreendida e orientada no sentido de proporcionar nos indivíduos o desenvolvimento de uma inteligência crítica, mais livre e criadora".

Para tanto, essa nova cultura da aprendizagem exige um novo perfil de aluno e de professor, exige novas funções discentes e docentes, as quais só se tornarão possíveis se houver uma mudança nas concepções profundamente arraigadas sobre aprendizagem e ensino (POZO e PÉREZ ECHEVERRÍA, 2001).

Valente (1999) salienta que as atividades desenvolvidas com o uso das novas tecnologias fazem com que o papel do professor se torne o de facilitador do processo de aprendizagem, ao mesmo tempo que o aluno deixa de ser passivo para ser um aprendiz ativo, construtor do seu conhecimento.

Nesse sentido, Sampaio e Leite (2013, p.15) salientam que:

> O papel da educação deve voltar-se também para a democratização do acesso ao conhecimento, à produção e interpretação das tecnologias, suas linguagens e consequências. Para isto torna-se necessário preparar o professor para utilizar pedagogicamente as tecnologias na formação de cidadãos que deverão produzir e interpretar as novas linguagens do mundo atual e futuro.

Nesse contexto, em que se percebe a necessidade da inserção das novas tecnologias em sala de aula, as *Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC)* surgem como forte tendência dentro da educação matemática. Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN apontam para a necessidade do desenvolvimento de trabalhos que contemplam o uso das novas tecnologias em ambientes de aprendizagem.

Os PCN (BRASIL, 1998) destacam, ainda, que os computadores podem ser usados nas aulas de Matemática com várias finalidades, tais como: fonte de informação; auxiliar no processo de construção do conhecimento; como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções. Além disso, salientam que o uso de computadores nas aulas de matemática pode favorecer o desenvolvimento cognitivo dos alunos, uma vez que possibilita um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus próprios erros (BRASIL, 1998).

Em relação ao uso da calculadora, os PCN (1998) enfatizam, também, que a calculadora favorece a busca e a percepção de regularidades matemáticas, estimula o desenvolvimento de estratégias e hipóteses na resolução de situações-problema, além de poupar tempo na execução de cálculos.

Os defensores da calculadora nas práticas educativas ressaltam ainda que elas podem ser um valioso recurso para a verificação de resultados, correção de erros e para autoavaliação, constituindo-se como um eficiente instrumento para promover a aprendizagem de processos cognitivos.

Em consonância com essas ideias, Borba e Penteado (2001, p.62) destacam que "ao utilizar uma calculadora ou um computador, o professor de matemática pode se deparar com a necessidade de expandir muitas de suas ideias matemáticas e também buscar novas opções de trabalho com os alunos".

Nesse sentido, segundo Miskulin (1999, p. 189)

> A Matemática deve ser mediada, não simplesmente por modelos obsoletos, que não contribuem de modo significativo para o desenvolvimento e transformação do indivíduo, mas por metodologias alternativas em que o ser em formação vivencie novos processos educacionais, que façam sentido e tenham relação com a sua integração na sociedade. Sem uma educação matemática, com qualidade, a criança ou o jovem talvez não tenham oportunidade de crescerem no saber matemático, saber este importante para sua qualificação profissional em qualquer área. Assim sendo, o saber matemático deve ser vivenciado no contexto tecnológico.

Em consonância, Lopes (2010) ressalta que:

> [...] quando a informática faz parte do ambiente escolar, num processo dinâmico de interação entre alunos, professores e TIC, ela passa a despertar no professor a sensibilidade para as diferentes possibilidades de representação da Matemática, o que é importante no momento de realizar construções, análises, observações de regularidades e ao estabelecer relações (LOPES, 2010, p.32-33).

Assim, o uso da tecnologia como ferramenta pedagógica dá um novo tom ao processo de ensino de Matemática, tornando-se mais atrativo ao aluno. Desse modo, pensando a tecnologia para o ensino de matemática, existem programas de computadores (*softwares*) que, além de proporcionar diferentes formas de representação de objetos matemáticos, favorecerem outros aspectos como interação, dinamismo, simulação e investigação, nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos. Um exemplo de software matemático dessa natureza é o GeoGebra, o qual será utilizado nas atividades da sequência didática proposta nesta pesquisa, e que conheceremos um pouco mais na seção a seguir.

2.3.1 O software GeoGebra

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única interface gráfica. Foi desenvolvido em 2001 por *Markus Hohenwarter* para ser utilizado no ensino e aprendizagem de matemática. O GeoGebra trata-se de um programa livre e gratuito, disponível para download no endereço eletrônico: *https://www.geogebra.org*. Pela potencialidade educacional e pelo fácil acesso, o software tem sido traduzido para vários idiomas e utilizado em muitos países.

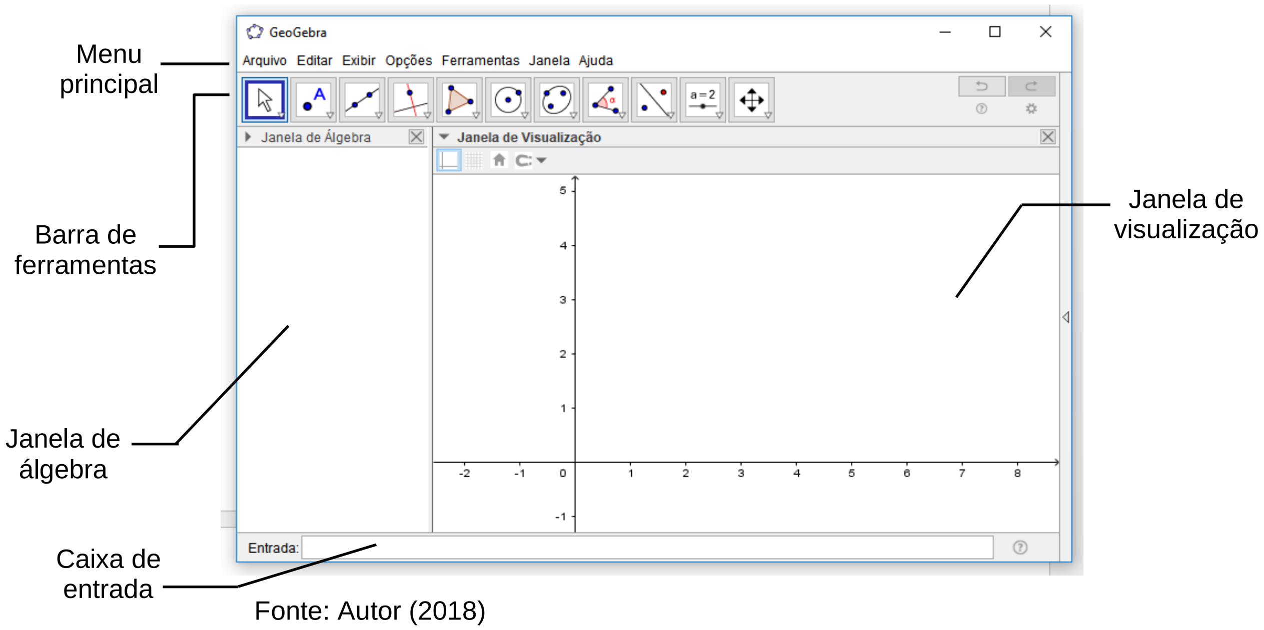
Nos softwares de geometria dinâmica, quando feita uma construção, podem-se aplicar movimentos a seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura (BRASIL, 2006). Assim,

> Em uma construção, a figura sempre preserva suas propriedades fundamentais quando um dos elementos “móveis” que a compõem é arrastado. Se arrastamos uma figura e ela não mantiver suas propriedades fundamentais, a figura é apenas um desenho (BORBA et al., 2015, p. 24)

Ainda, segundo Borba et al. (2015, p.23), a geometria dinâmica proporciona um dinamismo à maneira de utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação.

Assim, o GeoGebra possibilita a construção de vários objetos como: pontos; segmentos; retas; polígonos; círculos, vetores, gráficos de funções, entre outros, os quais podem ser modificados dinamicamente. O manuseio do software é bem simples e dinâmico, e sua interface é bastante intuitiva. Ao abri-lo é possível identificar as cinco principais áreas do programa, conforme figura abaixo:

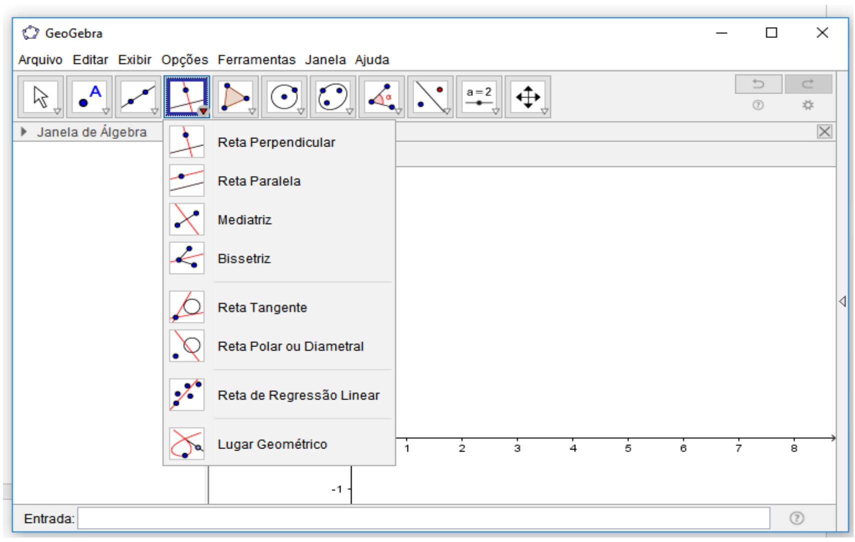
Figura 4 – Interface do GeoGebra



Fonte: Autor (2018)

No *menu principal* é possível acessar alguns comandos, entretanto a *barra de ferramentas*, certamente, é área mais acessada dentro da interface do GeoGebra, tendo em vista que a maioria das funções utilizadas se encontra nas 11 janelas que a compõe. Cada janela possui diversas ferramentas, as quais podem ser visualizadas clicando no canto inferior direito do ícone, conforme figura a seguir:

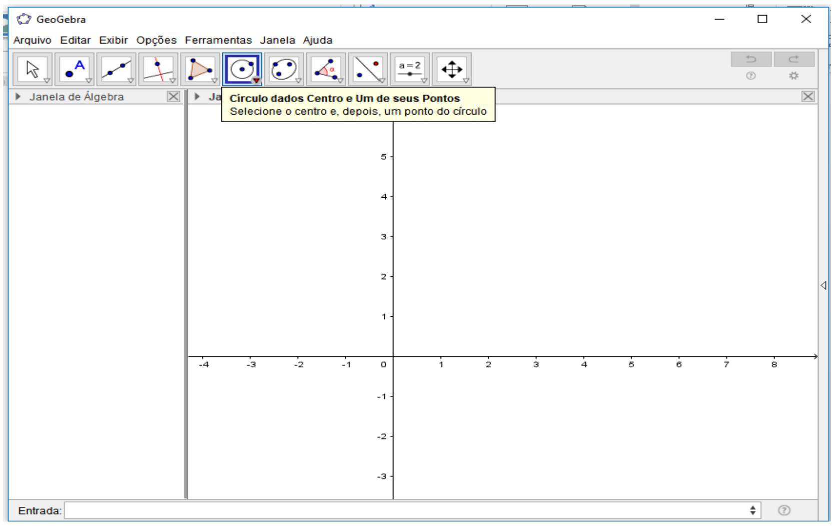
Figura 5 – Ferramentas do GeoGebra



Fonte: Autor (2018)

Um detalhe interessante é que ao parar o cursor sobre o canto inferior direito de cada ícone da barra de ferramentas, aparecerá uma caixa de diálogo dando dicas de como usar a ferramenta – o que facilita ainda mais a utilização do software, tornando-o autoexplicativo. Veja a figura abaixo.

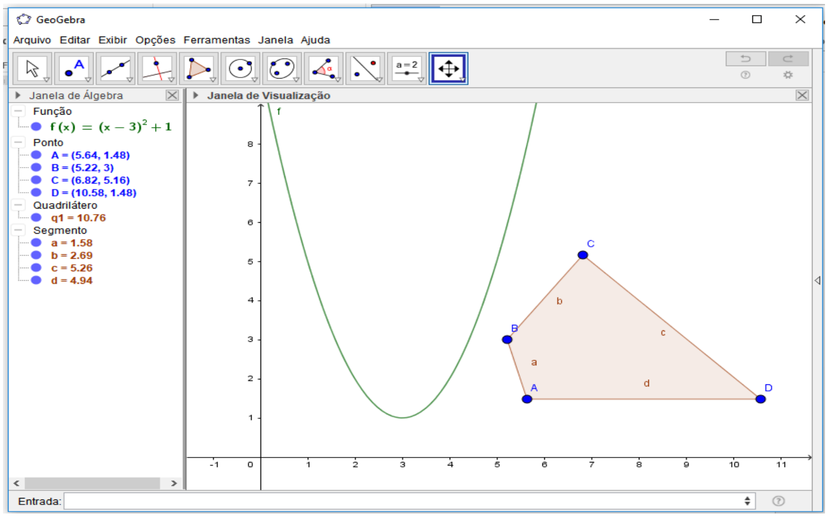
Figura 6 – Caixa de diálogo do GeoGebra



Fonte: Autor (2018)

Outro campo muito importante do software é a *caixa de entrada*, na qual é possível inserir fórmulas, funções, coordenadas de pontos, entre outros comandos, os quais aparecerão na *janela de álgebra*, e que, eventualmente, poderão se apresentar como objetos geométricos na *janela de visualização*. Nesta janela, além de visualizar geometricamente os comandos informados na *caixa de entrada*, é possível realizar construções geométricas usando as ferramentas disponíveis na *barra de ferramentas*.

Figura 7 – Janela de visualização



Fonte: Autor (2018)

Segundo Nunes (2011, p. 65), o GeoGebra além de ser um software de fácil manuseio, que favorece o uso até mesmo por alunos desde as séries iniciais, permite explorar e descobrir propriedades dos objetos, levando o discente a experimentar, testar hipóteses, desenvolver estratégias, argumentar e deduzir, favorecendo a compreensão e as propriedades das figuras geométricas estudadas.

Conforme, Guimaraes et al. (2012, p.287), “a utilização desse *software* em sala de aula permite ao aluno levantar conjecturas podendo validá-las ou não a partir de suas próprias construções e/ou através dos questionamentos feitos pelo professor”.

Assim, para desenvolver a sequência didática proposta nesta dissertação, iremos lançar mão das potencialidades que o GeoGebra proporciona, sobretudo pelo fato de algumas atividades necessitar que se faça uma variação no tamanho do triângulo retângulo construído, preservando suas propriedades tais como os ângulos.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, trataremos especificamente de alguns estudos correlatos à temática de pesquisa, a fim de nos inteirarmos do que já foi produzido a respeito do assunto, bem como diagnosticar eventuais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem a respeito do tópico de razões trigonométricas no triângulo retângulo, para então apresentarmos nossa intervenção didática.

Cabe registrar que, priorizamos em nossas buscas as pesquisas e publicações nacionais mais recentes acerca da temática de pesquisa, porém consideramos também as clássicas para obtermos um panorama mais amplo do que já fora realizado em termos de pesquisa.

Para realização desse levantamento bibliográfico foram consultados livros, revistas, periódicos, anais de eventos relacionados à Educação Matemática, sites de universidades e programas de Pós-graduação, Google acadêmico, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD, bem como algumas bases de dados ligadas à educação.

Para tanto, adotamos alguns critérios na busca desse material, tais como: trabalhos que contemplassem o tema “trigonometria no triângulo retângulo”, e de modo específico, trabalhos que enfatizassem o tópico de razões trigonométricas no triângulo retângulo e trabalhos que abordassem o ensino desse tópico com o uso das novas tecnologias, sobretudo com o software GeoGebra.

Assim, para catalogar sistematicamente as pesquisas encontradas, definimos previamente uma classificação para a nossa revisão de estudos em duas categorias, a saber: *trabalhos gerais sobre a trigonometria no triângulo retângulo* e *trabalhos experimentais relacionados ao uso das novas tecnologias.*

Para apresentar de modo breve os estudos consultados, enfatizamos na revisão de cada trabalho alguns itens como: objetivos, metodologia e procedimentos metodológicos e os resultados obtidos.

3.1 Trabalhos gerais sobre a trigonometria no triângulo retângulo

Apresentaremos nesta categoria, trabalhos que abordam de maneira ampla o conteúdo de trigonometria levando em consideração aqueles que enfatizassem estudos diagnósticos, teóricos e experimentais acerca da temática, a fim de obtermos um panorama sob as diferentes abordagens teóricas, bem como as metodologias de ensino empregadas para o estudo desse conteúdo.

O quadro a seguir expõe de modo sintético os estudos consultados nesta categoria.

Quadro 1 – Trabalhos gerais sobre a trigonometria no triângulo retângulo

Autor(es)	Ano	Título do trabalho
MOTA; JUCÁ; PEREIRA	2013	Uma análise de erros nas relações trigonométricas no triângulo retângulo
NASCIMENTO; SÁ	2014	O ensino das relações trigonométricas por meio de atividades
GOMES	2013	O ensino das relações trigonométricas no triângulo por atividades
OLIVEIRA	2006	Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades
PEREIRA	2011	Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio – Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa
LINDEGGER	2000	Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos

Fonte: Autor (2017)

Em Mota et al. (2013) encontramos os resultados de um estudo que teve como objetivo realizar uma análise das dificuldades e dos erros cometidos por alunos ao resolver questões sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo, especificamente as relações seno e cosseno.

O processo metodológico consistiu na aplicação de um teste individual, contendo 7 questões referentes as relações trigonométricas para uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Belém do Pará.

Assim, após a aplicação do teste, foi realizada uma análise das questões, na qual foi possível identificar as dificuldades, bem como os erros mais comuns cometidos pelos alunos acerca das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Sendo constatado que tais erros e dificuldades estavam relacionados à falta de compreensão na definição e identificação dos elementos de um triângulo retângulo, assim como na compreensão da definição das relações trigonométricas.

Nascimento e Sá (2014) realizaram uma pesquisa de cunho experimental cujo objetivo foi avaliar a viabilidade do ensino das relações trigonométricas por meio de atividades centradas na aprendizagem por redescoberta.

Os procedimentos metodológicos da pesquisa consistiram nas seguintes etapas: determinação da amostra, primeiro diagnóstico (pré-teste), elaboração e aplicação das atividades, segundo diagnóstico (pós-teste) e análise dos resultados.

A experiência foi desenvolvida junto a 40 alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola municipal de Juabá, no Pará. A fim de diagnosticar o conhecimento da turma acerca do conteúdo, foi aplicado um formulário contendo perguntas sobre dados pessoais e 10 questões referentes às relações trigonométricas. Após a correção do pré-teste ficou evidenciado que os alunos não tinham domínio do assunto, pois deixaram em branco praticamente todas as questões, salvo a primeira em que todos fizeram e acertaram.

Desse modo, foram aplicadas 8 atividades com a turma, sendo que ao final foi proposto um pós-teste. Os resultados apresentados no pós-teste se mostraram satisfatórios, visto que a maioria das questões teve um número de acerto superior a 50% pela turma. Assim, os pesquisadores concluíram que as atividades propostas ajudaram a melhorar a aprendizagem dos alunos, bem como aumentou o interesse e a autoestima em relação à matemática.

Com uma proposta análoga à anterior, Gomes (2013) realizou uma pesquisa com o intuito de verificar como um conjunto de atividades sobre o ensino das Relações Trigonométricas poderia favorecer a construção do conhecimento de alunos do 2º ano do ensino médio no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Desta forma, foi utilizada como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática, embasada nos estudos de Michèlle Artigue. A pesquisa consistiu em quatro fases: análises prévias; construção (concepção) da sequência didática e análise a *priori*; aplicação de uma sequência (execução) e; análise a *posteriori* e a validação.

Assim, a primeira fase consistiu no levantamento dos estudos acerca do ensino de Trigonometria, no qual foram catalogados e analisados 11 trabalhos, divididos em três categorias: estudos diagnósticos, experimentais e teóricos/investigativos. Além disso, foram consultados 100 professores de matemática da rede pública estadual e 100 alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual de Belém do Pará por meio de questionários a fim de levantar o perfil dos consultados e diagnosticar as dificuldades apresentadas no processo de ensino e aprendizagem das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Após esse levantamento, foi elaborada uma sequência de atividades e aplicado um questionário juntamente com um pré-teste para uma turma de alunos do 2º do Ensino Médio do município de Abaetetuba-PA, onde ocorreu a pesquisa. Assim, foram propostas 7 atividades referentes as relações trigonométricas no triângulo.

Ao final da sequência didática foi aplicado um pós-teste para os mesmos alunos que realizaram o pré-teste, constatando que os alunos obtiveram resultados positivos após a sequência de atividades realizada. Assim, os resultados revelaram que o ensino por atividades possibilitou um melhor desempenho dos alunos no estudo das relações trigonométricas no triângulo. Além disso, a pesquisadora sugeriu como atividade inicial uma revisão dos elementos de um triângulo retângulo para um melhor aproveitamento da sequência didática utilizada na pesquisa, tendo em vista as limitações e dificuldades verificadas na aplicação da sequência de ensino.

Oliveira (2006) realizou um trabalho com o propósito de analisar as dificuldades enfrentadas pelos professores e alunos referentes ao processo de ensino e aprendizagem de trigonometria por meio de atividades, sob a perspectiva construtivista. Assim, foi realizado um estudo de caso com alunos de uma escola estadual de ensino médio de Natal-RN para verificar tais dificuldades.

O pesquisador empregou a engenharia didática como metodologia para a realização do estudo. Inicialmente, alguns trabalhos relacionados à trigonometria foram analisados para identificar o problema de pesquisa. Em seguida, uma sequência didática foi elaborada e aplicada numa turma de ensino médio.

De posse dos dados, Oliveira (2006) realizou uma análise na qual sistematizou as dificuldades nos seguintes tópicos:

- *Dificuldades relacionadas ao ambiente físico e de materiais:* remete-se ao grande número de alunos em salas com pouco espaço físico, carência de material para que o professor elabore e construa instrumentos didáticos que sejam usados pelos alunos na realização de atividades;
- *Dificuldades relacionadas à estrutura organizacional da escola:* refere-se as ações não programadas que interromperam o ritmo das aulas na escola, tais como: greves, paralização do transporte público, dias “imprensados”, jogos internos e externos, entre outros;

- *Dificuldades decorrentes dos paradigmas do ensino tradicional:* uma das maiores dificuldades enfrentadas pelo professor ao optar pelo ensino construtivista reside na resistência dos próprios alunos ao modelo tradicional, visto que já estão acostumados a copiar atividades do quadro, a repetir exercícios, e esperar o professor apontar o caminho mais fácil para se chegar nas soluções dos problemas propostos. Em contraste ao modelo construtivista, onde eles serão instigados a solucionar problemas e a realizar descobertas por meio das atividades propostas pelo professor, sendo esse apenas um mediador no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, ainda tem os pais dos alunos que devido ao fato de terem sido escolarizados no modelo tradicional, esses acreditam que os filhos só estão aprendendo se seus cadernos estiverem repletos de coisas escritas;
- *Dificuldades decorrentes dos paradigmas da profissão docente:* aqui o pesquisador faz uma reflexão sobre a complexidade da profissão docente, expondo os desafios enfrentados na profissão, bem como as dificuldades na realização de estudos para a elaboração de uma sequência de atividades nos moldes da que foi apresentada na pesquisa. Assim, por conta das extensas jornadas de trabalho a que muitos professores se submetem, acabam preferindo e achando mais conveniente o modelo tradicional de ensino, trabalhando predominantemente com aulas expositivas e exercícios de fixação;
- *Dificuldades decorrentes das competências e habilidades dos alunos:* nesta categoria, o pesquisador destaca a demora dos alunos ao realizar as atividades, bem como a dificuldade em manusear os instrumentos de desenho geométrico. Além disso, tem-se as dificuldades relacionadas às atitudes incorporadas pelos alunos dentro e fora de sala de aula, como a falta de interesse e motivação para desenvolver atividades sem estar diante dos olhares do professor.

Verificou-se um rendimento satisfatório dos alunos a partir da experiência desenvolvida. O pesquisador faz algumas recomendações aos professores que pretendem romper com o ensino tradicional e adotar a concepção construtivista em sua sala de aula, entre elas: de que é necessário conhecer a turma antes de elaborar as atividades; recomenda-se também que o material elaborado seja testado antes de ser aplicado; dividir a turma, caso a mesma seja numerosa, afim de que se obtenha um resultado satisfatório; atentar-se para o calendário pedagógico da escola e; finalmente, entregar à escola com antecedência o material que será reproduzido aos alunos a fim de evitar surpresas indesejáveis.

Com uma abordagem relativamente distinta das anteriores, Pereira (2011) apresenta os resultados de uma pesquisa sobre o ensino de trigonometria, que constou da elaboração, aplicação e análise de uma abordagem didática para o ensino noturno baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, sendo desenvolvida numa turma de 2º ano do ensino médio do período noturno de uma escola pública da zona urbana de Campina Grande-PB.

O processo metodológico constou da construção de um módulo de atividades que enfatizavam as relações entre os conceitos. A proposta foi desenvolvida com seções, realizadas em grupo e individualmente, que permitiram levantar dados baseados na observação e registro do desenvolvimento dos alunos nas atividades; além disso, por meio de um questionário de autoavaliação pôde-se observar a reflexão dos alunos sobre a própria aprendizagem.

Os resultados obtidos confirmaram a necessidade e a importância de se trabalhar os conhecimentos prévios e a possibilidade de abordagens que não envolvam apenas fórmulas e algebrismos excessivos que certamente tornam a aprendizagem mecânica e sem significado para o aluno.

Lindegger (2000) realizou um trabalho a fim de investigar uma abordagem para o ensino de trigonometria no triângulo retângulo, na qual a partir da manipulação de modelos[3] se pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Para tanto, a pesquisa foi desenvolvida com duas turmas de 8ª série do ensino fundamental, sendo uma considerada como grupo de referência (GR) e a outra como grupo experimental (GE). Desse modo, com o grupo de referência (GR) foi realizada uma abordagem da trigonometria segundo os moldes tradicionais (definição, exemplos e exercícios), inclusive fazendo uso do livro didático. Por outro lado, o grupo experimental (GE) foi submetido a uma sequência didática pautada nos pressupostos teóricos construtivistas com base na psicologia cognitiva de Vygotsky e Vergnaud, bem como na didática francesa de Brousseau.

[3] Nesse trabalho a palavra *modelo* foi empregada, segundo o autor, "no sentido de representação da realidade ou de um objeto matemático ideal, através de maquete (três dimensões), triângulos feitos em madeira (três dimensões), figuras (duas dimensões), construções geométricas (duas) dimensões e equipamentos criados para auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos". Isto é, "com ênfase a um aspecto material, de concretização ou representação de uma imagem" (p. 3).

A fim de fazer um paralelo entre ambos os grupos, foram realizados dois testes com nove questões cada: um pré-teste (antes do estudo dos conceitos das razões trigonométricas) e um pós-teste (aplicado após o contato com o conteúdo).

Assim, após a aplicação das respectivas abordagens de ensino e dos testes, nos quais foram submetidos os grupos investigados, foi realizada uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados. Sendo constatado que o grupo experimental (GE) apresentou um rendimento satisfatório e superior em relação ao grupo de referência (GR). E, mais ainda, a sequência de ensino, apoiada numa abordagem socioconstrutivista, iniciando por situações-problema a-didática, apresentou resultados satisfatórios, tanto quantitativamente quanto qualitativamente.

Desse modo, os resultados mostraram que uma elevada carga de exercícios, por si só não garante sucesso na aprendizagem dos conteúdos; ao contrário de situações que privilegiam mais o raciocínio e a participação ativa dos alunos.

3.2 Trabalhos experimentais relacionados ao uso das novas tecnologias

Esta seção tem o intuito de apresentar alguns trabalhos e experiências realizadas em sala de aula com o uso das tecnologias de informação, sobretudo com o uso do software GeoGebra para trabalhar as razões trigonométricas. O que será de grande relevância para o direcionamento do nosso trabalho, uma vez que nos possibilitará obter informações sobre as experiências que tiveram êxito e/ou falhas na sua aplicabilidade, para assim planejarmos melhor nossa proposta de ação na pesquisa que pretendemos desenvolver.

O quadro a seguir sintetiza os estudos consultados nesta categoria.

Quadro 2 – Trabalhos experimentais relacionados ao uso das novas tecnologias

Autor(es)	Ano	Título do trabalho
OLIVEIRA	2013	Descobrindo as razões trigonométricas no triângulo retângulo
MELO	2013	O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica
LOPES	2011	Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria
SILVA	2011	Trigonometria, Modelagem e Tecnologias: um estudo sobre uma sequência didática
BORGES	2009	Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma

		sequência para ensino

Fonte: Autor (2017)

Oliveira (2013) desenvolveu um estudo visando explorar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para tanto, foram adotadas duas abordagens de ensino: uma com o auxílio de régua e transferidor e a outra com o software GeoGebra. As atividades propostas foram aplicadas numa turma de 3º ano do ensino médio da cidade de Franca, interior de São Paulo.

A metodologia da pesquisa se desenvolveu por meio da Engenharia Didática. Nas duas abordagens os resultados esperados foram alcançados com sucesso, contudo; na segunda etapa, o uso do software foi um agente motivador da atividade, pois além de facilitar a visualização das construções, proporcionou a obtenção de valores exatos nas razões.

Ao longo da aplicação do projeto diversos outros temas puderam ser explorados, tais como o sistema métrico e o erro nas aproximações. Desta forma, concluíram que o uso da informática em sala de aula contribuiu para que as aulas ficassem mais dinâmicas e os alunos mais motivados.

Melo (2013) realizou uma pesquisa, visando comparar os resultados da aplicação de uma metodologia desenvolvida para o ensino das razões trigonométricas por meio da resolução de problemas com o auxílio do software de geometria dinâmica Geogebra, em turmas de 9º ano do ensino fundamental de duas escolas da rede pública municipal do Rio de Janeiro com diferença significativa no ranking do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica).

A experimentação consistiu na aplicação de um módulo de atividades de ensino envolvendo o software GeoGebra, no qual foram ministradas cinco aulas expositivas e práticas, com duração de cem minutos cada. Ao final foi aplicada aos alunos uma avaliação formativa.

Assim, percebeu-se que para atingir duas realidades distintas é necessário trabalhar os conteúdos básicos como semelhança, proporção, números decimais, teorema de Pitágoras, entre outros, visando atingir os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo. Além disso, verificou-se que o uso do software foi extremamente importante, pois através dele foi possível mostrar detalhes importantes relativos a percepção visual das situações-problema.

Embora com uma proposta diferente da anterior, mas seguindo a mesma linha, Lopes (2011) desenvolveu um estudo cujo objetivo foi analisar as potencialidades e limitações do software GeoGebra na formação de conceitos básicos da Trigonometria. Para tanto, foi elaborado e aplicado um módulo de atividades investigativas com alunos da 2º série do ensino médio de uma escola estadual de Natal (RN). Para elaborar as atividades investigativas, a autora se valeu das concepções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005)[4] e Ernest (1996)[5].

Cabe registrar que, a sequência didática aplicada aos alunos abarcou conteúdos sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, ciclo trigonométrico e funções trigonométricas, usando o GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem. Assim, após a aplicação da sequência didática na turma, a pesquisadora concluiu que o uso do software GeoGebra pode auxiliar na resolução de problemas de trigonometria, especialmente em atividades investigativas, de forma que os estudantes possam interagir com as figuras construídas permitindo que os dados sejam alterados graficamente, mantendo as características da construção.

Por outro lado, Silva (2011) realizou um estudo cujo objetivo principal foi analisar as possíveis contribuições que uma abordagem envolvendo modelagem e tecnologias de informação poderia trazer para ensinar trigonometria no ensino médio.

Para orientar a pesquisa adotou-se a Engenharia Didática como metodologia. Para tanto, foi construída uma sequência didática constituída por 23 atividades referentes ao conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico. Sendo essa sequência aplicada para 70 alunos de duas turmas do 2º ano do ensino Médio de uma escola pública do interior de Minas Gerais.

A sequência didática foi proposta com o intuito de motivar os alunos no desenvolvimento de atividades referentes à realidade para que descobrissem padrões e propriedades trigonométricas, incentivar a redescoberta através da modelagem, bem como construir modelos abstratos da trigonometria, atribuindo significados próprios, a partir do uso de material concreto e de applets construídos no GeoGebra.

---

[4] Ponte J. P.; Brocardo, J.; Oliveira, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

[5] Ernest, P.. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: Abrantes; Leal; Ponte (Orgs.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projeto MPT, 1996.

Os resultados evidenciaram que a abordagem proposta contribuiu para que os alunos atribuíssem significado aos conteúdos estudados, embora essa abordagem tenha favorecido mais os aspectos geométricos e gráficos do que os algébricos da trigonometria. Sendo, portanto, verificado que as questões ligadas a álgebra foram as que os alunos apresentaram as maiores dificuldades de compreensão.

Outro trabalho interessante foi o de Borges (2009), pelo fato de adotar alguns aspectos teóricos e metodológicos próximos da nossa proposta de pesquisa. O pesquisador realizou um estudo que teve como objetivo verificar se atividades manipulativas e o computador contribuem para a aprendizagem da transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.

Para desenvolver essa investigação o pesquisador se fundamentou na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e nos pressupostos da Engenharia didática para a elaboração, aplicação e análise da sequência didática.

Os resultados da pesquisa apontaram que os alunos participantes da experimentação, não mobilizaram alguns conhecimentos prévios necessários, bem como apresentaram dificuldades para exporem suas observações por escrito. Porém, os resultados obtidos evidenciaram avanços na aprendizagem desses alunos, pois ao executarem as atividades utilizando a geometria dinâmica constatou-se um relativo interesse e concentração.

Diante do exposto, acreditamos que esse levantamento de literatura, acerca do nosso objeto de pesquisa, foi de grande valia para nossa intervenção didática no estudo realizado.

4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para o desenvolvimento dessa pesquisa utilizamos os pressupostos da Engenharia Didática baseado nos estudos de Michèlle Artigue (1988). Desse modo, apresentaremos neste capítulo os princípios e fundamentos dessa metodologia de pesquisa, bem como os procedimentos metodológicos que nortearam nosso estudo.

4.1 Engenharia Didática

Tendo sua origem no início da década de 1980 na França, a Engenharia Didática trata-se de uma metodologia de pesquisa que privilegia a organização dos procedimentos metodológicos em Didática da Matemática, contemplando tanto o aspecto teórico quanto o experimental.

Segundo, Michèlle Artigue (1988), considerada uma das suas maiores colaboradoras para o desenvolvimento dessa metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática se caracteriza como um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, ou seja, na concepção, realização e observação das sessões de uma sequência de ensino.

Neste sentido, Pais (2008, p.99) enfatiza que "a Engenharia Didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização prática da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática". O termo também sugere uma analogia entre o trabalho desenvolvido pelo pesquisador em didática da matemática e o trabalho de um engenheiro no que se refere as etapas de concepção, planejamento e execução de um projeto. Assim, conforme Artigue (1992):

> A Engenharia Didática é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. (ARTIGUE, 1992, *apud* OLIVEIRA, 2013, p.42).

A Engenharia Didática compreende quatro fases, a saber: *análise preliminar; concepção e análise a priori; experimentação*; e a *análise a posteriori* e *validação*.

A *análise preliminar*, segundo Pais (2008), consiste no levantamento de um quadro teórico sobre o qual o pesquisador fundamenta suas principais categorias, bem como na análise das concepções dos sujeitos envolvidos e das condições da realidade que será proposta a experiência.

Almouloud (2007) destaca vários pontos que são realizados nesta fase, tais como: o estudo da gênese histórica do saber em estudo e suas manifestações antigas ou contemporâneas, suas funcionalidades na matemática e os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito; a análise do ensino usual e seus efeitos; evidenciar os saberes (matemáticos) e os conhecimentos (matemáticos e/ou culturais ou pessoais) relacionados com o saber visado; análise das condições e fatores de que depende a construção didática das situações de ensino; análise das propostas curriculares e dos livros didáticos; levantamento bibliográfico sobre os fatores que interferem nos processos de ensino e de aprendizagem do objeto em questão (artigos, livros, dissertações, teses etc.); definir a questão de pesquisa e justificar sua escolha, bem como definir os fundamentos teóricos e os procedimentos metodológicos que nortearão a fase experimental.

Já a *concepção* e *análise a priori* refere-se à elaboração de uma sequência didática que será proposta aos alunos para o estudo de determinado conteúdo, levando-se em consideração os estudos prévios a fim de promover a aprendizagem do objeto matemático que se deseja ensinar, bem como permitir aos alunos o desenvolvimento de competências e habilidades.

Cabe ressaltar que, uma “sequência didática” é um conjunto de atividades previamente planejadas e analisadas para trabalhar conteúdos disciplinares em sessões (aulas) visando observar situações de aprendizagem, bem como proporcionar uma melhor dinâmica no processo de ensino e aprendizagem (PAIS, 2008; OLIVEIRA, 2013).

Segundo Artigue (1992), para a estruturação da sequência didática e da *análise a priori* é necessário estabelecer as chamadas variáveis de comando que supostamente interferem na constituição do fenômeno estudado. Essas variáveis, estão relacionadas com a *macrodidática*, que compreende a organização geral da Engenharia Didática, e *microdidática* que, por sua vez está relacionada aos conteúdos didáticos que serão mobilizados em cada sessão da sequência didática.

Desse modo, Almouloud (2007) e Machado (2016) salientam que a *análise a priori* visa prever e analisar as dificuldades que os alunos poderão enfrentar nas atividades propostas, bem como os novos conhecimentos e/ou novos métodos de resolução que os alunos podem adquirir e os saberes/conhecimentos que devem ser institucionalizados.

A *experimentação* trata-se da aplicação efetivamente da sequência didática, onde haverá o contato direto entre o professor/pesquisador e os alunos, sob a observação direta do pesquisador ou por outros observadores capacitados para fazer os devidos registros de cada sessão (aula) no ambiente de aprendizagem, tendo em vista que nem sempre é possível, apenas com os registros dos alunos e com as observações do professor/pesquisador, obter todas as informações necessárias.

Por fim, tem-se a *análise a posteriori* e *validação*, na qual ocorrerá o tratamento das informações obtidas no processo de aplicação da sequência didática, bem como a comparação/confrontação dos dados previstos na *análise a priori* com o que efetivamente aconteceu na *experimentação* a fim de validar as hipóteses de pesquisa.

Portanto, a validação de uma pesquisa que se utiliza da Engenharia Didática ocorre de maneira interna, isto é, estabelecendo uma comparação entre a *análise a priori* e a *análise a posteriori*, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste, sendo um grande diferencial dessa metodologia de pesquisa em relação as demais. (ALMOULOUD, 2007; MACHADO, 2016; OLIVEIRA, 2013).

4.2 Procedimentos Metodológicos

Apoiados nos pressupostos da Engenharia Didática estruturamos e executamos nossa pesquisa conforme as etapas, já explicitadas acima, da referida metodologia de pesquisa:

a) Análises preliminares

Nesta etapa inicial, foi realizado um estudo sistemático acerca do nosso objeto de pesquisa com o intuito de obter informações baseadas em fontes bibliográficas e estudos científicos referentes a origem do objeto matemático, bem como sua inserção no ensino, levando em conta os aspectos históricos e epistemológicos.

Além disso, apresentamos um panorama do ensino usual da trigonometria na educação básica, em especial, do tópico de razões trigonométricas, considerando algumas propostas curriculares, os PCN da Matemática e os livros didáticos.

Em seguida, fizemos uma revisão de literatura de artigos, dissertações e teses, visando identificar os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e construir nossa questão de pesquisa. Para tanto, consultaremos alguns sites e periódicos de educação matemática, bem como plataformas e bibliotecas digitais ligadas à Educação.

Ao final dessa fase, apresentamos a fundamentação matemática referente à trigonometria no triângulo retângulo, levando em consideração os aspectos formal e didático sobre as razões trigonométricas e algumas relações decorrentes delas, a fim de nortear a elaboração de nossa sequência didática.

b) Análises a *priori*

Nesta fase, elaboramos uma sequência didática constituída por atividades previamente planejadas, levando em conta os estudos prévios, a fim de construir os conceitos das principais razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Tais atividades foram construídas com base na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, na noção de Transposição Didática e nas orientações sobre o uso das TIC em sala de aula, de modo particular, do software GeoGebra como recurso didático para o ensino de matemática. Cabe registrar que a sequência didática foi sendo aprimorada ao longo das disciplinas que tivemos em nosso curso de Mestrado.

c) Experimentação

Na experimentação ocorreu a aplicação da sequência didática, na qual haverá a participação direta entre o pesquisador (professor) e os sujeitos da pesquisa (alunos de 9º ano do ensino fundamental) em que serão desenvolvidas as situações didáticas no ambiente de aprendizagem – neste caso, no laboratório de informática de uma escola da rede pública de ensino do município de Marabá-PA.

A sequência didática elaborada nesta pesquisa contém 5 atividades, onde foi necessário o uso do software GeoGebra para seu desenvolvimento. Cabe registrar que antes da aplicação da sequência didática foi realizado um trabalho de familiarização dos alunos com os principais comandos do software.

Para a realização das atividades propostas na sequência didática, dispormos de um laboratório de informática com computadores contendo o programa GeoGebra instalado, numa quantidade suficiente para que os alunos pudessem desenvolver as atividades ao menos em dupla. Ademais, foi necessário um projetor de imagens conectado a um computador para que o professor demonstrasse alguns comandos do software, bem como uma lousa para fazer os registros de institucionalização das atividades e resolução de algumas situações-problema propostas aos alunos.

Quanto às observações, elas se deram de forma direta pelo pesquisador que também aplicará a sequência, bem como por outros observadores designados e capacitados para fazer as devidas anotações de cada sessão (aula). Para tanto, foram utilizadas fichas e um caderno de anotação. Além disso, usaremos celulares para registrar alguns momentos durante o desenvolvimento das atividades realizadas pelos alunos no laboratório de informática.

A maioria das atividades foram desenvolvidas em duplas para proporcionar uma melhor interação e trocas de conhecimentos entre os alunos. Foram distribuídas a cada dupla as atividades em folhas impressas com os respectivos procedimentos que os mesmos deveriam seguir, conforme as orientações dadas pelo professor.

Vale ressaltar que o professor aplicador atuou como um mediador nesse processo didático, orientando os alunos, tirando eventuais dúvidas sobre os enunciados, procedimentos e uso da ferramenta tecnológica, e sobretudo fazendo as intervenções necessárias nas atividades a fim de possibilitar ao aluno a construção do seu próprio conhecimento.

E, ao final de cada atividade, foi realizada a socialização das respostas e a institucionalização dos novos conceitos construídos pelos alunos. Além disso, após as atividades foram propostas situações-problema em que os alunos deveriam resolver empregando os conceitos construídos ao longo da sequência de atividades.

d) Análise a *posteriori* e validação

Nesta última fase da pesquisa, tivemos a *análise a posteriori* e *validação* que ocorreram concomitantemente. Na *análise a posteriori* analisamo os registros dos alunos e as informações obtidas durante aplicação da sequência didática. Assim, a *validação* dos resultados se deu por meio da comparação/confrontação dos dados previstos na *análise* a *priori* com o que efetivamente ocorreu durante a experimentação, a fim de verificar as hipóteses iniciais da pesquisa.

Analisamos as atividades à luz da Teoria das Situações Didáticas, da Transposição Didática e das TIC como recurso didático.

E para sistematizar os resultados da pesquisa fizemos uma análise qualitativa e outra quantitativa:

Na abordagem qualitativa, analisamos o interesse e o envolvimento dos alunos no desenvolvimento das atividades aplicadas, os eventuais erros e os estudos realizados por outros pesquisadores para embasar nossas conclusões.

Em relação a abordagem quantitativa, usamos alguns métodos estatísticos básicos para quantificar o desempenho dos alunos em relação às atividades da sequência didática proposta. Para tanto, tabulamos os dados obtidos em planilhas do Excel e representamos em tabelas do Word para gerar gráficos relativos a cada um dos itens das atividades para facilitar a interpretação dos resultados.

Vale ressaltar que, durante todas as fases da pesquisa foi garantido o anonimato do participante (aluno), sendo permitido ao mesmo deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhuma forma de imposição.

5 TRIGONOMETRIA: ASPECTOS HISTÓRICOS E DE ENSINO

Esse capítulo visa apresentar um breve estudo histórico da Trigonometria, retratando sua origem e seu desenvolvimento ao longo dos anos pelas mais diversas civilizações até sua incorporação nos mais variados campos da ciência moderna.

Além disso, abordaremos a Trigonometria como objeto de ensino, enfatizando algumas propostas e orientações curriculares para o ensino desse conteúdo, análises de livros didáticos e avaliações educacionais de larga escala, a fim de compreendermos alguns obstáculos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo de modo a favorecer a construção da sequência didática.

5.1 Abordagem histórica da Trigonometria

A Trigonometria surgiu a partir das necessidades ligadas à Astronomia e, posteriormente, à Navegação e Topografia. Assim, foi através de problemas que visavam prever efemérides celestes e medir distâncias inacessíveis (altura de pirâmides, distância entre astros, localização marítima e geográfica, medida de terras, etc) que a trigonometria nasceu e se desenvolveu ao longo dos tempos.

Sua origem é um tanto imprecisa, porém desde os antigos egípcios e babilônios já se tinha indícios de seus estudos, tendo em vista que teoremas sobre as razões entre os lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos por esses povos (BOYER, 2003). Segundo Eves (2004), no *Papiro Rhind*, documento egípcio que remota cerca de 3000 anos, foram encontrados problemas envolvendo a cotangente; e na tábula cuneiforme babilônica *Plimpton 322*, escrita entre 1900 e 1600 a.C., possui uma notável tábua de secantes.

No entanto, foram os gregos que apresentaram consideráveis contribuições para o desenvolvimento da Trigonometria, os quais, segundo Boyer (2003), foram os primeiros a apresentar um estudo sistemático em relação aos ângulos (ou arcos) em um círculo e os comprimentos das cordas que os subtendem.

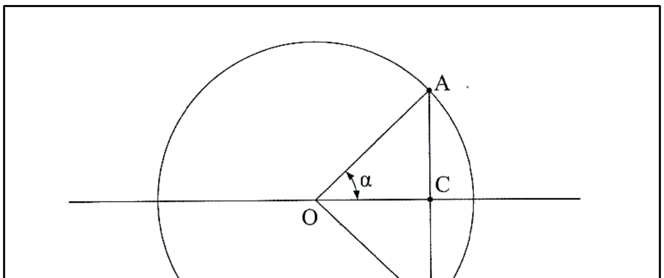
Euclides de Alexandria, que viveu por volta de 300 a.C., em sua obra *Os Elementos*, apresentou alguns conceitos trigonométricos, porém de maneira geométrica, neste sentido as obras de Euclides não havia trigonometria no sentido estrito da palavra, mas havia teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas que hoje conhecemos.

Aristarco de Samos (320 a.C. – 250 a.C.) em sua obra *Sobre as Distâncias do Sol e da Lua* realizou algumas observações equivocadas, entre as quais de que a distância da Terra ao Sol seria maior que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua. Embora essa distância na verdade seja de aproximadamente 400 vezes, suas observações eram válidas no sentido do raciocínio dedutivo empregado, visto que os erros cometidos por ele se deram por conta das limitações dos instrumentos utilizados para medir ângulos. Aristarco também propôs, muito antes de Copérnico, um sistema heliocêntrico para o universo (CARVALHO, 2005).

Entretanto, Hiparco de Nicéia que viveu em torno de 120 a.C. foi quem recebeu o status de “pai da Trigonometria” devido a uma publicação de um tratado contendo 12 livros com tabelas de cordas, o que pode ter sido a primeira tabela trigonométrica, as quais relacionavam cada arco da circunferência à sua respectiva corda. Influenciado pela matemática babilônica, Hiparco acreditava que a melhor base de contagem era a sexagesimal, o que provavelmente deu origem a divisão do círculo em 360° (EVES, 2004; CARVALHO, 2005; MENDES e ROCHA, 2010).

Cabe registrar que os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo como conhecemos hoje, mas sim a corda do arco duplo. Assim, se o ângulo $A\hat{O}C$ subtende o arco AC, a corda do arco duplo $A\hat{O}D$ será AD.

Figura 8 – Corda do arco duplo



Fonte: Carvalho (2005)

Pouco depois, Menelau de Alexandria, que viveu por volta de 100 a.C., escreveu a obra *Geometria Esférica* dividida em três livros: sendo que o primeiro estabelece uma base para triângulos esféricos, o segundo descreve aplicações da geometria esférica aos fenômenos astronômicos e o terceiro apresenta o famoso *Teorema de Menelau* (BOYER, 2003).

Contudo, segundo Carvalho (2005), a trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, o qual viveu em torno de 150 d.C., tendo desenvolvido uma das mais importantes obras da antiguidade o *Syntaxis mathematica*, mais conhecido como o *Almagesto*. Constituída por 13 livros, essa obra possui uma tabela de cordas correspondentes a diversos ângulos, em ordem crescente e em função da metade do ângulo, equivalente a tabela de senos utilizada atualmente. Além disso, Ptolomeu deduziu o que em notação moderna equivale a expressão $sen(a \pm b)$, bem como demonstrou a relação trigonométrica fundamental $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$.

Com o declínio do Império Romano, o centro da cultura se volta para a Índia que, por sua vez, revoluciona a Trigonometria. Conforme Morey (2001, *apud* Mendes e Rocha, 2010), na trigonometria indiana as funções eram definidas como comprimento de um segmento e não como uma relação entre dois comprimentos como se faz hoje. Além disso, usavam frequentemente o comprimento da meia-corda do ângulo central, chamado posteriormente de *seno indiano*. Vale ressaltar que a Trigonometria dos hindus era essencialmente aritmética; ao contrário da grega, muito mais geométrica.

Após os hindus, as contribuições vieram dos árabes que deram um tratamento sistemático à trigonometria. Atribui-se a eles a introdução das seis funções básicas da trigonometria: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente; a definição do seno no raio unitário; bem como o estabelecimento de várias relações trigonométricas (MENDES e ROCHA, 2010). Além disso, foram responsáveis indiretamente pelo uso da palavra *seno*, conforme relata Carvalho (2005, p. 142):

> A palavra meia-corda, em sânscrito, língua utilizada pelos antigos hindus, é *jiva*. Esta palavra foi utilizada sem modificações pelos árabes. No entanto, como algumas outras línguas, em árabe frequentemente se escreve somente as consoantes das palavras, deixando as vogais ao cuidado da interpretação do leitor. Ora, a palavra sânscrita *jiva* tem as mesmas consoantes que a palavra árabe bem familiar *jaib* (*v* e *b* se confundem como labiais explosivas). *Jaib*, em árabe, significa bacia ou bolso. Assim, foi natural que os tradutores de trabalhos matemáticos, do árabe para o latim, e que desconheciam o sânscrito, supusessem que lidavam com tabelas de *jaib*, e traduziram este termo pela palavra latina correspondente, *sinus*, que deu origem a seno.

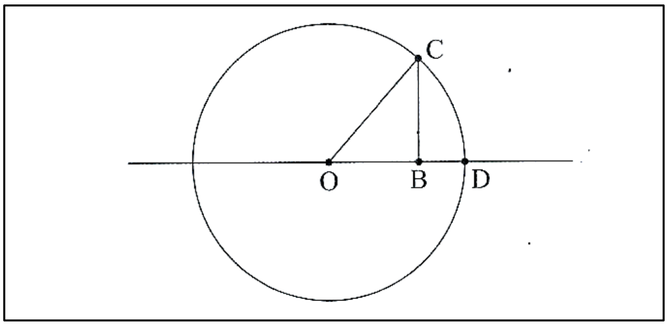
Como vimos, os estudos da Trigonometria entre os gregos, hindus e árabes estavam voltados às aplicações na Astronomia. Porém, a partir do Renascimento, período da expansão marítima europeia, a Trigonometria passou a ser empregada em outros ramos como a Cartografia e a Topografia. Assim, o desenvolvimento da Navegação exigia mapas e cálculos mais precisos das efemérides astronômicas, a fim de permitir a determinação da hora e da localização durante as navegações (CARVALHO, 2005).

Nesse contexto, grande parte do desenvolvimento da Trigonometria no Renascimento se deve aos alemães. Entre eles, podemos destacar George Peurbach (1423-1461) que traduziu o *Almagesto* diretamente do grego, bem como criou tabelas mais precisas de senos. Mais adiante, seu trabalho foi dado continuidade por seu aluno João Regiomontano (1436-1476) que publicou o *De Triangulis* (1464) o qual aborda a Trigonometria do triângulo retângulo. Além disso, encontra-se nesta mesma obra uma demonstração da *Lei dos Senos* (CARVALHO, 2005). Vale ressaltar que até então ainda não se conheciam as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Contudo, a construção de tabelas trigonométricas passou a ser uma tarefa cada vez mais essencial para o progresso da Astronomia e da Matemática. Assim, vários matemáticos se dedicaram na elaboração dessas tabelas, tais como George Rético (1514-1576), Nicolau Copérnico (1473-1543), François Vieta (1540-1603) e Bartolomeu Pitisco (1561-1613). A este último deve-se o uso da palavra *Trigonometria*, que significa medida dos ângulos de um triângulo.

Segundo Carvalho (2005), Rético publicou um tratado o qual faz uma exposição da Trigonometria do triângulo retângulo: em vez de dizer que CB é o seno do arco CD, ele considerou CB como o seno do ângulo COB, o que introduziu essencialmente a formulação da trigonometria do triângulo retângulo, como feito até hoje. Rético apresentou também as tabelas das seis funções trigonométricas atuais.

Figura 9 – Seno do ângulo CÔB



Fonte: Carvalho (2005)

Contudo, a trigonometria adquire sua forma atual quando Leonhard Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade de medida e define as funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, embora a transição das razões trigonométricas para as funções periódicas tenha se iniciado com Viète no século XVI (CARVALHO, 2005).

Nos séculos XVIII e XIX as funções trigonométricas passaram a figurar com mais frequência em Matemática, sendo vistas como essenciais na solução de problemas ligados à Matemática e à Física, além de favorecer a construção de tabelas trigonométricas cada vez mais precisas para aplicações nas áreas de Astronomia, Navegação e Topografia. (op. cit.).

Atualmente, a trigonometria por meio das funções trigonométricas tem ocupado posição de destaque no Cálculo e nas aplicações das mais diversas engenharias, até mesmo na música – na criação de variados sons em laboratórios computacionais.

5.2 A Trigonometria como objeto de Ensino

Conforme os aspectos históricos nos revelam, a Trigonometria surgiu e se desenvolveu em função de problemas ligados à Astronomia, Navegação e Topografia. Contudo, somente após um longo período tornou-se um ramo da Matemática, tendo diversas aplicabilidades em outras áreas do conhecimento.

Assim, podemos se perguntar: De que maneira a trigonometria se inseriu ao ensino de Matemática? Qual sua trajetória no contexto educacional brasileiro? Como se apresenta nos currículos atuais de ensino? O que as propostas curriculares e os livros didáticos abordam sobre esse tema?

Não pretendemos relatar de maneira minuciosa todo esse processo de incorporação da trigonometria ao ensino de Matemática; e sim, enfatizar alguns aspectos históricos e epistemológicos relevantes ao desenvolvimento desse tema no contexto educacional brasileiro, bem como exibir um panorama de como esse conteúdo se apresenta atualmente nas propostas curriculares de ensino, nos livros didáticos e nas avaliações educacionais de larga escala.

5.2.1 O ensino da trigonometria e as propostas curriculares

A trigonometria até meados do século XVI era considerada uma parte da geometria, a partir de então tornou-se uma área independente da Matemática. Em relação ao âmbito de ensino de matemática ainda persiste a polêmica se a trigonometria faz parte da geometria como um tópico a ser ensinado nas escolas ou trata-se de um tópico independente da Matemática assim como a aritmética, a álgebra e a geometria. Não entraremos no mérito da questão, porém Mendes (s.d.) em seu artigo *"A Trigonometria e o seu ensino: alguns fragmentos dessa história"* apresenta elementos esclarecedores dessa discussão que já havia sido levantada, desde o século XX, por educadores matemáticos brasileiros da época como Euclides Roxo.

O fato é que a trigonometria se encontra presente nos currículos de Matemática da escola brasileira há muito tempo, dada sua importância e aplicabilidade tanto na matemática quanto nas mais diversas áreas do conhecimento.

Até a década de 1960, não havia sistematicamente no país documentos oficiais com a denominação "Currículo". Durante muito tempo, a instituição responsável pela publicação dos programas de ensino no Brasil, foi o Colégio Pedro II, por ser considerado um colégio modelo, seus programas de ensino tornavam-se referência para os demais. Vale ressaltar que, o Colégio Pedro II foi responsável por todos os Programas de Ensino de 1850 a 1929, em todos esses programas a trigonometria sempre foi conteúdo da escola secundária (NACARATO et al., 2001).

A partir de 1930 até 1960, os programas eram publicados por Decretos e Portarias, pelo já existente Ministério da Educação e Saúde Pública, criado em 1930. Em 1961, com a publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional –

Lei 4.024/61 – os governos estudais passam a ser responsáveis pelos seus próprios programas de ensino (op. cit.).

Segundo Nacarato et al. (2001), a trigonometria esteve presente no ensino secundário brasileiro durante todo o século XX. Esse autor, através de um estudo que visou analisar a evolução histórica e a transposição didática do conhecimento matemático em trigonometria para as propostas curriculares e livros didáticos desse conteúdo, constatou a existência de três enfoques no ensino de Trigonometria no século XX, no Brasil: o *geométrico* (aproximadamente, até 1930), da *geometria vetorial* (em torno dos anos de 1930 a 1960) e das *funções circulares* (entre 1960 a 1990, aproximadamente).

Sob o enfoque geométrico eram enfatizados o estudo das linhas trigonométricas e dedução de fórmulas, suas variações e limites de valores, construções e uso de tábuas trigonométricas, resolução de triângulos e redução ao 1º quadrante. Posteriormente, com a inclusão do tópico “funções” no conteúdo de trigonometria, surgem dois novos enfoques o da geometria vetorial e, em seguida, o das funções circulares (MENDES e ROCHA, 2010).

Conforme Nacarato (2007, *apud* Mendes e Rocha, 2010, p.18)

> Os livros didáticos do período incorporam essas orientações para o ensino de trigonometria, ou seja, este deveria ser precedido do ensino de vetores e todas as definições básicas da trigonometria são exploradas por meio de vetores. A geometria elementar deixa de ser o referencial para as demonstrações em trigonometria.

Na década de 60, o ensino de Matemática acaba sofrendo algumas influências tanto externas quanto internas: uma delas foi marcada pelo Movimento da Matemática Moderna e a outra impulsionada por fatores políticos e econômicos do país na época, o qual exigia uma formação tecnicista em função das necessidades de mão-de-obra para o mercado de trabalho (NACARATO et al., 2001). Dessa forma,

> O ensino de Trigonometria fica impregnado das noções de funções e conjuntos, e passa a ter uma abordagem mais voltada à realização de exercícios, em detrimento da elaboração conceitual – excessiva preocupação com a linguagem matemática e com técnica de resolução. (NACARATO et al., 2001, p. 10)

Contudo, a partir das décadas de 80 e 90, a Trigonometria parece resgatar seu caráter geométrico, visto que deixou de ser denominada como funções circulares e aparece precedida pelo estudo de triângulos, porém sem a preocupação em buscar a geometria para demonstrar propriedades trigonométricas (MENDES e ROCHA, 2010).

Mendes e Rocha (2010) avaliam que a tendência do ensino de trigonometria, neste início de século XXI, é semelhante à do final do século passado, isto é, sem haver um resgate da geometria para demonstrar as relações trigonométricas e por valorizar mais os procedimentos do que a própria construção dos conceitos, o resgate histórico e sua aplicabilidade – aspectos que podem dar mais significado ao conteúdo.

Sabemos que o ensino de matemática tem sido bastante questionado em razão das dificuldades enfrentadas por muitos alunos, sem dizer na falta de motivação em estudá-la, pois muitos não veem sentido no que está sendo ensinado.

O baixo desempenho obtido recentemente pela maioria dos alunos nos exames de larga escala, como a Prova Brasil[6] e o *Programme for International Student Assessment* – PISA, refletem ainda mais as dificuldades referentes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Dados do PISA de 2015, revelaram que 70,3% dos estudantes brasileiros de 15 e 16 anos estão abaixo do chamado nível 2 em Matemática, o qual a OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) considera como essencial para que o estudante exerça plenamente sua cidadania. Isto significa que os alunos não atingiram sequer o nível básico de proficiência em Matemática, ou seja, não conseguem resolver problemas simples, bem como interpretar e empregar a matemática em diferentes contextos. Assim, a média nacional no PISA 2015 foi de 377 pontos, bem inferior à média da OCDE, 490 pontos (BBC BRASIL, 2017).

Segundo o portal QEdu[7], foi constatado que apenas 14% dos alunos que realizaram a Prova Brasil de 2015 atingiram o nível adequado na competência de resolução de problemas até o 9º ano na rede pública de ensino. Conforme a

[6] A Prova Brasil é um exame de larga escala, desenvolvida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC), tem como objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos. Nos testes aplicados na quarta e oitava séries (quinto e nono anos) do ensino fundamental, os estudantes respondem a itens (questões) de língua portuguesa, com foco em leitura, e matemática, com foco na resolução de problemas (BRASIL, 2016).

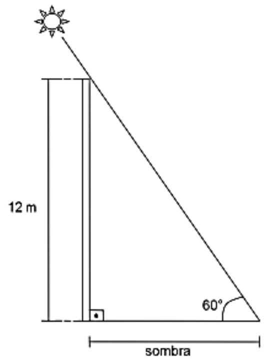
[7] O QEdu é um portal aberto e gratuito no qual é possível obter informações referentes a proficiência e qualidade do aprendizado em cada escola, município e estado do Brasil. Disponível em: < http://www.qedu.org.br/brasil/proficiencia>. Acesso em: 02 de jul. 2017 às 11h20min.

escala de aprendizado[8], adotada para aferir o desempenho dos alunos, foi constatado que: 2% alcançaram o nível avançado, 12% o proficiente, 55% o básico e 31% insuficiente.

Em relação ao desempenho dos alunos no conteúdo de trigonometria os resultados também não têm sido dos melhores. Consultando algumas devolutivas de questões aplicadas na Prova Brasil do 3º ano do ensino médio do ano de 2015, constatamos um baixo desempenho dos alunos em conteúdos básicos da trigonometria, sobretudo no que se refere à resolução de problemas que envolve aplicação das razões trigonométricas em contexto extramatemático. Desse modo, selecionamos um dos itens (questões) e o comentário pedagógico que se encontra na própria devolutiva a fim de analisarmos a dimensão das dificuldades encontradas pelos alunos.

Figura 10 – Item 612 das devolutivas da Prova Brasil

Um poste de 12 m de altura projeta uma sombra no solo em uma determinada hora do dia, como mostra a figura.



Dados: Sen 60° = $\sqrt{3}/2$

Cos 60° = 1/2

Tg 60° = $\sqrt{3}$

Logo o comprimento da sombra, em metros, é

(A) $\sqrt{3/3}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) $2/\sqrt{3}$

(D) $4\sqrt{3}$

(E) $6\sqrt{3}$

Fonte: BRASIL (2017)

---

[8] **Escala de aprendizado:** *Avançado:* Aprendizado além da expectativa. Recomenda-se para os alunos neste nível atividades desafiadoras; *Proficiente:* Os alunos neste nível encontram-se preparados para continuar os estudos. Recomenda-se atividades de aprofundamento; *Básico:* Os alunos neste nível precisam melhorar. Sugere-se atividades de reforço; *Insuficiente:* Os alunos neste nível apresentaram pouquíssimo aprendizado. É necessário a recuperação de conteúdo.

Para a resolução do item, o respondente deveria reconhecer que o comprimento da sombra projetada pelo poste corresponde ao comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo. Com base nisso, deve reconhecer os lados do triângulo retângulo (catetos e hipotenusa) e a razão trigonométrica adequada para determinar a medida do cateto que representa a sombra. Assim, a razão trigonométrica mais adequada é a tangente, e para solucionar o item (questão) o respondente poderia proceder da seguinte forma:

$$tg\ 60° = \frac{12}{x} = \sqrt{3} \ \therefore x = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\,.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Conforme o comentário pedagógico[9] posto na análise deste item, frequentemente os estudantes ficam confusos sobre qual lado do triângulo é o "oposto" e qual é o "adjacente". Sendo assim, apenas 29% dos respondentes acertaram a questão.

Como pudemos constatar, o índice de acerto desse item foi muito abaixo do rendimento adequado. O que evidencia as dificuldades dos alunos frente aos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo.

Além disso, as estatísticas do SisPAE[10] (Matemática – 2015) mostram também que o desempenho dos alunos do 2º ano do ensino médio e do 9º do ensino fundamental foram insatisfatórios, nas habilidades relacionadas à trigonometria no triângulo. De acordo com os gráficos de desempenho[11], os alunos obtiveram cerca de 40% de acertos nos itens que avaliam a habilidade de resolver problemas em diferentes contextos, a partir da aplicação das razões trigonométricas dos ângulos agudos. E, aproximadamente, 50% nos itens relacionados à habilidade de resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo (seno, cosseno, tangente, lei do seno, lei do cosseno).

Percebe-se que, em geral, a trigonometria é mais enfatizada no 2º ano do Ensino Médio – os livros didáticos e as propostas curriculares propõem, nesta série,

---

[9] Devolutivas da Prova Brasil, item 612, INEP. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/devolutivas>. Acesso em: 05 de jul. 2017.

[10] SisPAE – (Sistema Paraense de Avaliação Educacional) é um processo avaliativo de larga escala que abrange questões de Língua Portuguesa e Matemática, dos alunos de 4º e 5º anos, de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e de 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. Tem como objetivos consolidar um mecanismo de análise para subsidiar ações da SEDUC/PA e Prefeituras como política pública de estado de natureza sistêmica e fortalecer o processo de ensino e aprendizagem no sistema público de Educação Básica.

[11] Disponível em: <https://sispae.vunesp.com.br/SisPAE>. Cf. RevistaSisPAE_MAT_EF_ 2015, p.26. Acesso em: 28 jul. 2017.

uma carga bastante excessiva e maçante desse conteúdo. Além disso, os PCNEM (Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio) destacam que:

> Apesar de sua importância, tradicionalmente a **trigonometria** é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos (BRASIL, 2002, p.121-122).

Conforme os PCNEM (2002), o que se deve assegurar no ensino da trigonometria, especialmente àqueles que não pretendem seguir carreira nas áreas de exatas, são suas aplicações na resolução de problemas que envolvem medições, sobretudo no cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos.

Reportando-se mais especificamente ao ensino de trigonometria no Ensino Fundamental, temos observado tanto pelos resultados das avaliações oficiais quanto pela nossa experiência docente as dificuldades dos alunos no estudo e na aplicação dos conceitos fundamentais da trigonometria no triângulo retângulo, sobretudo na resolução de problemas que requerem o uso das razões trigonométricas.

As razões trigonométricas são essenciais para introduzir o estudo da trigonometria e mostrar sua aplicabilidade no cálculo de medidas inacessíveis em contextos extramatemáticos. Assim, é possível verificar diversas propostas curriculares que as recomendam no currículo escolar.

De acordo com as orientações curriculares para o ensino médio, "na introdução das razões trigonométricas seno e cosseno, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições" (BRASIL, 2006, p.73).

Neste sentido, a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, apresentou um documento intitulado "Contribuição da SBM para a discussão sobre currículo de matemática[12]", o qual recomenda que o tópico de trigonometria no triângulo retângulo seja trabalhado no 9º ano do ensino fundamental, e que as razões trigonométricas sejam estabelecidas através de semelhança de triângulos. Enfatizam ainda que, no 9º ano não é preciso ir além das três razões trigonométricas, porém propõe o estudo de outras relações a partir das razões

[12] Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wpcontent/uploads/2015/01/Discussao_Curricular_Ensino_Fundamental_II_PROPOSTA.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2017.

fundamentais. Sugerem, também, que as questões propostas que exigem o cálculo de distâncias devem ser resolvidas usando conhecimentos de trigonometria no triângulo retângulo. Desse modo, as situações que dependem de triângulos que não sejam retângulos, nas quais é preciso usar as leis do seno e do cosseno, devem ser tratadas no Ensino Médio.

No quadro abaixo temos a relação de tópicos e as habilidades que a SBM sugere na sua proposta curricular referente a trigonometria no triângulo retângulo para o 9º ano do ensino fundamental.

Quadro 3 – Proposta da SBM para a trigonometria no ensino fundamental

2. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	
Tópicos	**Habilidades**
2.1. Ângulos e triângulos semelhantes 2.2. Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente 2.3. Seno, cosseno e tangente de alguns ângulos 2.4. Relações trigonométricas 2.5. Resolução de problemas	• Saber usar o critério de semelhança AAA e concluir sobre a proporcionalidade dos lados • Entender que as razões trigonométricas dependem somente de um ângulo fixo • Saber construir com régua e transferidor: triângulo retângulo para calcular o seno ou cosseno de um dado ângulo; o ângulo correspondente a um dado valor de seno ou cosseno • Saber equacionar e resolver problemas usando as razões trigonométricas, em particular os problemas de distâncias inacessíveis

Fonte: SIMAS et al. (2015)

De modo particular, a rede pública de ensino de Marabá, onde desenvolvemos nossa pesquisa, possui um programa de ensino para a disciplina de Matemática. E, em tal programa, o tópico de razões trigonométricas consta no eixo temático “grandezas e medidas/espaço e forma”, sendo sugerido para ser trabalhado no 9º do ensino fundamental, especificamente no 4º bimestre do ano letivo.

Vale ressaltar também que a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) em sua proposta preliminar, sinalizou a importância do estudo das razões trigonométricas no 9º ano do ensino fundamental, quando registrou em suas propostas a habilidade de “reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos semelhantes e utilizar a semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas e as razões trigonométricas” (BRASIL, s.d., p.137).

Todavia, com as revisões e versões posteriores dessa proposta, o tópico de razões trigonométricas foi omitido do 9º ano, passando a figurar apenas na proposta curricular do ensino médio, sob a unidade curricular II, a qual explicita “utilizar a noção de semelhança para compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo, suas relações em triângulos quaisquer e aplicá-las em situações como o cálculo de medidas inacessíveis, entre outras” (BRASIL, 2016, p.564).

Diante do exposto, embora não haja um consenso, muitas propostas curriculares recomendam o estudo da trigonometria no ensino fundamental, razão pela qual, praticamente, todos os livros didáticos do 9º ano do fundamental apresentam em seus exemplares o tópico de razões trigonométricas.

5.2.2 Análise de livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental

Sabemos que a maioria dos professores, por conta de uma excessiva rotina de trabalho e por não dispor de outros recursos para desenvolver sua prática de sala de aula, acaba se apoiando quase que exclusivamente no livro didático adotado pela escola. Possivelmente, isso se deve ao fato do livro didático ser, para muitos professores, um recurso prático e, de certa forma, mais cômodo para a atividade docente, devido à falta de tempo para planejar e refletir acerca de sua prática docente (BRASIL, 1998).

Indubitavelmente o livro didático é um recurso extremamente útil à prática docente e desempenha um papel importantíssimo no processo de transposição didática. Todavia é preciso muito cuidado, por parte do professor, na escolha e uso do livro didático em sala de aula, tendo em vista que alguns deles, conforme afirmam os PCN da Matemática (1998, p.22), são de qualidade insatisfatória.

Não é difícil encontrar livros didáticos que, ao introduzir os conteúdos matemáticos, propõem uma abordagem similar ao modelo tradicional de ensino, segundo o padrão: definição, exemplos e exercícios. O que faz com que a matemática seja vista pelos alunos como algo maçante e desestimulante pelo fato de se apresentar como algo pronto e acabado, baseado na mecanização de algoritmos e na memorização de fórmulas e tabelas.

Nesse sentido, iremos analisar alguns livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, estabelecendo alguns critérios a fim de verificar de que forma o tópico de razões trigonométricas no triângulo retângulo tem sido apresentado nos livros didáticos.

Para essa análise adotamos três critérios, a saber:

- ✓ *Articulação com conceitos e conteúdos anteriores*:

Sabemos que a disciplina de Matemática possui, por natureza, um caráter cumulativo, isto é, cada passo depende de modo essencial dos anteriores. Desse modo, o aluno precisa se dá conta que a aprendizagem matemática é feita como um encadeamento de conhecimentos, onde para se aprender um novo conceito é necessário manter um elo com conhecimentos antigos, permitindo que o aluno vislumbre as conexões dos conteúdos matemáticos. Isso significa que os conteúdos não podem se apresentar de maneira isolada dos demais.

Assim, neste item, analisaremos se as razões trigonométricas são introduzidas de maneira articulada com conceitos e conteúdos matemáticos que pressupomos terem sido estudados anteriormente como, por exemplo, semelhança de triângulos.

- ✓ *Abordagem didática do conteúdo:*

Visamos com este critério examinar o modo com que o tópico de razões trigonométricas é apresentado a fim de verificar se a abordagem utilizada permite ao aluno sua participação e a construção dos conceitos estudados, ou seja, se a abordagem se diferencia da abordagem tradicional de ensino: que muitas vezes se restringe em definir um conceito de forma direta, em seguida propõem-se uma série de exemplos e exercícios de fixação.

- ✓ *Uso das novas tecnologias como ferramenta didática:*

Nossa pretensão, nesta parte, é de verificar a existência de alguma orientação ou proposta de atividade que considere o uso das novas tecnologias, sobretudo da utilização de softwares, para auxiliar na abordagem dos conceitos básicos da trigonometria no ensino fundamental.

Assim, analisamos quatro livros didáticos de Matemática do 9º ano do ensino fundamental, dentre os onze livros indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático – (PNLD) de 2017. Utilizamos apenas 4 livros, pelo fácil acesso e por serem os mais adotados pelos professores da rede pública de ensino no município de Marabá.

- ✓ **Livro 1:** CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Matemática** – 9º ano. São Paulo: SM, 2015 (Coleção Convergências).

✓	**Livro 2:** CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática nos dias de hoje**, 9º ano: na medida certa. São Paulo: Leya, 2015.
✓	**Livro 3:** DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática – ensino fundamental 2**, 2 ed., São Paulo: Ática, 2015.
✓	**Livro 4:** ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. 4 ed. renovada. **Praticando Matemática**, São Paulo: Editora Brasil, 2015. (Coleção Praticando Matemática, v.9)

Quadro 4 – Livros didáticos analisados

Fonte: Autor (2017)

Vale ressaltar que o livro 4 é utilizado pela turma que participou da aplicação da nossa sequência didática. No quadro a seguir temos de modo sintético a análise feita dos livros em relação aos critérios estabelecidos acima, conforme uma escala de mensuração que adotamos para avaliar o nível de contemplação de tais critérios.

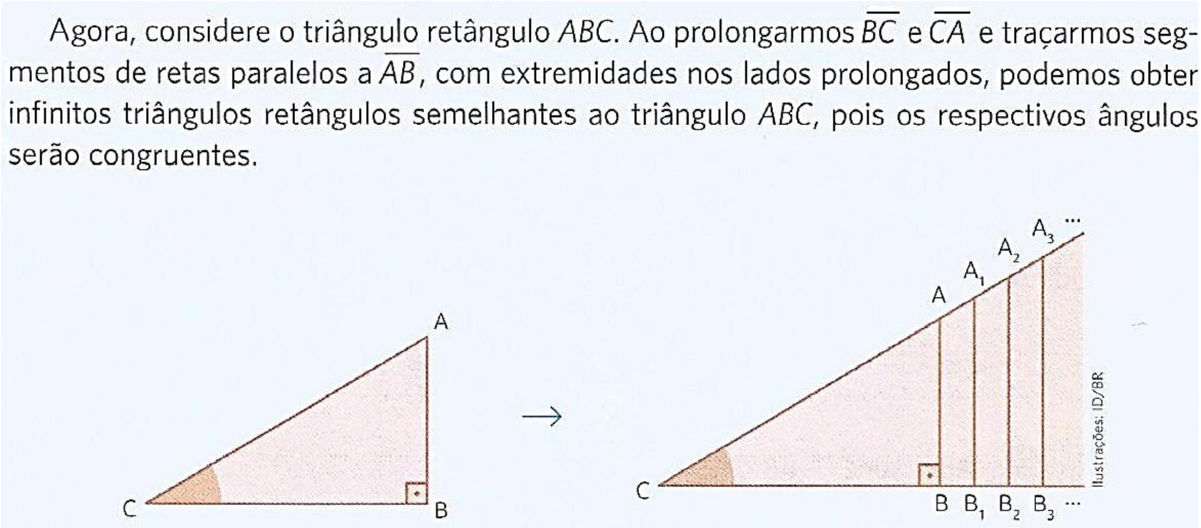
Quadro 5 – Análise dos livros didáticos conforme os critérios estabelecidos

Critérios	**Livro 1**	**Livro 2**	**Livro 3**	**Livro 4**
Articulação com conceitos e conteúdos anteriores	Sim	Sim	Sim	Sim
Abordagem didática do conteúdo	Sim	Parcial	Parcial	Parcial
Uso das novas tecnologias como ferramenta didática	Parcial	Parcial	Parcial	Parcial
Legenda – Níveis de cumprimento dos critérios definidos: Sim = Contempla totalmente; Parcial = Contempla parcialmente; Não = Não contempla.				

Fonte: Autor (2017)

Analisando o livro 1, observamos que em relação aos critérios estabelecidos o livro cumpre quase todos os pontos avaliados. Assim, ao introduzir as razões trigonométricas o autor se utiliza da semelhança de triângulos com uma abordagem interessante, pois gera uma família de triângulos semelhantes para que o conceito seja melhor compreendido, e posteriormente estabelecer as razões trigonométricas.

Figura 11: Maneira como o livro 1 introduz as razões trigonométricas


Agora, considere o triângulo retângulo ABC. Ao prolongarmos $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ e traçarmos segmentos de retas paralelos a $\overline{AB}$, com extremidades nos lados prolongados, podemos obter infinitos triângulos retângulos semelhantes ao triângulo ABC, pois os respectivos ângulos serão congruentes.

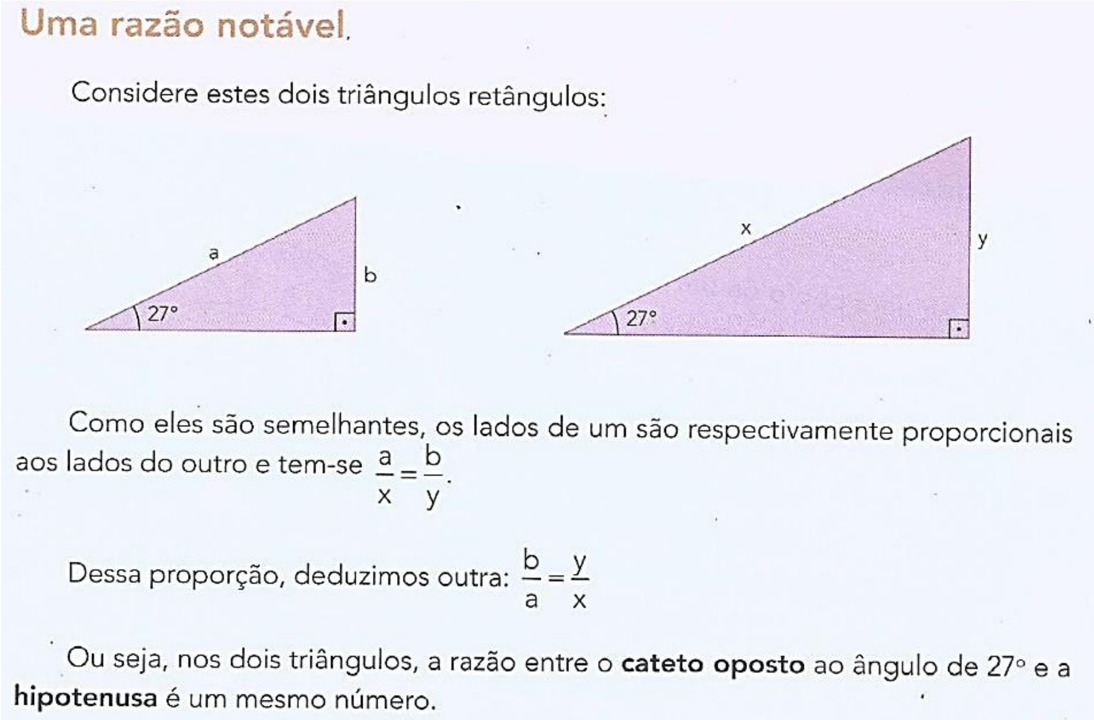
Fonte: Chavante (2015) – Referência: Vide p.63 (Quadro 4)

Quanto a abordagem didática o livro possibilita ao aluno a participação e a construção do conhecimento, isso pode ser constatado na seção “ação e construção” na qual são propostos a realização de experiências para que os alunos possam compreender os conteúdos estudados na prática.

Em relação ao uso de tecnologias, no manual do professor, é possível encontrar algumas orientações acerca da importância do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), no qual faz alusão ao uso de recursos didáticos como materiais concretos e o computador para que o professor possa se valer em sua prática pedagógica. Na seção “ferramentas”, o manual traz algumas sugestões de atividades com o uso de ferramentas tecnológicas e softwares educacionais, contudo para o ensino do conteúdo de razões trigonométricas o que encontramos foi apenas orientações de manuseio da calculadora científica para calcular seno, cosseno e tangente, bem como suas inversas.

Em relação ao livro 2, constatamos que o mesmo cumpre apenas parcialmente alguns dos itens avaliados. Assim, em relação a articulação com conteúdos anteriores verificamos que a semelhança de triângulos é utilizada para definir o conceito de seno, assim como razão e proporção, embora com uma situação bem particular visto que o autor considera apenas dois triângulos retângulos, com mesmo ângulo agudo, para relacionar a medidas de seus lados e introduzir o conceito de seno.

Figura 12: Maneira como o livro 2 introduz as razões trigonométricas



Uma razão notável

Considere estes dois triângulos retângulos:

Como eles são semelhantes, os lados de um são respectivamente proporcionais aos lados do outro e tem-se $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Dessa proporção, deduzimos outra: $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$

Ou seja, nos dois triângulos, a razão entre o **cateto oposto** ao ângulo de 27° e a **hipotenusa** é um mesmo número.

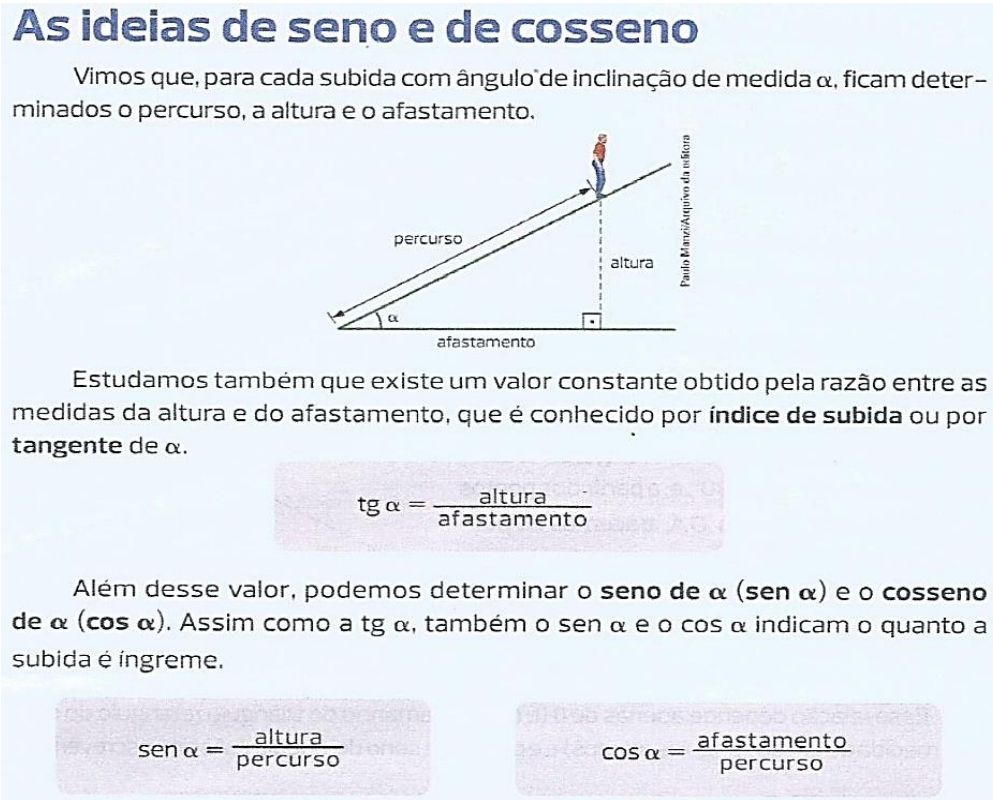
Fonte: Centurión e Jakubovic (2015) – Referência: Vide p.63 (Quadro 4)

A partir da definição de seno, o autor define as demais razões trigonométricas, porém, como já dissemos acima, de uma maneira direta, deixando subtendido que as demais são obtidas de modo análogo ao seno. Em seguida, propõe alguns exemplos e exercícios para fixar o conteúdo. Assim, entendemos que o livro acaba seguindo parcialmente o modo tradicional de introduzir o conteúdo matemático, o que pouco favorece ao aluno sua participação e a construção do conhecimento.

Quanto ao uso das novas tecnologias encontramos, na parte destinada ao professor, um texto que aborda a importância dos recursos tecnológicos no ensino de matemática com destaque para a calculadora e o computador, no qual os autores recomendam sites e, inclusive, softwares matemáticos como o GeoGebra. Na seção “Letramento Digital” os autores, ainda, chamam a atenção quanto as estratégias de uso dos objetos educacionais digitais. Embora eles afirmam que exista um Manual do Professor Multimídia no qual é possível encontrar objetos educacionais digitais a fim de auxiliar o professor para a ampliação do conhecimento, bem como a compreensão dos assuntos que o material impresso não contempla, contudo, não encontramos no livro impresso nenhuma proposta de atividade para o ensino dos conceitos básicos da trigonometria usando as novas mídias digitais. Vale ressaltar que não tivemos acesso ao material multimídia mencionado pelos autores, e por essa razão analisamos apenas o que consta no material impresso.

No livro 3, constatamos que antes de definir as razões trigonométricas o autor apresenta preliminarmente por meio de uma situação contextualizada que envolve índice de subida para introduzir a ideia de tangente e, posteriormente, de seno e cosseno. Além disso, é empregado bastante tempo com diversas atividades relacionadas a essa situação de índice de subida para introduzir as razões trigonométricas, assim sendo, entendemos que embora o autor tente contextualizar didaticamente as razões trigonométricas acaba recaindo no erro, de forma indireta, de definir diretamente o conceito das razões trigonométricas.

Figura 13: Maneira como o livro 3 introduz as razões trigonométricas



As ideias de seno e de cosseno

Vimos que, para cada subida com ângulo de inclinação de medida α, ficam determinados o percurso, a altura e o afastamento.

Estudamos também que existe um valor constante obtido pela razão entre as medidas da altura e do afastamento, que é conhecido por **índice de subida** ou por **tangente** de α.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}}$$

Além desse valor, podemos determinar o **seno de α (sen α)** e o **cosseno de α (cos α)**. Assim como a tg α, também o sen α e o cos α indicam o quanto a subida é íngreme.

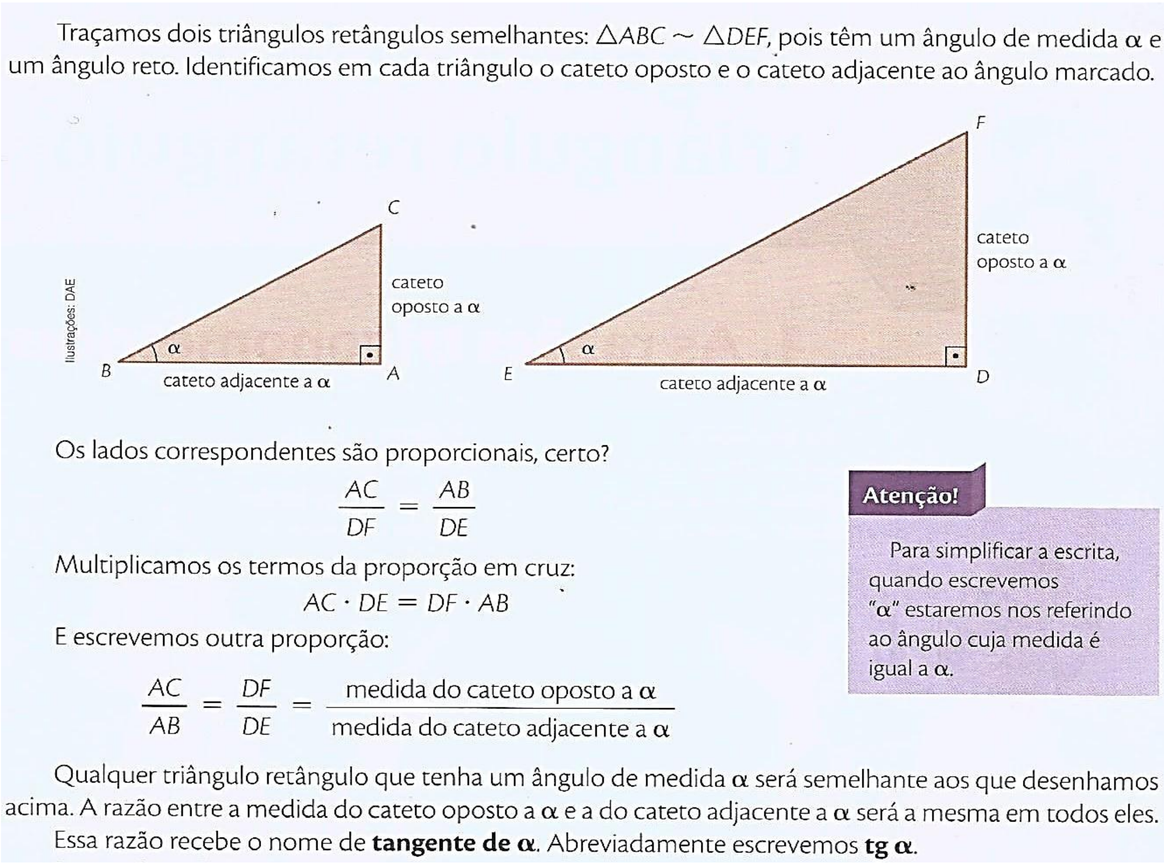
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{altura}}{\text{percurso}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}}$$

Fonte: Dante (2015) – Referência: Vide p.63 (Quadro 4)

Contudo, somente mais à frente que o autor formaliza o conceito de razões trigonométricas por meio de semelhança de triângulos, de uma maneira similar ao Livro 1. Quanto ao uso das novas tecnologias no ensino de trigonometria, não encontramos nenhuma proposta de atividade, apenas orientações superficiais relacionadas ao uso de softwares matemáticos ao final no manual do professor, além de uma nota explicativa no próprio capítulo, ao lado de uma tabela trigonométrica, sobre as teclas *sin*, *cos* e *tan* da calculadora científica que permitem obter, respectivamente, os valores de seno, cosseno e tangente de determinados ângulos.

Por fim, na análise do livro 4, observamos que o mesmo atende parcialmente aos critérios adotados. Verificamos que o livro faz uma conexão com alguns conteúdos como razão de semelhança e proporção para definir a razão trigonométrica tangente, porém com uma abordagem similar à do livro 2, envolvendo manipulação algébrica, que a nosso ver torna-se um tanto complicado para o aluno compreender o conceito a priori. Confira a figura abaixo:

Figura 14: Maneira como o livro 4 introduz as razões trigonométricas


Traçamos dois triângulos retângulos semelhantes: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, pois têm um ângulo de medida α e um ângulo reto. Identificamos em cada triângulo o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo marcado.

Os lados correspondentes são proporcionais, certo?

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$$

Multiplicamos os termos da proporção em cruz:

$$AC \cdot DE = DF \cdot AB$$

E escrevemos outra proporção:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Atenção!

Para simplificar a escrita, quando escrevemos "α" estaremos nos referindo ao ângulo cuja medida é igual a α.

Qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo de medida α será semelhante aos que desenhamos acima. A razão entre a medida do cateto oposto a α e a do cateto adjacente a α será a mesma em todos eles.

Essa razão recebe o nome de **tangente de α**. Abreviadamente escrevemos **tg α**.

Fonte: Andrini; Vasconcellos (2015) – Referência: Vide p.63 (Quadro 4)

Embora seja uma abordagem elegante de introduzir as razões trigonométrica, esse caminho pode constituir-se em obstáculo ao aluno na construção de seu conhecimento. Entretanto, um aspecto interessante, que torna um diferencial desse livro em relação aos demais analisados, é justamente a qualidade dos problemas propostos, alguns são de avaliações educacionais e de vestibulares nacionais, todos seguindo um nível gradativo de dificuldade. São quatro seções, em cada capítulo do livro, que enfatiza os problemas matemáticos: *exercícios, revisando, desafios* e *autoavaliação*. Desse modo, a nosso ver este livro é muito interessante para o cotidiano de sala de aula no que se refere à proposição de problemas.

Além disso, encontramos neste livro algumas atividades que fazem alusão ao uso da calculadora científica, porém nenhuma proposta com o uso das novas tecnologias para construir o conceito de razão trigonométrica.

Por conseguinte, pudemos constatar que os livros de 9º ano do ensino fundamental analisados seguem as recomendações das propostas oficiais de ensino no que diz respeito à conexão entre conteúdos novos e àqueles pressupostos estudados, de modo particular, no uso da semelhança de triângulos para estabelecer as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Além disso, verificamos que a abordagem adotada nos livros, referente ao conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, pouco contribui para a participação do aluno e a construção do conhecimento.

Em relação ao uso de recursos tecnológicos – softwares educacionais e outras mídias para construir os conceitos básicos da trigonometria – constatamos que, embora, todos os livros analisados ressaltem a relevância da tecnologia, e até mesmo prescrevem o uso de tais tecnologias no ensino de matemática, as orientações são muito limitadas e não apresentam nenhuma proposta efetiva ao professor para o ensino de razões trigonométricas, restringindo-se apenas no uso da calculadora científica para obter valores de seno, cosseno e tangente.

Corroborando, Santos e Silva (2016) realizaram um estudo bibliográfico cuja finalidade era justamente analisar as prescrições que os autores de livros didáticos de Matemática, do 9º ano do Ensino Fundamental, adotam para o conteúdo de Trigonometria. Para tanto, foram analisados oito livros didáticos entre os dez indicados pelo Guia do Livro Didático do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) – 2014.

As autoras verificaram que nem todas as prescrições postas no manual do professor são encontradas no livro do aluno, como é o caso do uso dos recursos tecnológicos em sala de aula, que embora sejam defendidos por todos os autores analisados, não havia no manual do aluno uma abordagem do conteúdo de Trigonometria envolvendo tais recursos, salvo o uso da calculadora, a única ferramenta tecnológica sugerida na maioria das obras.

Como vimos na seção que aborda a noção de Transposição Didática, a noosfera envolve um grande conflito de interesses que interferem substancialmente nos conteúdos, materiais e metodologias de ensino. Assim, esse jogo de interesses influencia diretamente na qualidade dos livros didáticos postos à disposição das escolas públicas, o que às vezes acaba engessando a inovação desses exemplares e, consequentemente, a criatividade ou uma abordagem diversificada na forma de apresentar os conteúdos, tendo em vista que os autores de livros não se arriscam em mudanças que fuja do padrão adotado pela maioria das editoras com receio do seu livro não ser mais indicado pelo órgãos governamentais que fazem tal seleção.

Desse modo, em relação aos livros-texto disponíveis no mercado e adotados pelas escolas, Lima (2007) salienta que:

> Milhares de exemplares são publicados anualmente, tornando ricos os autores mais adotados. Verdadeiras fortunas são envolvidas nessa indústria. Uma situação como esta, de grande competitividade e altíssimos lucros, deveria, pelas regras usuais das atividades econômicas, conduzir a uma busca pela qualidade, pelo aprimoramento do produto. Infelizmente não é bem assim. O aprimoramento concentrou-se na parte gráfica com natural e consequente elevação do preço dos livros. Mas a qualidade científica e didática, em média, não é melhor hoje do que há décadas. (LIMA, 2007, P.182)

É inquestionável a importância do livro didático como recurso em sala de aula, contudo o professor precisa tomar certos cuidados ao adotá-lo. Para tanto, ao selecionar o livro didático, o professor precisa estabelecer critérios que favoreça ao aluno o seu desenvolvimento, levando em conta os conhecimentos prévios para a construção de novos conceitos.

Portanto, embora o livro didático seja uma importante ferramenta na prática docente, é imprescindível que o professor recorra a outras fontes de conhecimento para complementar sua ação no processo de ensino. Assim, para promover um ensino capaz de levar o conhecimento matemático de modo significativo ao aluno, além de uma capacitação permanente na busca de novos conhecimentos, o professor precisa fazer escolhas adequadas de materiais e recursos didáticos para promover uma transposição didática eficiente.

6 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

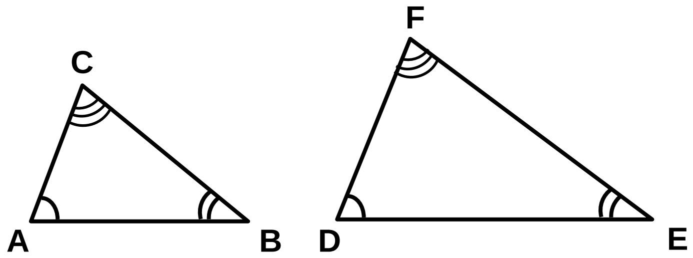
Nesta seção, apresentaremos os aspectos matemáticos com intuito de oferecer ao leitor o suporte matemático necessário para melhor compreensão do objeto de estudo e, além disso, subsidiar na elaboração das atividades da sequência didática. Assim, trataremos de três tópicos matemáticos que consideramos essenciais antes de abordar as razões trigonométricas, a saber: *semelhança de triângulo*, *teorema de Pitágoras* e as *relações métricas no triângulo retângulo*.

Cabe registrar que, para a elaboração desta seção foram consultadas as obras de Antar Neto[13] (2009); Barbosa[14] (2006); Lima[15] et al. (2005); Wagner[16] (2011); Morgado[17] et al. (2008) e Muniz Neto[18] (2012).

6.1 Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são ***semelhantes*** quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

Na figura a seguir, os triângulos *ABC* e *DEF* são semelhantes com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$.



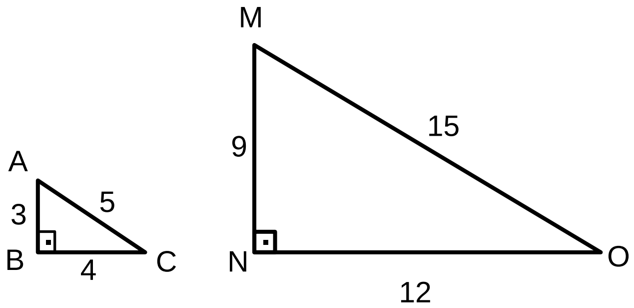
[13] ANTAR NETO, Aref, et al. **Trigonometria: 2º grau**. Noções de Matemática, v.3. Fortaleza: VesteSeller, 2009.
[14] BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática Rio de Janeiro: SBM, 2006.
[15] LIMA, E.L. et al. **Temas e Problemas Elementares**. 10 ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
[16] WAGNER, E. **Matemática 1**. Coleção FGV Universitária. Rio de Janeiro: FGV, 2011.
[17] MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; JORGE, W. **Geometria II**. 4 ed. Fortaleza: VesteSeller, 2008.
[18] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Assim, $A \equiv D$, $B \equiv E$, $C \equiv F$ e existe um $k > 0$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k$$

Tal real positivo k é denominado a ***razão de semelhança***. E, escrevemos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ para denotar que os triângulos *ABC* e *DEF* são semelhantes.

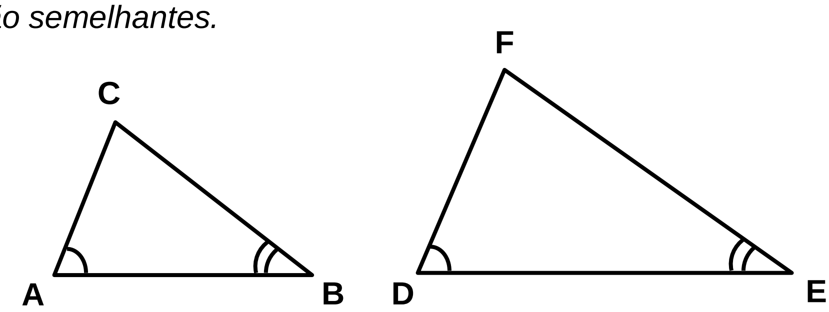
Intuitivamente falando, dois triângulos são semelhantes quando têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Isso significa que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de semelhança igual a 1, porém existem triângulos semelhantes que não são congruentes. Por exemplo, os dois triângulos retângulos abaixo são semelhantes, visto que seus ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes possuem a mesma razão.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NO}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{OM}} = \frac{1}{3}$$

Para se constatar que dois triângulos são semelhantes não é necessário que todas as condições dadas na definição sejam evidenciadas. Por conseguinte, existem alguns critérios que são conhecidos como ***casos de semelhança de triângulos*** que garantem que dois triângulos são semelhantes. Vejamos tais casos;

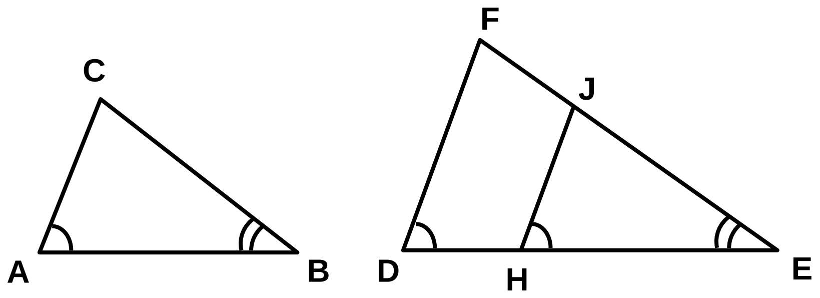
1º caso: AA (ângulo, ângulo): *Se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.*



$$\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

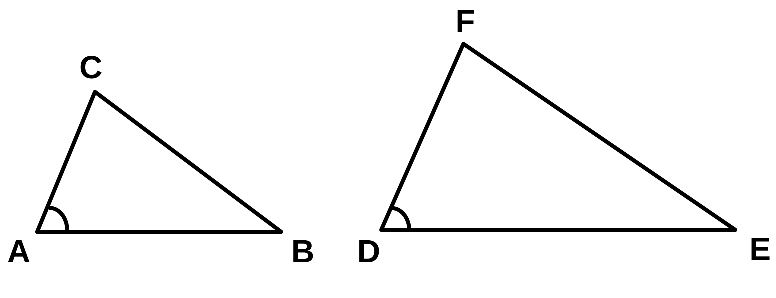
Demonstração:

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então a congruência dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ e dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ acarreta na congruência dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$. Assim, nos resta apenas mostrar que os lados correspondentes são proporcionais. Consideremos no triângulo *DEF* o segmento $\overline{HJ}$ paralelo a $\overline{DF}$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{HE}$, logo os triângulos *ABC* e *HEJ* são congruentes, já que $\hat{B} \equiv \hat{E}$, $\overline{AB} \equiv \overline{HE}$, $\hat{A} \equiv \hat{D} \equiv E\hat{H}J$.



Segue do Teorema de Tales que $\frac{\overline{HE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EF}}$. Como $\overline{HE} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{EJ} \equiv \overline{BC}$, então temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$. De modo análogo demostra-se que $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$. Sendo assim, fica demonstrado esse caso de semelhança.

2º caso: LAL (lado, ângulo, lado): *Se dois lados correspondentes de um triângulo são proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então esses triângulos são semelhantes.*

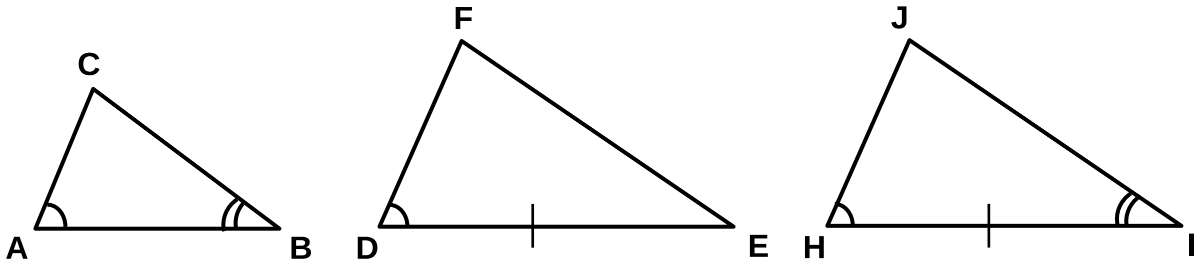


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k, \hat{A} \equiv \hat{D} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Demonstração:

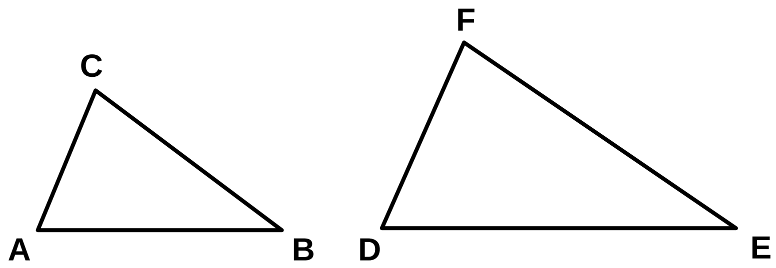
Construa um triângulo *HIJ* de modo que $\overline{HI} = \overline{DE}$, $\widehat{H} \equiv \hat{A}$ e $\hat{I} \equiv \hat{B}$. Conforme o 1º caso de semelhança (*AA*), os triângulos *ABC* e *HIJ* são semelhantes. Por conseguinte:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$$



Como $\overline{HI} = \overline{DE}$, a hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ e a igualdade acima implicam que $\overline{HJ} = \overline{DF}$. Pela construção $\overline{HI} = \overline{DE}$ e $\widehat{H} \equiv \hat{A} \equiv \widehat{D}$, podemos concluir pelos casos de congruência que os triângulos *DEF* e *HIJ* são congruentes. Como já sabíamos que *ABC* e *HIJ* eram semelhantes, podemos concluir que *ABC* e *DEF* são semelhantes.

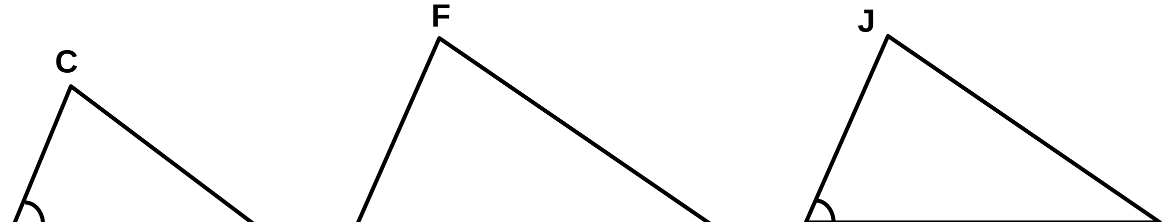
3º caso: LLL (lado, lado, lado): *Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.*

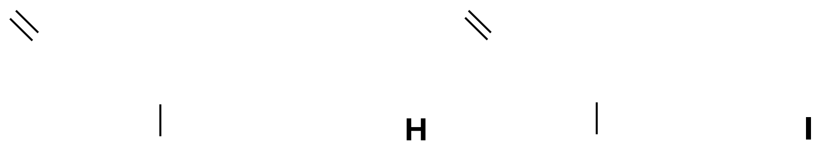


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

<u>*Demonstração:*</u>

Construa um triângulo *HIJ* que tenha $\widehat{H} \equiv \hat{A}$, $\overline{HI} = \overline{DE}$ e $\overline{HJ} = \overline{DF}$. Segue-se então da hipótese que $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Assim, conforme o 2º caso de semelhança (*LAL*) os triângulos *ABC* e *HIJ* são semelhantes.





Decorre daí, além da igualdade acima, que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}$$

Segue-se disso e da hipótese que $\overline{IJ} = \overline{EF}$. Como já tínhamos que $\overline{HI} = \overline{DE}$ e $\overline{HJ} = \overline{DF}$, então pelos casos de congruência de triângulos, *HIJ* e *DEF* são congruentes. Como *HIJ* e *ABC* são semelhantes, conclui-se que *ABC* e *DEF* são também semelhantes, o que conclui a prova desse 3º caso de semelhança.

6.2 Relações métricas no triângulo retângulo

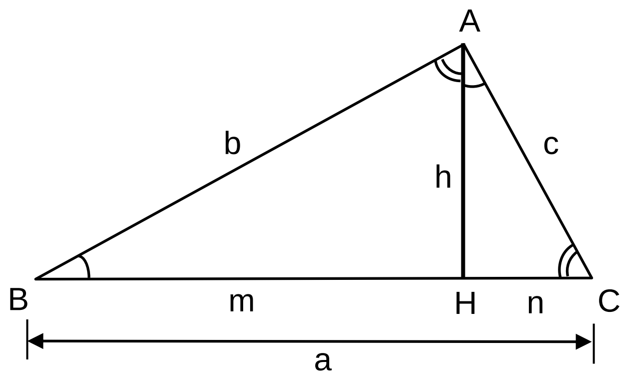
Com os casos de semelhança de triângulos estabelecidos acima, podemos demonstrar um dos mais importantes e úteis teoremas da geometria plana, o famoso ***Teorema de Pitágoras*** cujo enunciado:

"Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos".

Em termos matemáticos podemos estabelecer o teorema de Pitágoras por $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$, onde $\boldsymbol{a}$ representa a hipotenusa e $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ os catetos de determinado triângulo retângulo.

<u>*Demonstração:*</u>

Considere o triângulo ABC, com ângulo reto em A. Trace a altura $\overline{AH}$ do vértice A ao lado $\overline{BC}$. Como $\overline{AH}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, então os triângulos *AHB* e *AHC* são retângulos.



Como $\hat{B}$ + $\hat{C}$ = 90º e $\hat{B}$ + $B\hat{A}H = 90°$, então $B\hat{A}H = \hat{C}$. Do mesmo modo, $\hat{C}$ + $C\hat{A}H = 90°$, então $C\hat{A}H = \hat{B}$. Portanto, os triângulos *AHB*, *AHC* e *ABC* são semelhantes dois a dois. Logo, da semelhança dos triângulos *AHB* e *ABC* temos que;

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow \boldsymbol{b^2 = am}$$

e da semelhança dos triângulos *AHC* e *ABC* segue que;

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow \boldsymbol{c^2 = an}$$

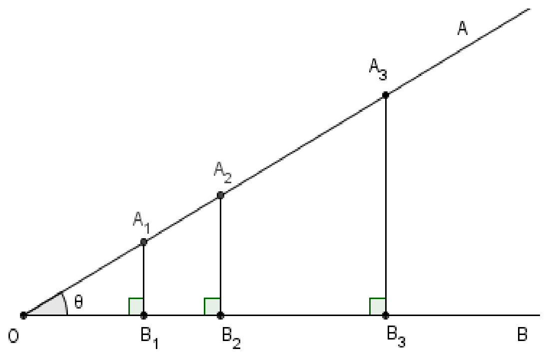
Assim, somando as duas relações $b^2 = am$ e $c^2 = an$ membro a membro, obtemos $b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a.a = a^2$. Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar.

Vale ressaltar que além das relações $\boldsymbol{b^2 = am}$ e $\boldsymbol{c^2 = an}$, usadas na demonstração do teorema de Pitágoras, podemos obter por meio da semelhança dos triângulos *AHB* e *AHC* a relação $\boldsymbol{h^2 = mn}$ e da semelhança de *AHC* e *ABC* temos que $\boldsymbol{bc = ah}$. Essas quatro relações juntamente com o teorema de Pitágoras são denominadas de *relações métricas no triângulo retângulo*.

6.3 Razões trigonométricas e algumas relações importantes

Consideremos o ângulo $A\hat{O}B = \theta$, $0° < \theta < 90°$, e tracemos, a partir dos pontos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ da semi-reta OA, segmentos perpendiculares $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, ..., $\overline{A_nB_n}$ à semi-reta OB. Assim, os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, ..., OA_nB_n, ... são semelhantes pelo caso *AA* (ângulo, ângulo), ou seja, por terem os mesmos ângulos internos. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}} = k_1$$



Observe que a constante (razão k_1) independe de qual dos triângulos retângulos estamos considerando, mas apenas do ângulo θ. Assim, em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto oposto a um ângulo e a hipotenusa será uma constante que chamaremos de ***seno***. No caso do ângulo θ, indicamos por ***sen*** $\boldsymbol{\theta}$.

Pelas mesmas considerações feitas acima, podemos escrever:

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots = \frac{\overline{OB_n}}{\overline{OA_n}} = k_2$$

Logo, em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto adjacente a um ângulo e a hipotenusa é uma constante, que independe do "tamanho" do triângulo; e a essa constante (razão k_2) damos o nome de ***cosseno***, indicada por ***cos*** $\boldsymbol{\theta}$.

E por fim, temos que:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OB_n}} = k_3$$

Analogamente, aos casos anteriores, temos que a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a um ângulo é uma constante (razão k_3) a qual chamaremos de ***tangente***, indicada por ***tg*** $\boldsymbol{\theta}$.

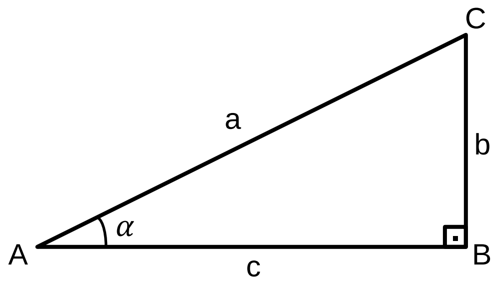
Portanto, temos definidas as chamadas ***razões trigonométricas no triângulo retângulo***.

Podemos, então, enunciar que:

- ***seno*** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.
- ***cosseno*** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

- ***tangente*** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

Assim, dado o triângulo retângulo *ABC* abaixo, temos que:



$$sen\ \alpha = \frac{b}{a}\ ; \quad cos\ \alpha = \frac{c}{a}; \quad tg\ \alpha = \frac{b}{c}$$

Além das três razões definidas acima, temos as razões inversas a elas chamadas, respectivamente, de *cossecante*, *secante* e *cotangente*.

Ângulos Notáveis de um triângulo retângulo)

Construir uma tabela com valores de senos, cossenos e tangentes dos ângulos de medidas 30º, 45º e 60º.

<u>Solução:</u>

i) Para o ângulo de 45º:

Consideremos um *triângulo retângulo isósceles ABC*, cuja hipotenusa mede ***a*** e cujos catetos medem ***b***. Pelo teorema de Pitágoras, segue que:

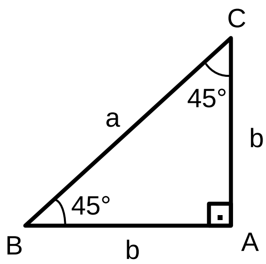
$$a^2 = b^2 + b^2 = 2b^2, logo\ a = b\sqrt{2}$$

Assim, temos:

$$sen\ 45° = \frac{b}{a} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{b}{a} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

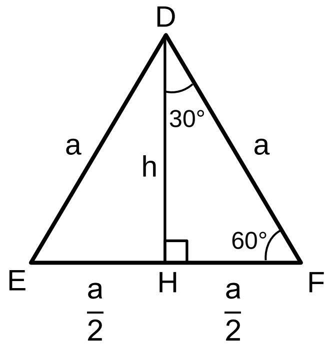
$$tg\ 45° = \frac{b}{b} = 1$$



ii) *Para os ângulos de 30º e 60º:*

Consideremos um *triângulo equilátero DEF* cujos lados medem ***a*** e cujos e cuja altura mede ***h***.

Como o triângulo *DHF* é retângulo, pelo teorema de Pitágoras, segue que:



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Longrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, para o ângulo de medida 30º, temos:

$$sen\ 30° = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} \Rightarrow sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{h}{a} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{a} \Rightarrow cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{h} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)} = \left(\frac{a}{2}\right).\left(\frac{2}{a\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E para o ângulo de medida 60°, temos:

$$sen\ 60° = \frac{h}{a} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{a} \Rightarrow sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} \Rightarrow cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = \frac{h}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)} \Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{2}{a}\right) = \sqrt{3}$$

Podemos, assim, construir a seguinte tabela:

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Aplicação contextualizada:

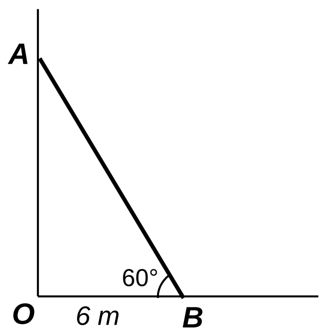
Uma escada, encostada na parede de um edifício, tem seus pés afastados a 6m deste edifício, formando assim, com o plano horizontal, um ângulo de 60º.

a) Qual o comprimento da escada?

b) A que altura está o ponto mais alto da escada?

Solução:

Consideremos a seguinte ilustração abaixo para resolvermos o problema.

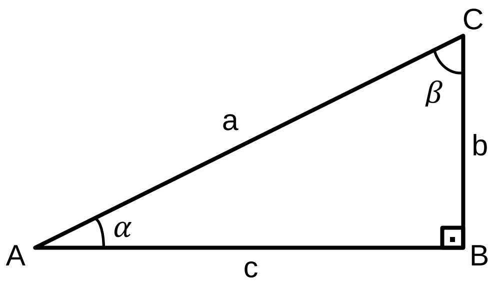


Observe que o comprimento da escada é dado pela medida do segmento $\overline{AB}$, logo usaremos a razão cosseno. Assim, $cos\,60° = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$, isto é, $cos\,60° = \frac{6}{\overline{AB}}$, consultando a tabela de ângulos notáveis, temos que $cos\,60° = \frac{1}{2}$. Logo, $\frac{1}{2} = \frac{6}{\overline{AB}}$, ou seja, $\overline{AB} = 12$. Portanto, a escala tem 12m de comprimento.

Por outro lado, para encontramos a altura que está o ponto mais alto da escada devemos determinar a medida do segmento $\overline{AO}$. Assim, usando a tangente e consultando a tabela acima, segue que: $tg\,60° = \frac{\overline{AO}}{\overline{OB}}$, isto é, $\sqrt{3} = \frac{\overline{AO}}{6}$, o que implica que, $\overline{AO} = 6\sqrt{3}$, logo, $\overline{AO} \approx 10{,}2$. Portanto, o ponto mais alto da escada está a 10,2 m em relação ao solo.

Relações importantes:

A partir das razões trigonométricas vistas acima, algumas relações surgem naturalmente, conforme veremos a seguir. Sejam α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo, de acordo com a figura abaixo:



1) Se dois ângulos α e β são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

<u>*Demonstração:*</u>

Para verificar essa afirmação, aplicaremos as definições no triângulo da figura. Note que α *e* β são complementares, ou seja, $(\alpha + \beta = 90°)$. Logo,

$$sen\,\alpha = \frac{b}{a} \;\; e \;\; \cos\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \; sen\,\alpha = \cos\beta$$

$$sen\,\beta = \frac{c}{a} \;\; e\; cos\,\alpha = \frac{c}{a} \;\Rightarrow\;\; sen\,\beta = cos\,\alpha$$

2) Se dois ângulos α e β são complementares, então $tg\,\alpha = 1/tg\,\beta$.

<u>*Demonstração:*</u>

$$Como\; tg\,\alpha = \frac{b}{c} \; e\; tg\,\beta = \frac{c}{b} \;, então\; tg\,\alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)} = \frac{1}{tg\,\beta}$$

3) Para todo ângulo α, tem-se $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ (Relação Trigonométrica Fundamental)

Demonstração:

Considerando o ângulo agudo α do triângulo retângulo *ABC* dado acima, e aplicando as definições de seno e cosseno, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a}\ \ e\ \cos\alpha = \frac{c}{a}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros das duas igualdades, tem-se:

$$sen^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2\ e\ cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Somando então essas duas últimas igualdades e aplicando teorema de Pitágoras, obtemos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Analogamente, para o ângulo β, encontramos $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$.

Em geral, para qualquer ângulo θ, tem-se: $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$.

4) ***A tangente de um ângulo é razão entre o seno e o cosseno deste ângulo:***

$$\boldsymbol{tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta}}$$

Demonstração:

A verificação dessa afirmação é imediata. Aplicando as definições das razões trigonométricas para o ângulo α, temos:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}.\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\ \alpha$$

Da mesma forma, para o ângulo β obtemos: $tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}$.

Portanto, para qualquer ângulo θ vale a relação $tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta}$.

Aplicação: *Sabendo que a tangente de um ângulo agudo α é igual a 3, determine $sen\ \alpha$ e $cos\ \alpha$.*

Solução:

Sabemos que $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$, logo, $3 = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$, o que significa que $sen\ \alpha = 3cos\ \alpha$. Substituindo na relação trigonométrica fundamental $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, obtemos $(3cos\ \alpha)^2 + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 9cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 10cos^2\alpha = 1 \Rightarrow cos^2\alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow$ $cos\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}}$. Como as razões trigonométricas de ângulos agudos são números positivos, então $cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Logo, $sen\ \alpha = 3cos\ \alpha = 3.\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Diante do exposto acima, procuramos nesta seção abordar os conteúdos matemáticos que servirão de pré-requisitos para uma melhor compreensão de nosso objeto de estudo, bem como apresentar ao leitor, em especial aos professores de matemática, uma abordagem matemática mais consistente sobre as razões trigonométricas. Assim, consideramos de grande relevância essa abordagem matemática, tendo em vista que as atividades propostas na sequência didática foram pensadas e desenvolvidas levando em consideração tais aspectos matemáticos.

7 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo discorreremos sobre a concepção e análise a *priori* da sequência didática, a experimentação, e a análise a *posteriori* e validação.

7.1 Concepção e análise a *priori*

Nesta seção, apresentaremos a sequência de atividades aplicada em nossa investigação acerca das razões trigonométricas. Vale ressaltar que a sequência didática foi concebida levando em consideração as análises prévias do nosso objeto de pesquisa: a gênese histórica, os obstáculos epistemológicos relativos ao conceito, a revisão bibliográfica, análise das propostas curriculares e dos livros didáticos.

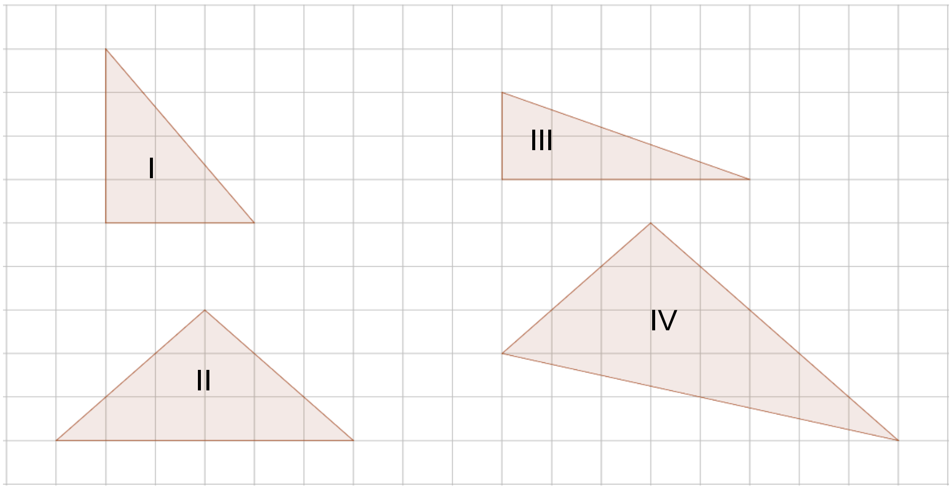
Atividade 1: O triângulo retângulo

Objetivo: Reconhecer triângulos retângulos e seus elementos.

Materiais e recursos: Folha impressa, caneta, computador e o software GeoGebra

1.1.Usando a ferramenta 

construa no GeoGebra os triângulos do quadro abaixo.



1.2. Usando a ferramenta  determine os ângulos internos de cada triângulo.

1.3. O que esses triângulos têm em comum?

1.4. Como são denominados tais triângulos em relação aos ângulos internos?

1.5. Como são chamados os lados que compõem os ângulos retos?

1.6. Como é denominado o maior lado de tais triângulos?

Análise *a priori* da atividade 1

Partindo da concepção construtivista de ensino, estamos propondo tal atividade a fim de tomarmos ciência do nível de aprendizagem da turma em relação ao assunto de triângulo retângulo, para então, a partir dos conhecimentos prévios e das especificidades desse grupo de alunos, direcionarmos nossa intervenção didática, apesar de que todas as atividades da sequência didática já estejam pré-definidas para a aplicação, porém poderemos adaptar algumas atividades à realidade da turma a fim intervir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

Assim, visamos com esta atividade diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos acerca do reconhecimento de triângulo retângulo, bem como a denominação dos lados que o compõe: catetos e hipotenusa.

Essa atividade deve ser desenvolvida individualmente. Além disso, acreditamos que a maioria dos alunos tenham conhecimento a respeito da definição de triângulo retângulo e da nomenclatura dos lados que o compõe, tendo em vista que possivelmente já estudaram a classificação de triângulos, as relações métricas no triângulo retângulo, e de modo particular o Teorema de Pitágoras.

A atividade também tem por objetivo desenvolver nos alunos habilidades como o manuseio do software GeoGebra na construção de polígonos usando a malha geométrica como referência, bem como a obtenção dos seus ângulos internos. Colocamos os triângulos retângulos em posições distintas e tamanhos variados, principalmente o triângulo IV, que se encontra disposto de uma maneira não tão comum, para fazer com que os alunos não criem hipóteses equivocadas a respeito dos elementos de um triângulo retângulo. Talvez, os alunos possam sentir algumas dificuldades ao construir o triângulo IV em função da maneira que se encontra disposto, tendo em vista que será necessário que o aluno ative algumas habilidades e competências como a capacidade de localização espacial, especialmente de pontos (vértices) no plano, mas acreditamos que os demais triângulos possam ser construídos sem maiores dificuldades.

Esperamos que todos os alunos possam concluir essa atividade compreendendo o que, de fato, é um triângulo retângulo e o nome dos lados que o forma. Portanto, a atividade proposta tem um caráter específico de revisão e consolidação de conceitos.

Ao final da atividade, faremos a socialização das respostas.

Atividade 2: Cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa

Objetivo: Identificar cateto oposto e cateto adjacente em relação a um dado ângulo, bem como a hipotenusa.

Materiais e recursos: Folha impressa, lápis e caneta

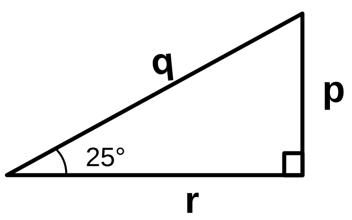
Em cada triângulo dado abaixo, informe os elementos que se pede:

a)

Hipotenusa =

Cateto oposto a 25° =

Cateto adjacente a 25° =

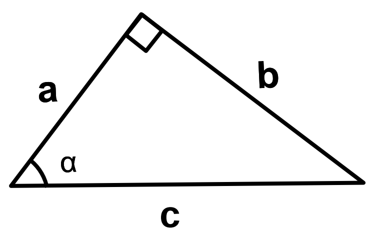


b)

Hipotenusa =

Cateto oposto a α =

Cateto adjacente a α =

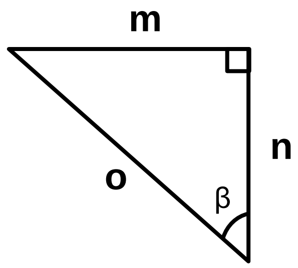


c)

Hipotenusa =

Cateto oposto a β =

Cateto adjacente a β =

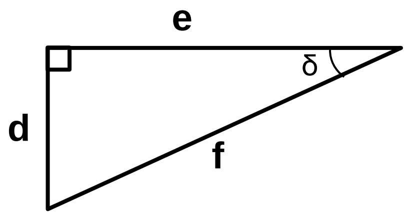


d)

Hipotenusa =

Cateto oposto a δ =

Cateto adjacente a δ =



e)

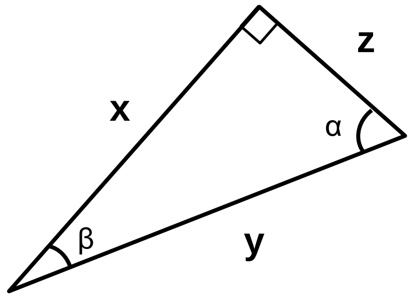
Hipotenusa =

Cateto oposto a α =

Cateto adjacente a α =

Cateto oposto a β =

Cateto adjacente a β =



Análise a priori da atividade 2

De acordo com nossas análises preliminares e a partir da nossa experiência como docente do ensino fundamental, muitos erros cometidos pelos alunos ao resolver questões envolvendo razões trigonométricas se deve ao fato deles não saberem diferenciar cateto oposto de adjacente, o que naturalmente acarreta numa escolha equivocada de alguma das razões trigonométricas.

Vimos nos itens das devolutivas da Prova Brasil que os estudantes frequentemente se confundem sobre qual o lado do triângulo é o "oposto" e qual é o "adjacente". Mota et al. (2013, p.14) também enfatiza que

> A causa dos erros dos alunos referentes às relações trigonométricas no triângulo retângulo está relacionada, sobretudo, a falta de compreensão na definição e identificação dos elementos de um triângulo retângulo.

Além disso, Gomes (2013) nas considerações finais de sua dissertação, sugere, diante das dificuldades surgidas no processo de ensino das relações trigonométricas em sua pesquisa, a aplicação de uma atividade preliminar acerca dos elementos de um triângulo retângulo, pois tal atividade seja mais proveitosa antes de iniciar o conjunto de atividades desenvolvido pela pesquisadora, nas quais se baseamos para elaborar algumas das nossas atividades.

Outro aspecto que levamos em consideração para a elaboração desta atividade, inspirado em uma atividade de Oliveira (2006), foi o fato de apresentarmos os triângulos retângulos em posições variadas e com tamanhos e formas distintas, pois geralmente o ângulo reto dos triângulos retângulos aparece frequentemente na interseção da vertical com a horizontal.

Obviamente que ao propor essa atividade os alunos precisam ter noção do que seja cateto oposto e cateto adjacente em relação a um determinado ângulo agudo de um triângulo retângulo, assim, essa ideia será dada previamente pelo professor antes do início da atividade.

É provável que muitos alunos cometam alguns erros, visto que o quadro teórico e epistemológico do assunto em questão é desfavorável. Entretanto esperamos que tal atividade favoreça a identificação dos elementos: hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente, tendo em vista que será fundamental esse entendimento para a realização das atividades posteriores.

Ao final da atividade faremos a socialização de cada item. Vale ressaltar que esta atividade será a única em que os alunos não farão uso do computador.

Atividade 3: O seno

Objetivo: Institucionalizar o conceito de seno

Materiais e recursos: Computador, software GeoGebra, lápis, caneta e calculadora

Procedimentos:

Considerando o triângulo retângulo construído no GeoGebra:

a) Escolha uma medida para o ângulo α.

b) Mantendo o ângulo α fixo, mova o controle deslizante **c** e obtenha sete triângulos retângulos com tamanhos diferentes e preencha o quadro abaixo.
(*Obs: Considere apenas 4 casas decimais no resultado*)

Triângulo *ABC*	**Ângulo α**	**Cateto oposto ao ângulo α (C.O.)**	**(Hipotenusa) (h)**	$\frac{\mathbf{C.O.}}{\mathbf{h}}$
Triângulo 1				
Triângulo 2				

Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				
Triângulo 6				
Triângulo 7				

c) Você verificou alguma regularidade nos valores da razão $\frac{\mathbf{c.o.}}{\mathbf{h}}$? Justifique sua resposta.

d) A razão $\frac{\mathbf{c.o.}}{\mathbf{h.}}$ depende do tamanho dos triângulos? Justifique sua resposta.

e) Ao modificar o ângulo α, a razão entre o *cateto oposto* e a *hipotenusa* se altera? Justifique.

f) A que conclusão podemos chegar acerca da razão entre o *cateto oposto* e a *hipotenusa*?

Análise *a priori* da atividade 3

Vimos no levantamento bibliográfico que o ensino de trigonometria, assim como a transposição didática dos livros didáticos de 9º ano do ensino fundamental, em geral, não tem privilegiado a construção de conceitos.

De acordo com Nacarato et al. (2001), a Trigonometria tem sido apresentada com uma abordagem mais voltada à prática da realização de exercícios do que a elaboração conceitual. Além disso, Mendes e Rocha (2010) salientam que a tendência do ensino de trigonometria, neste início de século XXI, é semelhante à do final do século passado – sem haver um resgate da geometria para demonstrar as relações trigonométricas e por valorizar mais os procedimentos do que a própria construção dos conceitos, o resgate histórico e sua aplicabilidade – aspectos que dariam mais significado ao conteúdo.

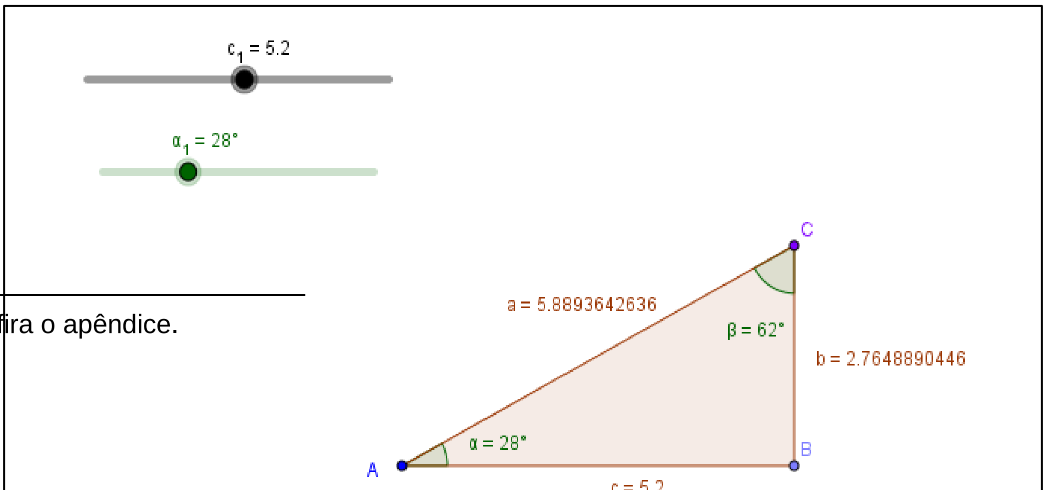
Pensamos em elaborar atividades que pudessem privilegiar a construção de conceitos, especialmente das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Assim, procuramos seguir as recomendações das propostas curriculares as quais sugerem que as razões trigonométricas sejam estabelecidas através da semelhança de triângulos. Inclusive, a BNCC sugere utilizar a noção de semelhança para compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo, suas relações em triângulos quaisquer e aplicá-las em situações como o cálculo de medidas inacessíveis, entre outras. (BRASIL, 2016)

Neste sentido, visamos com essa atividade trabalhar a construção do conceito da razão trigonométrica *seno*. Para tanto, se apoiamos na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brausseau, na noção de Transposição Didática e nas novas tecnologias educacionais, sobretudo com o uso do software GeoGebra.

A priori apresentaremos uma situação problema, em que o conteúdo necessário para solucioná-la são as razões trigonométricas, de modo especial o *seno*. Acreditamos que ao modelar geometricamente a situação, os alunos possam identificar um triângulo retângulo com um determinado ângulo agudo e a medida de um dos lados dada. Supondo que eles já tenham estudado o Teorema de Pitágoras, nas fases de ação e formulação na situação adidática eles perceberão que o teorema não é suficiente para resolver tal situação. Neste momento, vamos sugerir que façam a atividade 3, a fim de construir o conceito de seno, para posteriormente servir como ferramenta para solucionar a situação proposta.

Para a realização dessa atividade o aluno deverá, a princípio usando o GeoGebra, fazer uma construção geométrica de um triângulo retângulo dinâmico, semelhante ao da figura abaixo. Assim, será dado ao aluno uma guia[19] de construção em folha impressa, com todos os passos, para que ele possa construir o triângulo.

Figura 15 – Construção do triângulo retângulo dinâmico



19 Confira o apêndice.

Fonte: Autor (2017)

Feita a construção geométrica – a fim de obter uma precisão nos resultados e evitar alguns imprevistos, uma vez que o GeoGebra apresenta algumas limitações na exatidão dos resultados por conta dos arredondamentos – solicitaremos aos alunos antes de darem início a atividade, que recorram a guia “opções” do menu principal, depois na guia “arredondamento” e selecionem a opção “10 casas decimais”. E quando forem registrar no quadro de respostas, considerem apenas 4 casas decimais.

Feito esses procedimentos os alunos poderão dar início de fato a atividade 3 de maneira quase que independente, tendo em vista que se trata de uma situação adidática. Neste caso, a atividade será desenvolvida em duplas para que os alunos interajam entre si e que a atividade flua com mais eficiência.

Ao colocar a “mão na massa” os alunos, de posse da atividade impressa deverão, a princípio, escolher um valor para o ângulo agudo α do triângulo retângulo construído para que se obtenha sete triângulos retângulos com tamanhos variados, com o ângulo α fixo, e assim preencher o quadro na folha de atividades. Dessa forma, as duplas deverão em cada triângulo identificar o cateto oposto ao ângulo α, bem como sua hipotenusa. Em seguida, deverá encontrar a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de cada triângulo. Para essa parte de obtenção dos valores dessas razões, permitiremos o uso de calculadoras para agilizar as contas, tendo em vista que o propósito da atividade é construir o conceito de seno.

A ideia de deixar o aluno escolher a medida do ângulo é justamente para evitar que o mesmo ache que os valores das razões foram manipulados (forçados), e assim observe por conta própria que as conclusões são válidas independentemente do ângulo agudo tomado.

Após preencher todo o quadro esperamos que os alunos possam observar que todos os valores da última coluna do quadro são iguais, ou seja, que a razão $\frac{\mathbf{C.O.}}{\mathbf{h}}$ é uma constante que independe do “tamanho” dos triângulos, isto é, das medidas dos lados, quando a medida de α é a mesma. Este momento será oportuno para recapitularmos o conteúdo de semelhança de triângulos, tendo em vista que a razão $\frac{\mathbf{C.O.}}{\mathbf{h}}$ é igual para todos os triângulos retângulos com α fixo, em função de serem semelhantes. Isso significa que estamos construindo com o aluno o conceito de seno, valendo-se sutilmente da semelhança de triângulos.

Contudo, ao modificar a medida do ângulo α, espera-se que os alunos possam notar que o valor da razão $\frac{\mathbf{C.O.}}{\mathbf{h}}$ se modifica em relação ao valor obtido anteriormente. Portanto, ao final da atividade esperamos que os alunos possam chegar à seguinte conclusão: “Em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto oposto a um ângulo agudo α e sua hipotenusa será uma constante (seno) que independe de qual dos triângulos retângulos estamos considerando, mas apenas do ângulo α”.

Ao final da atividade, haverá a socialização das atividades entre alunos e professor para validar as respostas. E, obviamente, será institucionalizada a razão trigonométrica *seno*.

Além disso, será apresentada uma tabela de senos para que os alunos, certifiquem-se de que encontraram o seno corretamente do ângulo escolhido. Em seguida, retomaremos a situação problema proposta inicialmente para que solucionem usando o novo conhecimento adquirido.

Atividade 4: O cosseno

Objetivo: Institucionalizar o conceito de cosseno

Materiais e recursos: Computador, software GeoGebra, lápis, caneta e calculadora

Procedimentos:

Considerando o triângulo retângulo construído no GeoGebra:

a) Escolha uma medida para o ângulo α.

b) Mantendo o ângulo α fixo, mova o controle deslizante **c** e obtenha sete triângulos retângulos com tamanhos diferentes e preencha o quadro abaixo.
(Obs: Considere apenas 4 casas decimais no resultado)

Triângulo *ABC*	**Ângulo α**	**Cateto adjacente ao ângulo α (C.A.)**	**(Hipotenusa) (h)**	$\frac{\mathbf{C.A.}}{\mathbf{h}}$
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				
Triângulo 6				
Triângulo 7				

c) Você verificou alguma regularidade nos valores da razão $\frac{\mathbf{C.A.}}{\mathbf{h}}$? Justifique sua resposta.

d) A razão $\frac{\mathbf{C.A.}}{\mathbf{h.}}$ depende do tamanho dos triângulos? Justifique sua resposta.

e) Ao modificar o ângulo α, a razão entre o *cateto adjacente* e a *hipotenusa* se altera? Justifique.

f) A que conclusão podemos chegar acerca da razão entre o *cateto adjacente* e a *hipotenusa*?

Atividade 5: A tangente

Objetivo: Institucionalizar o conceito de tangente

Materiais e recursos: Computador, software GeoGebra, lápis, caneta e calculadora

Procedimentos:

Considerando o triângulo retângulo construído no GeoGebra:

a) Escolha uma medida para o ângulo α.

b) Mantendo o ângulo α fixo, mova o controle deslizante **c** e obtenha sete triângulos retângulos com tamanhos diferentes e preencha o quadro abaixo.
(Obs: Considere apenas 4 casas decimais no resultado)

Triângulo *ABC*	Ângulo α	Cateto oposto ao ângulo α (C.O.)	Cateto adjacente ao ângulo α (C.A.)	$\frac{\text{C. O.}}{\text{C. A.}}$
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				
Triângulo 6				
Triângulo 7				

c) Você verificou alguma regularidade nos valores da razão $\frac{\text{C.O.}}{\text{C.A}}$? Justifique sua resposta.

d) A razão $\frac{\text{C.O.}}{\text{C.A}}$ depende do tamanho dos triângulos? Justifique sua resposta.

e) Ao modificar o ângulo α, a razão entre o *cateto oposto* e o *cateto adjacente* se altera? Justifique.

f) A que conclusão podemos chegar acerca da razão entre o *cateto oposto* e o *cateto adjacente*?

Análise *a priori* das atividades 4 e 5

Conforme podemos observar as atividades 4 e 5 são semelhantes à atividade 3. Assim, a análise a priori da atividade 3 se aplica a essas duas atividades.

O que podemos acrescentar é que, uma vez realizada a atividade 3, acreditamos que as duplas terão menos dificuldades para executar as duas outras atividades.

Diferentemente do encontro 3, não iniciaremos com uma situação problema, e sim propondo diretamente as atividades 4 e 5. Procederemos da seguinte maneira, as duplas receberão, como de praxe, a folha impressa da atividade, neste caso primeiro a atividade 4, e à medida que forem terminando faremos a entrega da atividade 5.

A atividade 4 tem por objetivo subsidiar a construção do conceito de cosseno. Desse modo, esperamos que no item (**f**), no qual se faz uma conclusão geral da atividade, os alunos possam obter conclusões próximas à seguinte observação: “Em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto adjacente a um ângulo agudo α e sua hipotenusa será uma constante (cosseno) que independe de qual dos triângulos retângulos estamos considerando, mas apenas do ângulo α”.

Analogamente, para atividade 5: “Em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a um ângulo agudo α será uma constante (tangente) que independe de qual dos triângulos retângulos estamos considerando, mas apenas do ângulo α”.

Ao final de ambas atividades, o professor/pesquisador promoverá a socialização das atividades fazendo a institucionalização das razões trigonométricas *cosseno* e *tangente*, respectivamente.

Em seguida será proposta a situação problema 2, na qual os alunos deverão agora usar uma das razões trigonométricas estudadas.

Observação:
As atividades 3, 4 e 5 desta sequência didática foram inspiradas em algumas atividades desenvolvidas nos trabalhos de GOMES (2013), bem como NASCIMENTO e SÁ (2014).

7.2 Experimentação

Nesta seção, descrevemos acerca da escola e os sujeitos da pesquisa, o cronograma da experimentação, bem como a familiarização dos alunos com o software GeoGebra e a aplicação da sequência didática.

7.2.1 A escola e os sujeitos da pesquisa

Nossa pesquisa foi realizada na Escola Municipal de Ensino Fundamental Oneide de Souza Tavares, localizada na zona urbana do município de Marabá, no Estado do Pará. Vale ressaltar que o prédio da escola é compartilhado com a rede estadual de ensino, atendendo, assim também, alunos do Ensino Médio.

Contudo, se reportando apenas ao ensino fundamental, que é de responsabilidade do munícipio, a escola oferece turmas de 6º ao 9º ano, nos períodos matutino e vespertino – sendo 6 turmas pela manhã e 8 à tarde. Conforme dados fornecidos pela secretaria da escola, são 231 alunos matriculados no período matutino e 257 no vespertino.

Nosso primeiro contato com a escola se deu no início do mês de outubro, precisamente no dia 5, onde na ocasião conversamos com a equipe gestora e pedagógica para apresentar nossa proposta de pesquisa e solicitar a autorização para realizarmos nosso estudo com os alunos do referido estabelecimento de ensino.

Assim, apresentamos os propósitos da pesquisa, bem como a sequência didática para ser apreciada pela equipe pedagógica, a qual reconhecendo a importância e a seriedade de nosso trabalho, gentilmente autorizou nossa intervenção didática, se prontificando a nos prestar todo o apoio necessário.

A pesquisa experimental foi desenvolvida inteiramente no laboratório de informática. Os sujeitos da pesquisa eram alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma turma do turno matutino, com faixa etária de 13 a 15 anos.

Foram selecionados aleatoriamente 15 alunos para participar da experimentação. O motivo dessa pequena amostra se deu pela limitação do espaço físico do laboratório de informática, visto que não comportaria toda a turma – composta por cerca de 36 alunos. Não houve nenhum critério para a escolha dos alunos participantes, o que a nosso ver foi fundamental, pois proporcionou a constituição de um grupo de alunos bastante heterogêneo em relação ao nível de aprendizagem.

Cabe registrar que, enquanto realizávamos a experimentação com os alunos participantes, os demais tinham aula normalmente em sala de aula com a professora de matemática, a qual gentilmente concordou em ceder parte de sua turma, dando-nos o apoio necessário. Também contamos com apoio da professora responsável pelo laboratório de informática da escola, a qual nos prestou todo o apoio necessário na organização dos alunos e do suporte técnico necessário.

Além disso, para o desenvolvimento das atividades propostas da sequência didática, dispomos de um datashow conectado ao computador com o software GeoGebra instalado para nos auxiliar na exposição das ferramentas do software, bem como uma lousa para fazermos os registros escritos de algumas atividades e a institucionalização dos conceitos trabalhados.

7.2.2 A aplicação da sequência didática

A aplicação da sequência didática ocorreu durante os horários das aulas de matemática da referida turma, a partir do dia 30 de outubro até o dia 10 de novembro de 2017. Foram aplicadas 5 (cinco) atividades que demandaram 4 encontros (sessões), com um total de 11 aulas, sendo cada aula de 45 minutos de duração. Optamos por essa quantidade de aulas a fim de mantermos uma coerência em relação ao tempo que geralmente é empregado para ministrar o tópico de razões trigonométricas no 9º ano do ensino fundamental.

No quadro abaixo, temos o cronograma das atividades desenvolvidas em cada sessão (encontro), bem como a quantidade de aulas por sessão e a descrição das atividades realizadas em cada dia.

Sessões/ aulas	Data	Descrição
Sessão 1 (3 aulas)	30/10/2017	Apresentação Introdução ao software GeoGebra
Sessão 2 (2 aulas)	03/11/2017	**Atividade 1:** O triângulo retângulo **Atividade 2:** Cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa
Sessão 3 (3 aulas)	06/11/2017	Guia de construção do triângulo retângulo dinâmico **Atividade 3:** A razão trigonométrica *seno*
Sessão 4 (3 aulas)	10/11/2017	**Atividade 4:** A razão trigonométrica *cosseno* **Atividade 5:** A razão trigonométrica *tangente* Calculadora trigonométrica

Quadro 6 – Cronograma da experimentação

Fonte: Autor (2017)

7.2.3 Familiarização com o software GeoGebra

O 1º encontro demandou três aulas e consistiu na apresentação do trabalho que seria desenvolvido com os sujeitos da pesquisa (alunos), bem como todos os esclarecimentos necessários. Assim, foram elencados os objetivos, o cronograma e os procedimentos metodológicos e avaliativos que seriam adotados durante a aplicação da sequência de ensino.

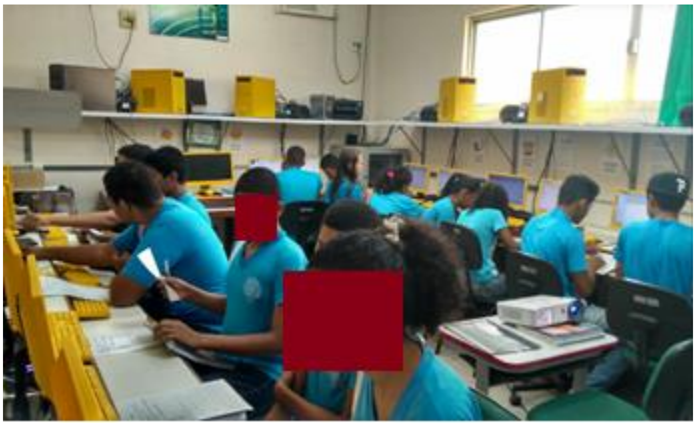
Após fazermos os esclarecimentos necessários para a realização das atividades, realizamos um trabalho de apresentação do software GeoGebra aos alunos. Foi apresentada a interface do referido software e suas principais áreas. Em seguida, cada aluno utilizou um computador para realizar 3 atividades propostas pelo professor/pesquisador, as quais tinham por objetivo familiarizá-los com os principais comandos e ferramentas do GeoGebra e, ao mesmo tempo, relembrar objetos e conceitos elementares da geometria plana.

Quadro 7 – Atividades de familiarização com o software GeoGebra

- **Atividade I:** *Construir um triângulo qualquer, em seguida determinar as medidas dos ângulos internos e dos lados.*
  Ferramentas: Segmento de reta e ângulo.
- **Atividade II:** *Construir duas retas perpendiculares e determinar seus ângulos.*
  Ferramentas: Reta e ângulo.
- **Atividade III:** *Construir um quadrado a partir de um segmento de reta.*
  Ferramentas: Segmento de reta, retas perpendiculares, círculo, ponto de interseção, retas paralelas, esconder objeto.

Fonte: Autor (2017)

Figura 16 – Alunos realizando uma das atividades no laboratório de informática



Fonte: Autor (2017)

Percebemos que os alunos reagiram bem às atividades propostas e não sentiram grandes dificuldades para executá-las. Além do auxílio do professor/pesquisador, os alunos que terminavam as atividades propostas iam ajudando os demais colegas. Cabe registrar que, ao final da aula, alguns alunos relataram, espontaneamente, que gostaram de utilizar o software GeoGebra para realizar as atividades solicitadas.

Contudo, somente a partir dessa familiarização com o GeoGebra, foi que demos início de fato a aplicação da sequência didática propriamente dita, tendo em vista que das 5 atividades propostas da sequência didática apenas uma não faria uso direto do referido software, assim era de extrema relevância fazer esse trabalho preliminar com os alunos a fim de prevenir dificuldades futuras.

Com exceção desse domínio básico das ferramentas do software GeoGebra, não exigimos aos alunos nenhum pré-requisito em termos de conteúdo matemático para realizar as atividades propostas, embora o conhecimento de alguns conteúdos fosse necessário para responder algumas perguntas da primeira atividade, mas nada que os impedissem de aprender e/ou construir os conceitos das razões trigonométricas.

Vale ressaltar também os procedimentos metodológicos e avaliativos adotados na aplicação das atividades:

- Com exceção das atividades 1 e 2, que foram desenvolvidas individualmente, todas as demais foram realizadas em duplas, justamente para proporcionar uma melhor interação e troca de conhecimentos entre os alunos;
- Foram distribuídas a cada aluno as atividades em folhas impressas, as quais deveriam ser respondidas e entregues ao professor/pesquisador;
- O professor/pesquisador orientou e mediou as atividades, tirando dúvidas na falta de compreensão dos enunciados e procedimentos referentes as atividades, bem como no uso das ferramentas e comandos do GeoGebra;
- Ao final de cada atividade o professor/pesquisador promoveu a socialização das respostas entre os alunos e, posteriormente, a institucionalização dos conceitos envolvidos nas atividades.

Cabe registrar que, a fim de preservar a identidade dos 15 alunos que participaram da pesquisa, utilizamos a nomenclatura A1, A2, A3, ..., A15 para se referir aos registros dos seus protocolos.

7.3 Análise a *posteriori* e validação

Nesta seção, iremos descrever o que efetivamente ocorreu durante a aplicação da sequência didática, bem como apresentaremos nossas análises em relação a cada atividade aplicada para validá-las ou não.

Análise *a posteriori* da atividade 1

Os itens 1.1 e 1.2 da atividade são imprescindíveis para responder aos demais.

Desse modo, no item 1.1 os alunos tinham que construir, usando o GeoGebra, 4 triângulos retângulos, conforme a figura que constava na atividade impressa entregue a cada um deles.

Observamos que, mesmo com o auxílio da malha quadriculada, alguns alunos colocaram os vértices em posições erradas, não formando corretamente os triângulos retângulos da atividade. Porém, quando detectávamos que algo estava incompatível com as construções que de fato deveriam realizar, fazíamos as intervenções necessárias sem dar a resposta diretamente, a fim de que refletissem e corrigissem o que estava errado em relação as suas construções.

Conforme já prevíamos, os alunos apresentaram pequenas dificuldades para realizar a atividade. Apenas na construção do triângulo IV, devido sua disposição na malha geométrica, que alguns alunos tiveram dificuldades, porém todos conseguiram realizar a tarefa com êxito.

Uma vez construídos os triângulos retângulos, os alunos deveriam, conforme solicitava o item 1.2, determinar os ângulos internos de cada triângulo, usando a ferramenta “ângulo” do GeoGebra. Notamos que pouquíssimos alunos tiveram dificuldades para realizar essa tarefa, visto que já tínhamos proposto nas atividades de familiarização com o uso do GeoGebra uma tarefa similar para encontrar ângulos internos de triângulos. Isso mostra que as atividades de familiarização foram essenciais para minimizar dificuldades nas atividades da sequência didática.

No entanto, presenciamos alguns alunos determinando os ângulos externos ao invés dos internos, isso porque estavam selecionando os vértices no sentido anti-horário, e não no horário que seria o modo correto, mas logo faziam a correção, recordando da atividade de familiarização com o software ou nos chamavam para tirar dúvidas sobre o impasse.

Constatamos que, mesmo com algumas dificuldades, até esse ponto todos os alunos conseguiram realizar a tarefa muito bem. Contudo, nos itens finais tiveram um rendimento insatisfatório, conforme nos mostra o quadro a seguir:

Quadro 8 – Mapa de frequência e desempenho da atividade 1

Aluno	Freq.	Itens da atividade					
		1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
A1	F						
A2	P	C	C	C		E	E
A3	P	C	C	C	E	E	
A4	P	C	C	C		E	E
A5	P	C	C	C	E		
A6	P	C	C	C			
A7	P	C	C	C			E
A8	P	C	C	E			
A9	P	C	C	C			E
A10	P	C	C	C	E	E	E
A11	P	C	C	C	E	E	E
A12	P	C	C	E			
A13	P	C	C	E	E		
A14	P	C	C	C	E	E	
A15	P	C	C	C			E

Legenda:
F = Faltou   P = Presente   C = Resposta correta   E = Resposta errada

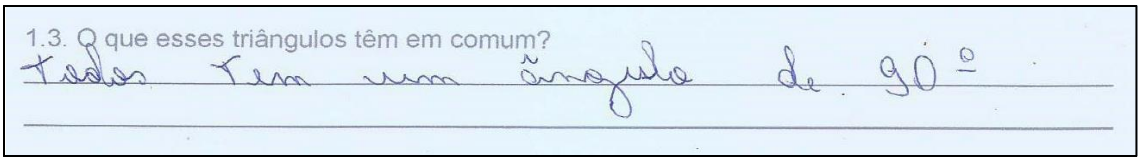
Fonte: Autor (2017)

Cabe esclarecer que as lacunas vazias significam que o aluno não respondeu ao item. No mais, acreditamos que o quadro permite obtermos uma visão geral do desempenho dos alunos nesta atividade.

Observe que a maioria dos alunos que realizaram a atividade, cerca de 78%, acertou ao item 1.3, no qual os alunos deveriam responder o que os triângulos construídos tinham em comum, cuja resposta esperada era de que todos os triângulos tinham um ângulo reto, ou seja, com medida de 90º.

Embora tenhamos falado de ângulo reto nas atividades de familiarização com o GeoGebra, quando trabalhamos uma atividade referente as retas perpendiculares, não obtemos nenhuma resposta mencionando ângulo reto, e sim 90º – o que não está errado. Dessa forma, todos os alunos que acertaram a esse item apresentaram respostas parecidas a do aluno A4, conforme o registro abaixo.

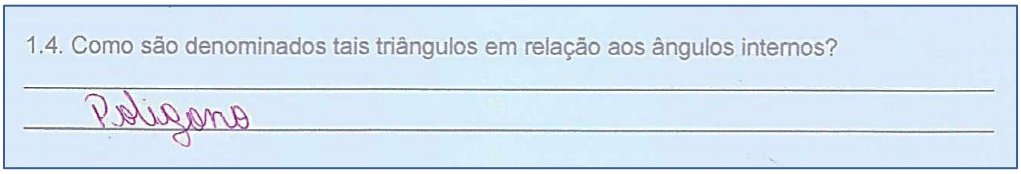
Figura 17: Registro do aluno A4 para o item 1.3 da atividade 1


1.3. O que esses triângulos têm em comum?
Todos tem um ângulo de 90º

Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

Por outro lado, nos itens seguintes, os alunos não foram tão bem, visto que a maioria errou ou deixou em branco. O item 1.4, por exemplo, questionava sobre o nome que se dava aos triângulos construídos na atividade segundo os ângulos internos. Naturalmente, esperávamos que os alunos pudessem responder que se tratavam de triângulos retângulos, porém não obtivemos nenhuma resposta neste sentido. Constatamos ainda que três alunos, puseram como resposta “polígonos”, conforme a figura a seguir, talvez por conta da ferramenta “polígonos” do GeoGebra utilizada para construir tais triângulos.

Figura 18 – Registro do aluno A3 para o item 1.4 da atividade 1

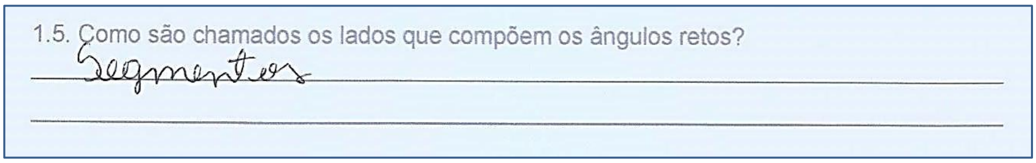

1.4. Como são denominados tais triângulos em relação aos ângulos internos?
Polígono

Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

No item seguinte, o 1.5, os alunos eram indagados sobre como são chamados os lados que formam os ângulos retos dos triângulos. Como imaginávamos que eles já tivessem tido algum contato prévio com o teorema de Pitágoras, esperávamos que pudessem dar como resposta que tais lados são denominados de catetos.

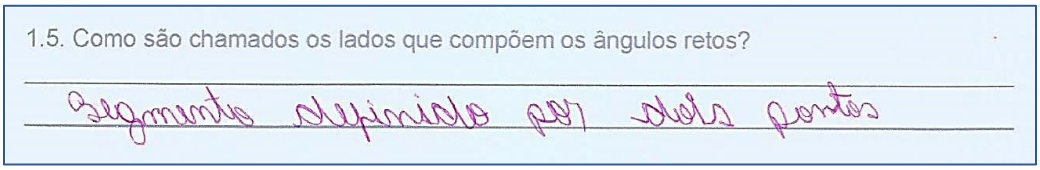
Embora a maioria não tenha respondido a esse item, pudemos verificar que algumas respostas, mesmo não sendo as esperadas faziam, de algum modo, sentido. Conforme as respostas dos alunos A10 e A3 a seguir:

Figura 19 – Registro do aluno A10 para o item 1.5 da atividade 1


1.5. Como são chamados os lados que compõem os ângulos retos?
Segmentos

Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

Figura 20 – Registro do aluno A3 para o item 1.5 da atividade 1


1.5. Como são chamados os lados que compõem os ângulos retos?
Segmento definido por dois pontos

Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

Analisando as respostas dadas do ponto de vista matemático, estão corretas; mas no contexto da situação trabalhada não era a resposta apropriada. Acreditamos que as respostas dadas por ambos alunos, devem-se ao fato da ferramenta “segmento definido por dois pontos” ter sido utilizada nas atividades preliminares de familiarização do GeoGebra, e que aparecia na versão do software usado por eles.

Por fim, o último item da atividade, o 1.6, questionava: como é denominado o maior lado de tais triângulos?

Também, as respostas não foram satisfatórias, uma vez que esperávamos como resposta “hipotenusa”. No entanto, 50% não respondeu, e os que responderam curiosamente deram como resposta “ângulo reto” ou ângulo de 90º. Provavelmente, associaram a pergunta ao nome do maior ângulo que continha nos triângulos, bem como ao item 1.5 que mencionava ângulo reto.

Analisando os resultados fica bastante evidente que as dificuldades dos alunos eram conceituais e não visuais ou de manipulação com o software, tendo em vista que nos itens 1.1, 1.2 e 1.3 – todos relacionados as figuras construídas no software – a maioria dos alunos tiveram um bom desempenho. Por outro lado, os itens 1.4, 1.5 e 1.6 referentes a conceitos, nos quais era necessário conhecer alguns conceitos e definições, os alunos tiveram um desempenho insatisfatório.

De modo geral, a análise que fazemos dessa atividade é que apesar das respostas não terem sido as esperadas, cumpriu seu objetivo que era justamente diagnosticar o conhecimento que os alunos tinham em relação ao triângulo retângulo e seus elementos. Assim, pudemos constatar que os alunos não sabiam reconhecer um triângulo retângulo nem seus elementos: catetos e hipotenusa.

Ao socializarmos as respostas ao final da atividade, constatamos que os alunos ainda não haviam tido contato prévio com o conteúdo de relações métricas no triângulo retângulo, sobretudo do teorema de Pitágoras, razão pela qual advinham as dificuldades em responder aos itens finais da atividade.

Análise *a posteriori* da atividade 2

Para analisar essa atividade, sistematizamos, conforme o quadro abaixo, o desempenho dos alunos em cada item (**a**, **b**, **c**, **d**, **e**), o que, certamente, favoreceu na identificação dos itens que os alunos tiveram mais dificuldades.

Quadro 9: Mapa de frequência e desempenho da atividade 2

Aluno	**Freq.**	**Itens da atividade**																
		a			**b**			**c**			**d**			**e**				
A1	F																	
A2	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
A3	P	C	C	C	E	E	E	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	E
A4	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	C	C	C	C	C
A5	P	C	E	E	C	E	E	C	E	E	C	E	E	C	E	E	C	E
A6	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	E
A7	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	E
A8	P	C	C	C	E	C	E	E	E	E	E	C	E	E	E	E	C	C
A9	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
A10	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	C	E
A11	P	C	C	C	C	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	C	E	E
A12	F																	
A13	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E

A14	P	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
A15	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E
Legenda: F = Faltou P = Presente C = Resposta correta E = Resposta errada																		

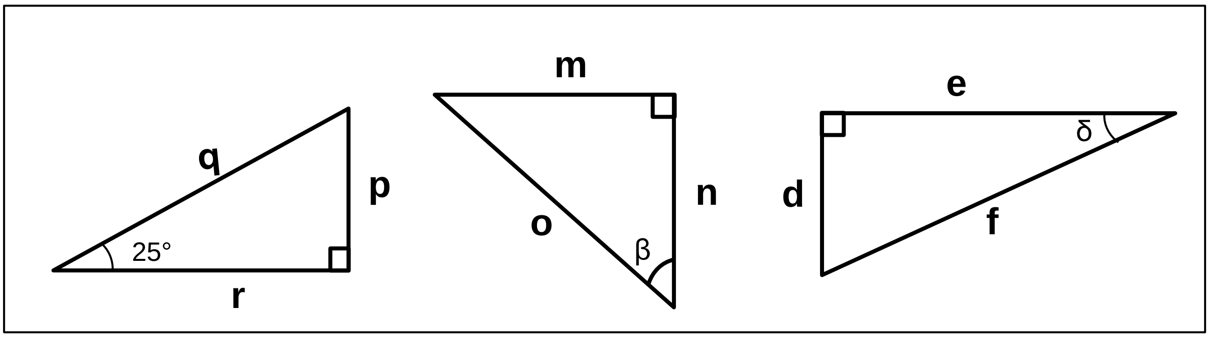
Fonte: Autor (2017)

Conforme podemos observar, dois alunos faltaram a aula, por isso duas linhas encontram-se vazias. Além disso, fica evidente, no quadro acima, que todos os alunos responderam a todos os itens, não deixando nenhum sem resposta.

Com o auxílio do quadro de desempenho, ao analisar o rendimento individual por aluno, constatamos que os alunos A5 e A8 tiveram um desempenho insatisfatório nesta atividade. O A5 errou cerca de 65% de todos os itens da atividade e o A8 58%. Analisando o que possivelmente aconteceu para ambos errarem tantas questões, verificamos que o aluno A5 havia compreendido de maneira equivocada a noção de cateto oposto e cateto adjacente, visto que trocou esses elementos em todos os itens da atividade e acertou apenas a hipotenusa. Em relação ao aluno A8 , além da incompreensão do significado dos elementos de um triângulo retângulo, acreditamos que seus erros também estejam relacionados a posição dos triângulos retângulos, pois no item (**a**), onde o triângulo se apresenta como geralmente os livros e os professores colocam ao apresentar algum conteúdo que trate do triângulo retângulo, ele acertou tudo; porém, nos demais itens onde os triângulos são postos em posições variadas o aluno teve muitas dificuldades – o que culminou com esse alto índice de erro, por parte desse aluno.

Constatamos que além do aluno A8, embora de maneira mais discreta, esse problema aconteceu também com outros alunos. Assim, fazendo um balanço de cada item da atividade, vimos que o item (**a**), com exceção do aluno A5, todos acertaram os elementos que deveriam identificar no triângulo retângulo, cerca de 94,5% de acertos. Nos itens (**c**) e (**d**) verificamos também um bom índice acertos, 82% e 84,5%, respectivamente.

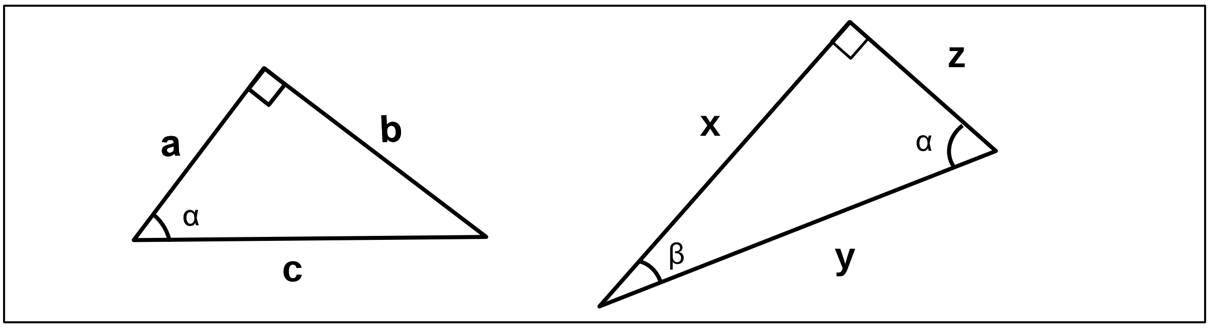
Figura 21 – Triângulos dos itens (**a**), (**c**) e (**d**)



Fonte: Sequência didática do autor (2017)

Por outro lado, nos itens (**b**) e (**e**) o percentual de acertos foi, 77% e 61,5%, respectivamente.

Figura 22 – Triângulos dos itens (**b**) e (**e**)



Fonte: Sequência didática do autor (2017)

Desse modo, pelo desempenho dos alunos nesta atividade, evidenciamos que a posição do triângulo pode dificultar a identificação dos seus elementos. Assim, vimos que quando o ângulo reto do triângulo retângulo é posto de modo que coincide com o eixo horizontal e vertical os alunos têm menos dificuldades do que quando o ângulo reto não coincide com os eixos cartesianos.

Outra situação que pode também ter contribuído para que os alunos tivessem mais dificuldades e uma grande concentração de erros no item (**e**) foi o fato de aparecer dois ângulos, algo que não constou nos demais triângulos.

Apesar dessas ponderações, avaliamos que, de modo geral, o rendimento da turma foi satisfatório. Entendemos que a atividade foi bastante proveitosa e certamente, possibilitou minimizar dificuldades futuras, sobretudo para a próxima atividade, na qual se deve identificar os elementos de um triângulo retângulo dinâmico para preencher um quadro.

Vale ressaltar que a ideia principal da atividade era exatamente proporcionar aos alunos essa quebra de paradigmas que vão se construindo ao longo do ensino dos conteúdos matemáticos. Acreditamos que o software GeoGebra, por possibilitar esse dinamismo nas variações das construções geométricas preservando suas propriedades, pode ajudar os alunos a analisar figuras geométricas em diferentes posições e tamanhos.

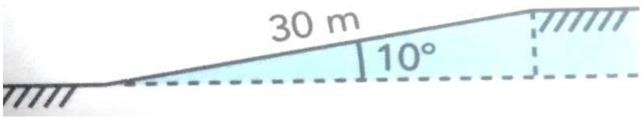
Análise *a posteriori* da atividade 3

A fim de favorecer a troca de conhecimento, a ajuda mútua, o trabalho colaborativo e a interação de modo geral, optamos por desenvolver essa atividade em duplas. Como neste dia faltaram três alunos, foram formadas apenas 6 duplas.

Iniciamos o encontro apresentando a seguinte situação problema:

Figura 23 – Situação problema 1

Um caminhão sobe uma rampa inclinada de 10º em relação ao plano horizontal. Se a rampa tem 30 m de comprimento, a quantos metros o caminhão se eleva, verticalmente, após percorrer toda a rampa?



Fonte: Dante (2009)

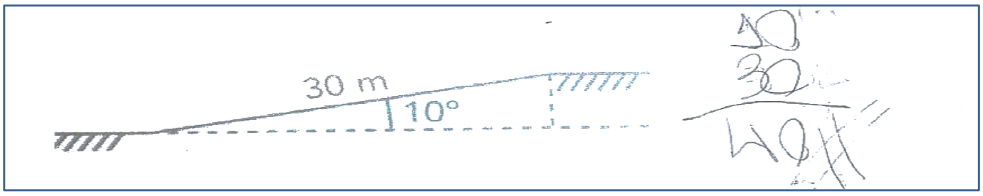
A ideia de apresentar essa situação problema está relacionada à dialética da ação, que é uma das fases da Teoria das Situações Didáticas, na qual conforme Almouloud (2007, p.37) consiste em colocar o aluno numa situação de ação perante um problema cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento que se deseja ensinar. Nesta concepção de ensino

> A aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento. (BRASIL, 2006, p.81)

Assim, demos um tempo para que os alunos pensassem numa solução, mas não conseguimos obter muita informação, por parte deles, a respeito dessa situação. Vale ressaltar que, após a aplicação da atividade 1, já sabíamos que os alunos não haviam tido contato com o Teorema de Pitágoras, o que também não ajudaria a resolver a questão, mas certamente poderia produzir mais informações relevantes sobre essa situação problema.

Os alunos tentaram resolver o problema, entretanto poucos esboçaram algum registro de solução, e naturalmente usaram lógicas de conteúdos matemáticos que conheciam. Por exemplo, abaixo temos o registro da solução apresentada pelo aluno A8, que acabou somando os números que apareciam na imagem.

Figura 24 – Registro feito pelo aluno A8 acerca da situação problema 1



Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

O que supomos, na análise *a priori*, era de que os alunos tentassem resolver essa situação por meio do Teorema de Pitágoras tendo em vista que na figura aparece um triângulo retângulo, porém iam perceber que só tem a medida de um dos lados, assim o teorema seria insuficiente para resolver a situação, sendo necessário um novo conhecimento – neste caso, o conceito de seno. Desse modo, o novo conhecimento será construído a partir da atividade 3, usando o GeoGebra para nos auxiliar nesse processo de ensino e aprendizagem.

Como vimos na análise *a priori*, para realizar essa atividade os alunos deveriam construir a princípio um triângulo retângulo dinâmico. Todos os alunos o fizeram sem grandes dificuldades, haja vista que a guia de construção apresentava de maneira bem explicativa os passos da construção, e as dúvidas que surgiam nós íamos tirando. Uma vez construído o “triângulo dinâmico”, os alunos deveriam preencher um quadro e responder a algumas perguntas. Veja no quadro a seguir o desempenho das duplas.

Quadro 10 – Desempenho das duplas na atividade do seno

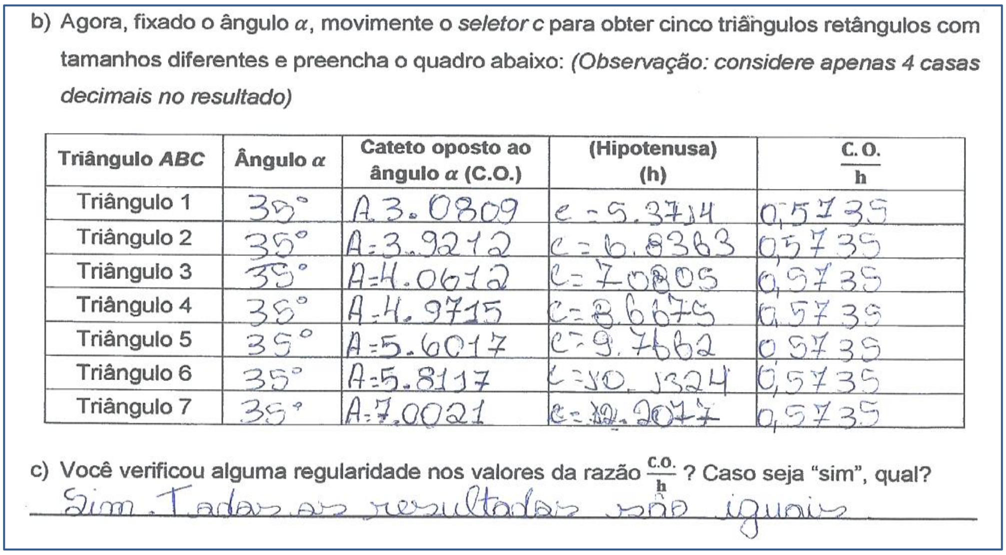
Duplas	**Itens da atividade**					
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
A9, A11	✓	✓	Sim	Sim	Sim	----
A5, A13	✓	✓	Sim	Não	Sim	----
A6, A8	✓	✓	Sim	Sim	Sim	Parcial
A7, A15	✓	✓	Sim	Parcial	Sim	----
A2, A4	✓	✓	Sim	Não	Sim	Parcial
A3, A14	✓	✓	Sim	Não	Sim	----

Legenda:
✓ = sem necessidade de mensuração ---- = não realizado
Sim = acertou Não = não acertou Parcial = acertou parcialmente

Fonte: Autor (2017)

Os itens (**a**) e (**b**) aparecem ticados, pois eram comandos necessários para realizar a atividade. No item (**a**) os alunos deveriam escolher um ângulo qualquer, e no item (**b**) deveriam movimentar o controle deslizante “c” que fazia variar a medida de um dos catetos para obter sete triângulos com tamanhos diferentes e preencher o quadro que constava na folha impressa de atividades. Já o item (**c**) tratava-se de uma pergunta, na qual as duplas deveriam responder o que haviam observado no quadro acerca da razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. Podemos constatar no acima, que todas as duplas acertaram esse item.

Figura 25 – Registro dos itens (**b**) e (**c**) realizado pela dupla 1



b) Agora, fixado o ângulo α, movimente o *seletor c* para obter cinco triângulos retângulos com tamanhos diferentes e preencha o quadro abaixo: *(Observação: considere apenas 4 casas decimais no resultado)*

Triângulo *ABC*	Ângulo α	Cateto oposto ao ângulo α (C.O.)	(Hipotenusa) (h)	$\frac{\text{C.O.}}{\text{h}}$
Triângulo 1	35°	A 3.0809	c = 5.3714	0,5735
Triângulo 2	35°	A=3.9212	c = 6.8363	0,5735
Triângulo 3	35°	A=4.0612	C= 7.0805	0,5735
Triângulo 4	35°	A=4.9715	C= 8.6675	0,5735
Triângulo 5	35°	A =5.6017	C= 9.7662	0,5735
Triângulo 6	35°	A=5.8117	C= 10.1324	0,5735
Triângulo 7	35°	A=7.0021	C= 12.2077	0,5735

c) Você verificou alguma regularidade nos valores da razão $\frac{\text{C.O.}}{\text{h}}$? Caso seja "sim", qual?

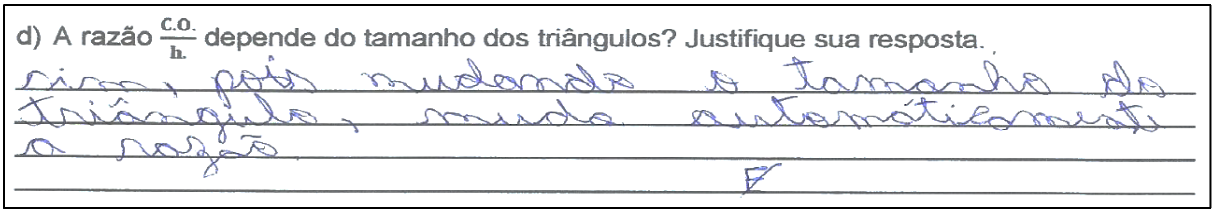
Sim. Todos os resultados são iguais

Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

Em relação ao item (**d**), o quadro 10 nos mostra que 50% das duplas não acertaram ao item. A pergunta era a seguinte: "A razão $\frac{\text{C.O.}}{\text{h.}}$ depende do tamanho dos triângulos? Justifique sua resposta".

Talvez não tenha ficado claro que a pergunta estava condicionada ao ângulo, por eles adotado, manter-se fixo. Neste sentido, reconhecemos que a pergunta poderia ter deixado mais explícita tal condição. Assim, entendemos que o erro de algumas duplas esteja relacionado a esse fato, o que pode ter prejudicado no entendimento da pergunta. Conforme podemos observar na resposta da dupla 6, composta pelos alunos A3 e A14.

Figura 26 – Registro do item (**d**) realizado pela dupla 6



d) A razão $\frac{\text{C.O.}}{\text{h.}}$ depende do tamanho dos triângulos? Justifique sua resposta.

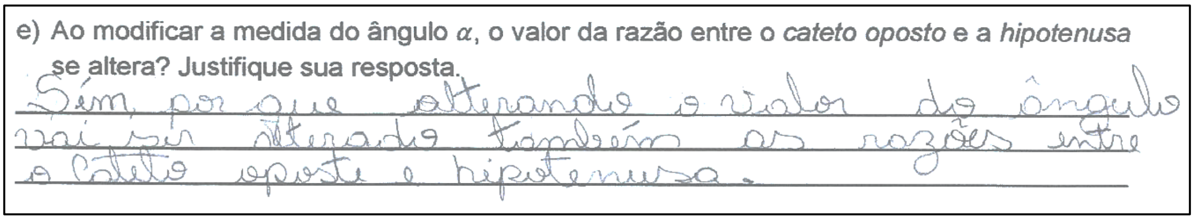
sim, pois mudando o tamanho do triângulo, muda automaticamente a razão

F

Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

O item (**e**) todas as duplas acertaram a pergunta. A resposta da dupla 3, formada pelos alunos A6 e A8, é parecida com a que as outras duplas apresentaram. Confira na figura a seguir o registro feito por essa dupla.

Figura 27 – Registro do item (**e**) realizado pela dupla 3


e) Ao modificar a medida do ângulo α, o valor da razão entre o *cateto oposto* e a *hipotenusa* se altera? Justifique sua resposta.

Sim, por que alterando o valor do ângulo vai ser alterado também as razões entre o Cateto oposto e hipotenusa.

Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

Contudo, no item (**f**) nenhuma das duplas apresentou uma conclusão com o que esperávamos. Apenas duas fizeram registros neste item, porém o que encontramos nestes registros foram respostas de itens anteriores, não contemplando totalmente a conclusão principal da atividade. O que demonstra algumas limitações, por parte dos alunos, em desenvolver atividades que requeiram análises e observações gerais de maneira escrita, provavelmente por não serem estimulados nas atividades matemáticas usuais.

Ao final da atividade, conforme solicitado, as duplas entregaram a nós uma das folhas para que servisse de objeto de análise para essa pesquisa, e a outra, que seria uma transcrição da que foi entregue, ficou com eles para a socialização final.

Neste momento de socialização, especialmente nos itens (**b**) e (**c**) aproveitamos o ensejo para questioná-los o porquê dos valores das razões serem sempre iguais, a fim relembrarmos conteúdos como a semelhança de triângulos.

Procedendo com a socialização da atividade, validamos as hipóteses levantadas e pontuamos os eventuais erros. Após esse momento, realizamos a institucionalização da razão trigonométrica *seno*. Assim, usando a lousa registramos por escrito que:

“Em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto oposto a um ângulo e a hipotenusa será uma constante a qual chamaremos de ***seno***”.

Segundo Almouloud (2007, p.40), “uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio da classe, embora não tenha ainda o estatuto de saber social”.

Após o processo de institucionalização da atividade, disponibilizamos aos alunos tabelas com valores do seno para ângulos entre 0° e 90°, a fim de que as duplas se certificassem de que encontraram o seno corretamente do ângulo escolhido. Desse modo, analisando os protocolos de registro das duplas verificamos que todas as duplas obteram corretamente o valor do seno para o ângulo o qual escolheram. O que evidencia que as atividades preliminares desta sequência didática foram fundamentais para evitar dificuldades nas atividades posteriores, sobretudo na identificação dos elementos de um triângulo retângulo no qual essa atividade exigiu.

Em seguida, retomamos a situação problema 1, proposta no início da aula. Neste momento é que surge o papel do professor e sua importância no processo de ensino e aprendizagem, sobretudo em transpor o conhecimento matemático de modo didático, que possibilite o aluno desenvolver competências e habilidades para obter a solução do problema sem que o professor diga diretamente como proceder, fazendo os alunos refletirem e agirem.

Desse modo, fizemos algumas perguntas verbalmente para conduzi-los a solução, entre elas:

- Vocês conseguem identificar algum triângulo retângulo na imagem?
- Já que queremos descobrir a altura da rampa, que tal atribuímos uma letra (incógnita) para ela?
- Que elemento o 30 m representa neste triângulo retângulo?
- E a letra que atribuímos, o que ela representa neste triângulo, em relação ao ângulo de 10°?
- Cateto oposto e hipotenusa, o que nos lembra?

Até este ponto conseguimos explorar de modo bem produtivo as habilidades e competências dos alunos. Eles se deram conta que o problema seria resolvido usando a razão trigonométrica *seno*.

Contudo, nesta parte final foi preciso nossa intervenção direta para auxiliarmos nos procedimentos de cálculos, usando as habilidades e competências anteriores como resolver equações e utilizar a propriedade fundamental das proporções, tendo em vista que não é tão fácil realizar os cálculos sem ter visto algum exemplo antes.

Antes de resolvermos, os alunos ainda consultaram uma tabela trigonométrica para encontrar o seno de 10° e a calculadora para fazer as contas.

Diante da situação didática gerada neste encontro, avaliamos que o objetivo da atividade foi cumprido, tendo em vista que nossa preocupação estava em subsidiar a construção do conceito de seno. E pelo que constatamos ficou claro para os alunos o novo conhecimento construído.

Embora tenha demandado um pouco de tempo, acreditamos que esse tipo de abordagem é mais significativa e faz mais sentido para o aluno do que apresentar uma definição de maneira direta e "árida", como se aquele objeto do saber tenha surgido do nada, como se fosse um dogma – que não pode ser questionado, somente aceito como verdade.

Análise *a posteriori* das atividades 4 e 5

Iniciamos nosso 4º encontro propondo as atividades 4 e 5. Solicitamos aos alunos que mantivessem as mesmas duplas da atividade 3 a fim de facilitar nossas análises no desempenho de cada dupla, entretanto como alguns alunos faltaram neste dia, algumas duplas foram desfeitas.

A princípio distribuímos a atividade 4, e à medida que as duplas iam concluindo a atividade, entregávamos a 5.

A seguir temos os quadros de desempenho das duplas nas atividades 4 e 5, acerca do cosseno e tangente, respectivamente.

Quadro 11 – Desempenho das duplas na atividade do cosseno

Duplas	Itens da atividade					
	a	b	c	d	e	f
A1, A10	✓	✓	Sim	Não	sim	----
A5, A13	✓	✓	Sim	Sim	Sim	Parcial
A6, A8	✓	✓	Sim	Sim	Sim	Parcial
A7, A15	✓	✓	Sim	Parcial	Sim	----
A2, A4	✓	✓	Sim	Sim	Sim	Parcial
A12, A14	✓	✓	Sim	Sim	Sim	Parcial
Legenda: ✓ = sem necessidade de mensuração ---- = não realizado						

Sim = acertou Não = não acertou Parcial = acertou parcialmente

Fonte: Autor (2018)

Quadro 12 – Desempenho das duplas na atividade da tangente

Duplas	Itens da atividade					
	a	b	c	d	e	f
A1, A10	✓	✓	Sim	Não	sim	----
A5, A13	✓	✓	Sim	Sim	Sim	Parcial
A6, A8	✓	✓	Sim	Sim	Sim	----
A7, A15	✓	✓	Sim	Parcial	Sim	Parcial
A2, A4	✓	✓	Sim	Sim	Sim	Parcial
A12, A14	✓	✓	Sim	Sim	Sim	Parcial

Legenda:
✓ = sem necessidade de mensuração ---- = não realizado
Sim = acertou Não = não acertou Parcial = acertou parcialmente

Fonte: Autor (2018)

Pelo fato dessas atividades serem parecidas com a atividade 3, os alunos não tiveram dificuldades para cumpri-las. Podemos constatar nos quadros de desempenho acima que as respostas até melhoraram e muitos até expressaram por escrito alguma conclusão geral da atividade no item (**f**).

A dupla formada pelos alunos A1 e A10, erraram ao item (**d**) e deixaram de expressar alguma conclusão geral ao final da atividade no item (**f**), possivelmente tais dificuldades estejam relacionadas a ausência desses alunos na aula anterior, entretanto conseguiram de certa maneira cumprir parcialmente a atividade com êxito.

Como vimos muitas duplas até expressaram alguma observação geral das atividades, acertando parcialmente as conclusões. O curioso é que eles criaram uma expectativa para saber qual o nome que seria dado as outras razões trigonométricas.

Dessa forma, quando todos entregaram as atividades realizamos a socialização, bem como a institucionalização das razões trigonométricas *cosseno* e *tangente*. Registramos, assim, no quadro branco:

“Em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto adjacente a um ângulo e a hipotenusa será uma constante a qual chamaremos de ***cosseno***”.

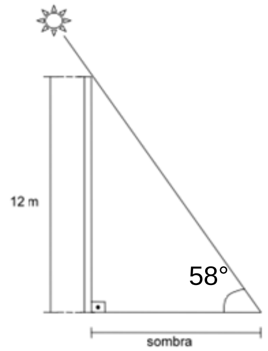
“Em qualquer triângulo retângulo, a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a um ângulo será uma constante a qual chamaremos de ***tangente***”.

Em seguida, disponibilizamos aos alunos uma tabela de cosseno e tangente para certificarem os valores do cosseno e da tangente para os ângulos escolhidos.

Constatamos que todos encontraram os valores corretos do cosseno e da tangente dos ângulos os quais escolheram nas respectivas atividades. Logo após, apresentamos um problema adaptado da Prova Brasil.

Figura 28 – Situação problema 2

Um poste de 12m de altura projeta uma sombra no solo em uma determinada hora do dia, como mostra a figura. Qual é o comprimento da sombra, em metros?

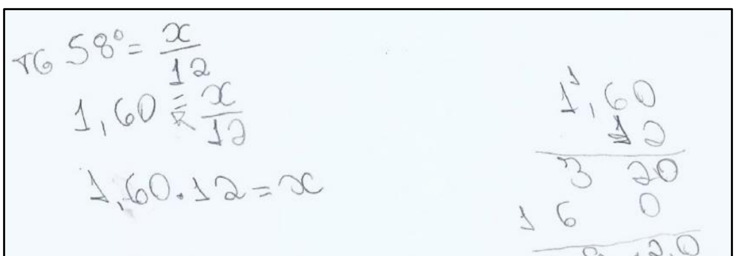


Fonte: Adaptado do Item 612 das devolutivas da Prova Brasil (2015)

Apenas 3 alunos conseguiram responder à questão plenamente, 5 parcialmente e 4 não apresentaram nenhuma solução. É evidente, que por ser o 2º problema trabalhado sobre razões trigonométricas, não poderíamos esperar que todos efetuassem proficientemente os cálculos. Desse modo, entendemos que a turma estava evoluindo nesse processo, tendo em vista que segundo Brousseau (1986), o aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que se constitui um fator de dificuldades, contradições e desiquilíbrio, conforme propõe a teoria construtivista de aprendizagem, segundo a qual a aprendizagem decorre por meio de um processo de adaptação do sujeito perante situações problemáticas (ALMOULOUD, 2007).

Veja o cálculo apresentado pelo aluno A4 e similar a solução de alguns alunos também a respeito dessa situação problema.

Figura 29 – Registro feito pelo aluno A4 acerca da situação problema 2



Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

Fica bastante evidente que o aluno usou a razão trigonométrica apropriada – neste caso, a tangente. Porém, inverteu os elementos cateto oposto e cateto adjacente no cálculo. Isso demonstra que o mesmo compreendeu o conceito de tangente e sabia exatamente qual razão trigonométrica devia utilizar, mas por conta de algum descuido representou os elementos de maneira equivocada, o que consequentemente produziu um erro. Assim, o erro foi procedimental e não conceitual, o que evidencia que a atividade contribuiu na construção de conceitos.

Conforme a concepção de *avaliação formativa* preconiza, as informações produzidas pelos alunos podem servir para o professor identificar a maneira pela qual um novo saber foi adquirido pelo aluno, os processos e as estratégias utilizadas, além dos erros cometidos e sua significação. A intenção do professor com essa avaliação é ajudar o aluno a superar dificuldades e perceber por que suas estratégias falharam (ALMOULOUD, 2007). Ainda, segundo Almouloud (2007)

> Em uma pedagogia por objetivos, tal avaliação toma forma de uma lista de objetivos atingidos ou não. No entanto, ela pode, também, ser feita para monitorar a evolução do comportamento dos alunos em situação de resolução de questões matemáticas. (ALMOULOUD, 2007, p.105)

Assim, entendemos que por ser o primeiro contato com as razões trigonométricas, compreendemos que tais dificuldades encontradas pelos alunos são absolutamente normais. Entretanto, percebemos uma evolução considerável dos alunos, demonstrando que haviam compreendido os conceitos ensinados, embora com uma limitação a priori dos procedimentos de cálculos.

Além disso, não podemos deixar de levar em consideração o *tempo de aprendizagem* de cada aluno, sabemos que existem alunos que demoram um pouco mais para assimilar um novo conceito e atingir uma posição de equilíbrio no processo de aprendizagem.

Ao final da aula, propomos aos alunos a construção de uma calculadora trigonométrica para auxiliar na obtenção dos valores de seno, cosseno e tangente, e assim perceberem ainda mais as potencialidades do software GeoGebra.

Confira abaixo a guia de construção dessa calculadora.

Quadro 13 – Guia de construção da calculadora trigonométrica

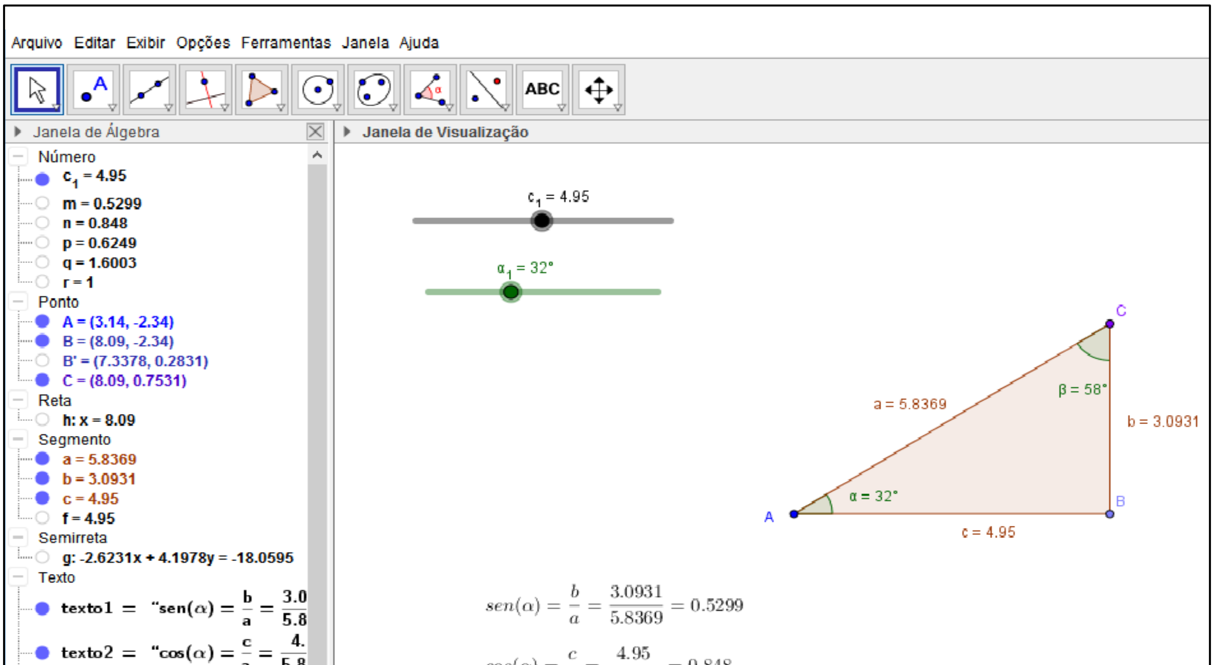
Entrada	Digitar **m = b/a**, em seguida dar “Enter”
Entrada	Digitar **n = c/a**, em seguida dar “Enter”
Entrada	Digitar **p = b/c**, em seguida dar “Enter”
Entrada	Digitar **q = c/b**., em seguida dar “Enter”
Entrada	Digitar **r = m² + n²** , em seguida dar “Enter”
ABC	Ativar **texto**. Clicar na janela de visualização gráfica, depois habilitar a opção “Fórmula LATEX”. Na caixa de texto “Editar” digite “sen α =”, e na aba “Fórmula LATEX” escolha a opção “Raízes e Frações” e selecione *a/b*). Entre chaves, no lugar de *a* digite “b” e no lugar de *b* digite “*a*”. *Em seguida, digite “=”, e novamente* na aba “Fórmula LATEX” escolha a opção “Raízes e Fração” e clique em *a/b*). Substitua o “a” pelo objeto “b” (que se encontra na aba “Objetos”), do mesmo modo substitua o “b” entre chaves pelo objeto “a”. Depois digite “=” e na aba “Objetos” selecione *m*. E, finalmente, clique em “Ok”. Repita o mesmo procedimento para obter as caixas de texto “cos α” e “tg α”.

Fonte: Autor (2017)

Por conta dos detalhes da sequência de passos, boa parte dos alunos tiveram relativamente algumas dificuldades, porém todos conseguiram fazê-la com êxito. Quando concluída, dava para perceber a sensação de entusiasmo que os alunos tiveram ao finalizá-la. Alguns alunos comentaram que gostou de realizar as atividades com o uso do computador.

A construção obtida é semelhante à figura abaixo:

Figura 30 – Calculadora trigonométrica no GeoGebra



Fonte: Autor (2017)

Fazendo um balanço geral sobre as atividades aplicadas nesta sequência didática, fica bastante evidente que o fato dos alunos não terem tido contato prévio com alguns conteúdos matemáticos, não inviabilizou a aplicação de nossa sequência, tampouco dificultou a construção de novos conhecimentos.

Vimos que as atividades preliminares de familiarização com o software GeoGebra foi essencial para prevenir e minimizar dificuldades nas atividades da sequência didática.

A atividade 1, que visava diagnosticar o patamar de conhecimento dos alunos sobre o triângulo retângulo e seus elementos, foi extremamente crucial para direcionar nossos passos. Além disso, a atividade serviu para apresentarmos os elementos: catetos e hipotenusa, tendo em vista que os alunos ainda não os conheciam.

Na atividade 2, após dada a noção de cateto oposto e adjacente, os alunos deveriam nesta atividade identificar, nos triângulos retângulos dados, os elementos: cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa. Conforme vimos acima, a maneira como se encontra disposto o triângulo pode dificultar a identificação desses elementos, porém é necessário propor esse tipo de exercício para que o aluno não crie hipóteses equivocadas, e também para que possa desenvolver a capacidade de identificar elementos independentemente da forma como se encontra a figura geométrica, mostrando que compreendeu efetivamente os conceitos ensinados.

Essa atividade, como constatamos na aplicação das atividades seguintes, foi fundamental para que os alunos tivessem poucas dificuldades para realizar o preenchimento do quadro posto nas atividades 3, 4 e 5, bem como na resolução das situações problema apresentadas durante as atividades.

Nas atividades 3, 4 e 5, acerca das razões trigonométricas no triângulo retângulo, verificamos que os alunos tiveram uma evolução significativa na construção de novos conhecimentos e conseguiram realizar as atividades conforme previsto. Constatamos também que a utilização do software GeoGebra, por parte dos alunos, não foi nenhum entrave para a realização das atividades, pelo contrário os alunos gostaram bastante de utilizar o computador para realizar atividades matemáticas.

Evidentemente, que nas situações-problemas propostas, alguns alunos enfrentaram algumas dificuldades, o que é absolutamente normal pois trabalhamos apenas duas situações problema, além de que nosso foco não estava na destreza de resolver questões, e sim construir os conceitos de seno, cosseno e tangente por meio de uma situação problema que motivasse o estudo de tal conteúdo, conforme sugere a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau.

Desse modo, considerando que os alunos tiveram pouco contato com os procedimentos de cálculo para realizar a solução dos problemas, as análises dos registros produzidos pelos alunos constataram que a maioria dos alunos conseguiu entender o conceito das razões trigonométricas, sem contar que houve um grande envolvimento nas atividades aplicadas, por parte dos alunos, e uma evolução considerável na aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando as dificuldades no ensino e aprendizagem de trigonometria observadas ao longo de nossa experiência docente, e constatadas historicamente e epistemologicamente nos trabalhos consultados nesta pesquisa, sobretudo acerca das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Além disso, a abordagem didática que geralmente é sugerida nos livros didáticos e empregada pelos professores na introdução desse conteúdo foi que nos motivou a desenvolver essa pesquisa, norteada pela seguinte questão:

A aplicação de uma sequência didática com o auxílio do software GeoGebra favorece ao aluno do 9º ano do ensino fundamental à transposição de conhecimento para a construção dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo?

Assim, com base nos objetivos elencados nesta pesquisa, constatamos na experimentação que ao aplicarmos uma sequência didática baseada nos princípios da Didática da Matemática e fazendo uso do software educacional GeoGebra em uma turma de alunos do 9º do ensino fundamental, possibilitou a transposição do conteúdo ensinado, bem como favoreceu a construção dos conceitos básicos da trigonometria, especialmente das razões trigonométricas.

Os resultados obtidos nesta pesquisa evidenciam que o uso de ferramentas tecnológicas, especialmente os softwares de geometria dinâmica como o GeoGebra, auxiliam a construção de conceitos básicos ligados à trigonometria, constituindo-se como um recurso didático valioso ao professor no sentido de promover uma transposição didática mais efetiva.

Ademais, a dinamicidade do GeoGebra em realizar variação no tamanho do triângulo retângulo, preservando suas propriedades, permitiu obter as regularidades nas razões que queríamos institucionalizar.

Constatamos, ainda, que as atividades da sequência didática favoreceram o desenvolvimento dos alunos no que diz respeito a capacidade de realizar investigações e verificar regularidades por meio de observações, bem como registar essas observações de maneira escrita.

Nosso estudo também verificou que o uso da tecnologia favorece o desenvolvimento de situações didáticas, podem resultar perceptivelmente em uma mudança de comportamento e a evolução no aprendizado dos alunos no que tange ao conteúdo de razões trigonométricas, o qual apresentou indícios da transformação do saber sábio para o saber escolar via recursos tecnológicos, ou seja, a transposição didática propriamente dita. Proporcionando, assim, uma superação nas limitações que alguns recursos como o livro didático possuem.

Além disso, observamos nas sessões da experimentação que os alunos se mostraram bastante motivados, concentrados e envolvidos nas atividades propostas da sequência didática. Assim, entendemos que uma abordagem com o uso de softwares educacionais e apoiados nos princípios da Didática da Matemática possibilita ao aluno a participação e a construção de novos conhecimentos, além de minimizar as dificuldades enfrentadas no estudo da trigonometria, dando mais sentido ao conteúdo matemático estudado.

Entretanto, é preciso tomar certos cuidados para se apropriar adequadamente dessas novas tecnologias com propósitos pedagógicos, senão o professor estará apenas mudando de recursos e mídias, e praticando a mesma metodologia de ensino. Nesse sentido, embora haja essa necessidade de incorporar a tecnologia nas atividades educacionais, é importante termos em mente que ela, por si só, não é capaz de produzir a aprendizagem ao aluno, nem será a solução para tudo no ensino de matemática. Por isso o professor continuará sendo uma peça fundamental neste processo de ensino e aprendizagem, visto que as situações de aprendizagem só surtirão efeito se bem planejadas por esse profissional.

Acreditamos também que o contato inicial da trigonometria no ensino fundamental, ainda que fique apenas nas razões trigonométricas, passa a ser um componente essencial na constituição de uma base sólida na aprendizagem do aluno para um estudo mais abrangente da trigonometria no ensino médio, podendo minimizar dificuldades no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo.

Vale ressaltar que embora nossa experimentação tenha sido feita com 15 alunos em função das limitações físicas do laboratório de informática, a sequência didática elaborada pode ser aplicada em turmas com mais alunos desde que tenha espaço e computadores suficientes para os alunos desenvolverem as atividades em duplas, e até mesmo ser adaptada pelo professor para alguma aula sobre o conteúdo dispondo apenas de um computador e projetor de imagens.

Também é bom deixar claro que, por se tratar de uma pesquisa ação, a qual está vinculada a uma situação particular, não podemos generalizar os resultados, isto é, ter plena convicção de que essa ação será bem-sucedida em outro contexto. Nem tampouco é nosso propósito trazer verdades absolutas, mas mostrar que podemos por meio de práticas inovadoras, usando as novas mídias digitais e se apoiando em teorias didáticas já consagradas pelo meio científico, proporcionar um ensino que possa despertar no aluno mais interesse e participação, de modo que ele faça parte da construção do próprio conhecimento.

Desse modo, acreditamos que o caminho é tentando buscar alternativas com práticas inovadoras que possam contribuir para o processo de ensino e aprendizagem, e isso requer uma formação permanente do professor a fim de provocar melhorias no ensino de matemática. E isso nós sabemos que exige do professor uma busca incessante pelo conhecimento de novas teorias e metodologias, além de conhecimentos fora de sua área específica de formação. No entanto, para que isso ocorra também é importante que haja investimentos e incentivos na formação deste profissional que faz toda a diferença no processo de ensino e aprendizagem.

Como nossa pesquisa estava comprometida com a constituição e institucionalização dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo, sem grande enfoque aos procedimentos de resolução de questões, talvez alguma pesquisa possa ser feita nesse sentido, com base nos resultados obtidos de nossas análises, a respeito dos erros conceituais e procedimentais das razões trigonométricas.

Cabe registrar que esse trabalho deu origem a um produto (livreto), em versões impressa e digital, voltado para o professor. O livreto apresenta a fundamentação teórica utilizada na pesquisa, a metodologia e a sequência didática, constituindo-se como um valioso recurso didático que professor poderá lançar mãos para ensinar razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Portanto, esperamos que nosso estudo possa contribuir para futuras pesquisas, e principalmente para auxiliar o professor que muitas vezes na correria de sua rotina de trabalho não dispõe de tempo suficiente para planejar ações e aulas diferentes do modo tradicional. Assim, nossa sequência didática se apresenta como uma alternativa ao professor que pretende fazer uma abordagem diversificada para introduzir o conteúdo das razões trigonométricas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. As transformações do saber científico ao saber ensinado: o caso do logaritmo. In: **Educar em Revista**. Nº. Especial 1/2011. Curitiba: Editora UFPR, p. 191-210, 2011.

__________________. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.9.3, p.281-308, 1988.

BBC BRASIL. **Os brasileiros que superaram o 'ensino massificador e chato' e viraram campeões da matemática**. Disponível em: <http://www.bbc.com/portuguese/brasil-39773501>. Acesso em: 11 jun. 2017 às 11h20min.

BORBA, M.C.; PENTEADO, G.P. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

BORBA, M.C.; SILVA, R.S.R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** sala de aula e internet em movimento. - 1 ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. – (Coleção Tendências em Educação Matemática)

BORGES, C.F. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para ensino**. São Paulo: (Dissertação de mestrado), PUC/SP, 2009.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. - 2 ed. – São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

________________. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – proposta preliminar**.** MEC, s.d.

________________. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – proposta preliminar – 2ª versão revista**.** MEC, 2016.

________________. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008**: **Matemática**. Brasília: MEC, 2007.

________________. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. 135p. Volume 2.

________________. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. **Orientações Educacionais Complementares.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

________________. Ministério da Educação. **Prova Brasil** – **Apresentação**. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/>. Acesso em: 27 fev. 2016.

_______________. Ministério da Educação. **Prova Brasil – matrizes de referência**. Disponível em: http://provabrasil.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas. Acesso em: 04 set. 2017.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodoes de la didactique des mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 7.2, p.33-115, 1986.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Notas históricas. In: CARMO, M.P.; MORGADO, A.C.; WAGNER, E. **Trigonometria / Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, p. 137 – 156.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

CONDURU, M.T.; MOREIRA, M. C. R. **Produção Científica na Universidade**. Belém: Eduepa, 2. ed. revista e atualizada, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática – da teoria à prática**. 23 ed. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas: Papirus, 2012.

EVES, H. **Introdução a história da matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. In: **Educação Matemática – uma (nova) introdução**", 3. ed. 4. reimp. org. Machado, S.D.A. São Paulo: EDUC, 2016. p. 77 – 111. (Série Trilhas)

GIL, A. C. **Métodos e técnicas em pesquisa social**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GOMES, Rosana Pereira. **O Ensino das Relações Trigonométricas no triângulo por Atividades.** Belém: Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, 2013.

GUIMARÃES, S.U. et. al. As potencialidades do GeoGebra para a construção de material didático para o ensino de funções. In: **1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra**. ISSN 2237-9657,pp.CCLXXX-CCXC111, 2012.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. – 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LINDEGGER, Luiz Roberto de Moura. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo:** uma proposta a partir da manipulação de modelos. São Paulo: Dissertação de Mestrado, PUC – SP, 2000.

LOPES, Maria Maroni. **Construção e aplicação de uma sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra**. Dissertação de mestrado do Programa de Pós-graduação de Ensino de Ciências Naturais e Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.

_______________. Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. Recife: **XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, 2011, p. 1 -12.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: **Educação Matemática – uma (nova) introdução**", 3. ed. 4. reimp. org. Machado, S. D. A. São Paulo: EDUC, 2016. p. 233 – 247. (Série Trilhas)

MELO, Anderson da Silva. **O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica**. Rio de Janeiro: Dissertação de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do IMPA, 2013.

MENDES, M. J. F.; ROCHA, M. L. P. C. **Rumos que levam à tabela trigonométrica a partir da corda**. org. CHAQUIAM, M.; CABRAL, N. F. Belém: SBEM-PA, 2010. (Coleção Educação Matemática na Amazônia, 1)

MISKULIN, R. G. S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria**. 1999. 577 p. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

_______________. As possibilidades didático-pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática:** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de letras, 2008. p. 217-248.

MOTA, Thamires de Brito; JUCÁ , Rosineide Sousa ; PEREIRA, Carlos Alberto de Miranda. Uma análise de erros nas Relações Trigonométricas no triângulo retângulo. Curitiba: **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2013, p. 1-15.

MUNIZ, Cristiano Alberto. Transposição Didática: o professor como construtor de conhecimento. In: **Programa Gestão da aprendizagem Escolar – Gestar II. Matemática: cadernos de Teoria e Prática 1 – TP1: Matemática na alimentação e nos impostos**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. p.191 – 198.

NACARATO, A.M.; BREDARIOL, C.C.; PASSOS, M.P.F. Trigonometria: uma análise da sua evolução histórica e da transposição didática desse conhecimento presente nos manuais didáticos e propostas curriculares. In: **VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2001, Rio de Janeiro. VII ENEM, 2001.

NASCIMENTO, Antonio Paulo Martins do; SÁ, Pedro Franco de; O ensino das relações trigonométricas por meio de atividades. In**:** SÁ, Pedro Franco de; JUCÁ, Rosineide de Sousa (orgs). **Matemática por Atividades:** experiências didáticas bem sucedidas. Petrópolis: Vozes, 2014, p. 133 – 147.

NUNES, J. M. V. **A prática da argumentação como método de ensino: o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas**. Tese de doutorado – PUC/SP. São Paulo: 2011. p.220.

OLIVEIRA, Francisco Canidé de. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de Trigonometria por meio de atividades.** Natal: Dissertação de mestrado do Programa de Pós-graduação de Ensino de Ciências Naturais e Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

OLIVEIRA, Henrique. **Descobrindo as razões trigonométricas no triângulo retângulo**. São Carlos: Dissertação de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) - Universidade Federal de São Carlos, 2013.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência Didática Interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

________________. Transposição Didática. 3. ed. 4. reimp. In: **Educação Matemática – uma (nova) introdução**", org. Machado, S.D.A. São Paulo: EDUC, 2016. p.11 – 48. (Série Trilhas)

PEREIRA, Cicero da Silva. **Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio - Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa**. Campina Grande: Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual da Paraíba, 2011.

POZO, J.I.; PÉREZ ECHEVERRÍA, M.P. As concepções dos professores sobre a aprendizagem: rumo a uma nova cultura educacional. **Pátio – Revista Pedagógica**, n. 16, p. 19-23, 2001.

QEdu. **Distribuição dos alunos por nível de proficiência**. Disponível em: <http://www.qedu.org.br/brasil/proficiencia>. Acesso em: 02 de jul. 2017 às 11h20min.

SAMPAIO, Marisa Narcizo; LEITE, Lígia Silva. **Alfabetização tecnológica do professor**.10.ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

SANTOS, Daiane de Santana; SILVA, Josefa Dielle Nunes da. Uma investigação sobre as prescrições e os usos que os autores de livros didáticos de Matemática do

9º ano fazem sobre o conteúdo de Trigonometria. São Paulo: **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2016, p. 1 - 12.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**, 23 ed. rev. e atual, São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, Marlizete Franco da. **Trigonometria, Modelagem e Tecnologias:** Um estudo sobre uma sequência didática. Belo Horizonte: Dissertação de mestrado do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC – Minas Gerais, 2011.

SIMAS, Fábio et al. **Contribuição da SBM para a discussão sobre currículo de matemática** - Ensino Fundamental II. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Discussao_Curricular_Ensino_Fundamental_II_PROPOSTA.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2017.

SisPAE – (**Sistema Paraense de Avaliação Educacional**). Disponível em: <http://www.vunesp.com.br/sispae_>. Acesso em: 27 fev. 2016.

SOUSA, Francisco Delmar Pinheiro de. **Proposta de atividades para o Ensino de Trigonometria**. Juazeiro do Norte: Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – Universidade Federal do Ceará, 2014.

TEIXEIRA, E. **As três metodologias:** acadêmica, da ciência e da pesquisa. 7. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

VALENTE, José Armando (org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/ Núcleo de Informática Aplicada à Educação-NIED, 1999.

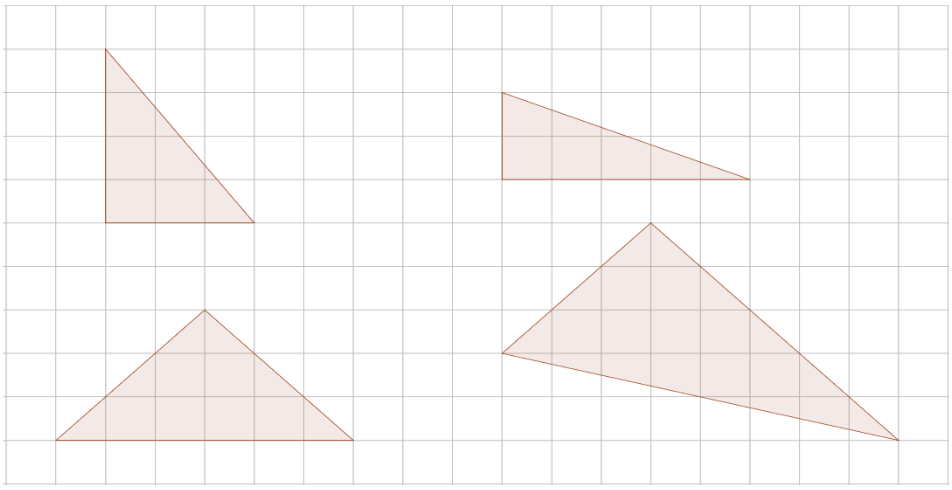
APÊNDICE – Sequência Didática

Atividade 1: O triângulo retângulo

Materiais e recursos: Folha impressa, caneta, computador e o software GeoGebra

1.1. Usando a ferramenta 

construa no GeoGebra os triângulos do quadro abaixo.



1.2. Usando a ferramenta 

determine os ângulos internos de cada triângulo.

1.3. O que esses triângulos têm em comum?

1.4. Como são denominados tais triângulos em relação aos ângulos internos?

1.5. Como são chamados os lados que compõem os ângulos retos?

1.6. Como é denominado o maior lado de tais triângulos?

Atividade 2: Cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa

Materiais e recursos: Folha impressa, lápis e caneta

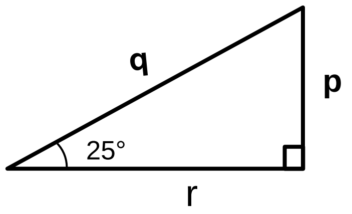
Em cada triângulo dado abaixo, informe os elementos que se pede:

a)

Hipotenusa =

Cateto oposto a 25° =

Cateto adjacente a 25° =

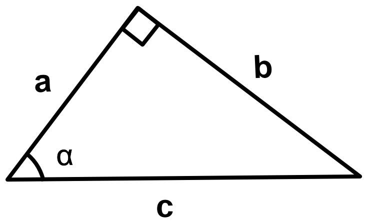


b)

Hipotenusa =

Cateto oposto a α =

Cateto adjacente a α =

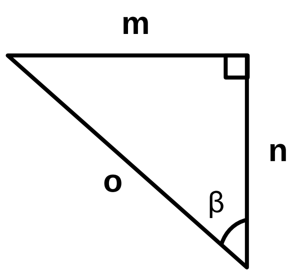


c)

Hipotenusa =

Cateto oposto a β =

Cateto adjacente a β =

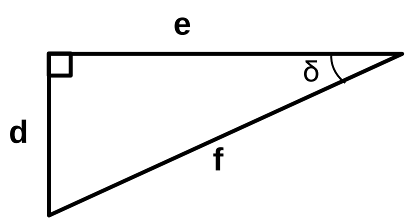


d)

Hipotenusa =

Cateto oposto a δ =

Cateto adjacente a δ =



e)

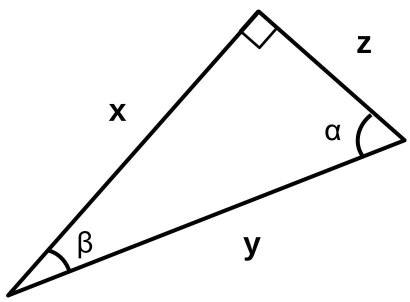
Hipotenusa =

Cateto oposto a α =

Cateto adjacente a α =

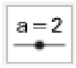
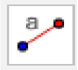
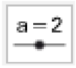
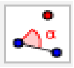
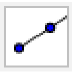
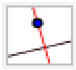
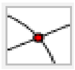
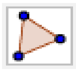
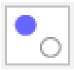
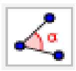
Cateto oposto a β =

Cateto adjacente a β =

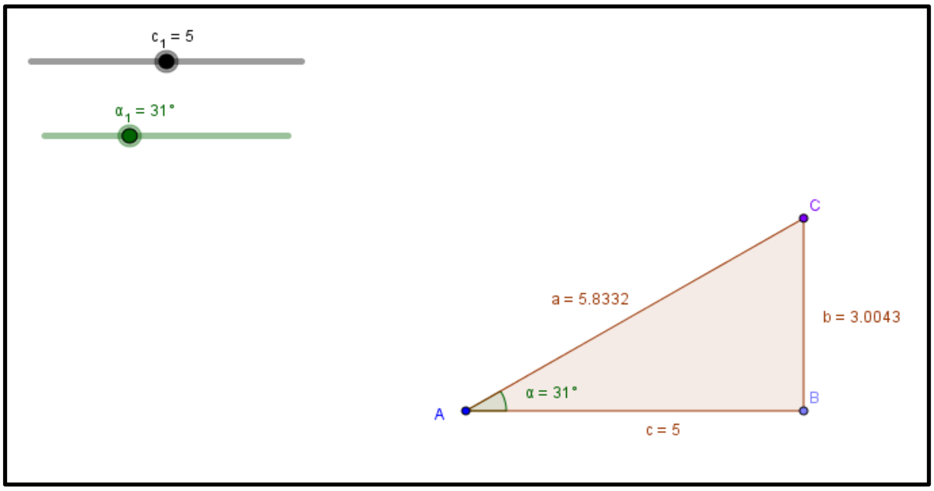


Guia de construção do triângulo retângulo dinâmico

Usando o software GeoGebra (versão 5.0), siga os seguintes procedimentos:

	Ativar **Controle deslizante**. Clicar na janela de visualização gráfica para criar o controle deslizante **c**. Na opção *Número*, digite “c”. Na aba *Intervalo* coloque em mínimo 0, máximo 10 e incremento de 0,0001.
	Ativar **Segmento com Comprimento Fixo**. Clicar na janela de visualização gráfica e digitar “c” na caixa de texto *Comprimento*.
	Ativar **Controle deslizante**. Clicar na janela de visualização gráfica para criar o controle deslizante $\boldsymbol{\alpha}$ (ângulo agudo do triângulo retângulo). Na opção *Ângulo* digitar *“α”* na caixa de texto *Nome*. Na aba *Intervalo* coloque em mínimo 1º, máximo de 89º e incremento de 1º.
	Ativar **Ângulo com Amplitude Fixa**. Clicar no ponto A e, em seguida, digitar “α” na caixa de texto *Ângulo*.
	Ativar **Semirreta**. Clicar no ponto A, depois no terceiro ponto B´ para obter a semirreta AB´ com origem no ponto A.
	Ativar **Reta Perpendicular**. Traçar uma reta perpendicular ao segmento AB que passa por B.
	Ativar **Interseção de Dois Objetos**. Clicar na semirreta AB´ com origem no ponto A e na reta perpendicular ao segmento AB que passa por B, obtendo assim o ponto C.
	Ativar **Polígono**. Construir o triângulo ABC.
	Ativar **Exibir/Esconder Objeto**. Selecionar a reta perpendicular ao segmento AB e a semirreta AB´. Em seguida, clicar no ícone **Apagar**  **.**
	Ativar **Ângulo**. Clicar no ponto A, depois no ponto C e por último no ponto B para obter o ângulo β.
	Selecionar os objetos (ângulos e lados), clicar com o botão direito do mouse e escolher a opção “Propriedade” para renomear os lados e os ângulos do triângulo. Na aba *Básico* selecionar “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo”, nessa última selecionar a opção “Nome&Valor”.

A construção obtida é semelhante à imagem a seguir:



Atividade 3: O seno

Materiais e recursos: Computador, software GeoGebra, lápis, caneta e calculadora

Procedimentos:

Considerando o triângulo retângulo construído no GeoGebra:
a) Escolha uma medida para o ângulo α.

b) Mantendo o ângulo α fixo, mova o controle deslizante **c** e obtenha sete triângulos retângulos com tamanhos diferentes e preencha o quadro abaixo.
(Obs: Considere apenas 4 casas decimais no resultado)

Triângulo *ABC*	**Ângulo α**	**Cateto oposto ao ângulo α (C.O.)**	**(Hipotenusa) (h)**	$\frac{\mathbf{C.O.}}{\mathbf{h}}$
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				
Triângulo 6				
Triângulo 7				

c) Você verificou alguma regularidade nos valores da razão $\frac{C.O.}{h}$? Justifique sua resposta.

___
___
___

d) A razão $\frac{C.O.}{h.}$ depende do tamanho dos triângulos? Justifique sua resposta.

___
___
___
___

e) Ao modificar o ângulo α, a razão entre o *cateto oposto* e a *hipotenusa* se altera? Justifique.

___
___
___
___

f) A que conclusão podemos chegar acerca da razão entre o *cateto oposto* e a *hipotenusa*?

___
___
___
___

Atividade 4: O cosseno

Materiais e recursos: Computador, software GeoGebra, lápis, caneta e calculadora

Procedimentos:

Considerando o triângulo retângulo construído no GeoGebra:

a) Escolha uma medida para o ângulo α.

b) Mantendo o ângulo α fixo, mova o controle deslizante **c** e obtenha sete triângulos retângulos com tamanhos diferentes e preencha o quadro abaixo.

(Obs: Considere apenas 4 casas decimais no resultado)

Triângulo *ABC*	**Ângulo α**	**Cateto adjacente ao ângulo α (C.A.)**	**(Hipotenusa) (h)**	$\frac{\mathbf{C.A.}}{\mathbf{h}}$
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				
Triângulo 6				
Triângulo 7				

c) Você verificou alguma regularidade nos valores da razão $\frac{\mathbf{C.A.}}{\mathbf{h}}$? Justifique sua resposta.

____

____

____

d) A razão $\frac{\mathbf{C.A.}}{\mathbf{h.}}$ depende do tamanho dos triângulos? Justifique sua resposta.

____

____

____

____

e) Ao modificar o ângulo α, a razão entre o *cateto adjacente* e a *hipotenusa* se altera? Justifique.

____

____

____

____

f) A que conclusão podemos chegar acerca da razão entre o *cateto adjacente* e a *hipotenusa*?

____

____

____

____

Atividade 5: A tangente

Materiais e recursos: Computador, software GeoGebra, lápis, caneta e calculadora

Procedimentos:

Considerando o triângulo retângulo construído no GeoGebra:

a) Escolha uma medida para o ângulo α.

b) Mantendo o ângulo α fixo, mova o controle deslizante **c** e obtenha sete triângulos retângulos com tamanhos diferentes e preencha o quadro abaixo.

(Obs: Considere apenas 4 casas decimais no resultado)

Triângulo *ABC*	**Ângulo α**	**Cateto oposto ao ângulo α (C.O.)**	**Cateto adjacente ao ângulo α (C.A.)**	$\frac{\mathbf{C.\,O.}}{\mathbf{C.\,A.}}$
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				
Triângulo 6				
Triângulo 7				

c) Você verificou alguma regularidade nos valores da razão $\frac{C.O.}{C.A}$? Justifique sua resposta.

____

____

____

d) A razão $\frac{C.O.}{C.A}$ depende do tamanho dos triângulos? Justifique sua resposta.

____

____

____

____

e) Ao modificar o ângulo α, a razão entre o *cateto oposto* e o *cateto adjacente* se altera? Justifique.

____

____

____

____

f) A que conclusão podemos chegar acerca da razão entre o *cateto oposto* e o *cateto adjacente*?

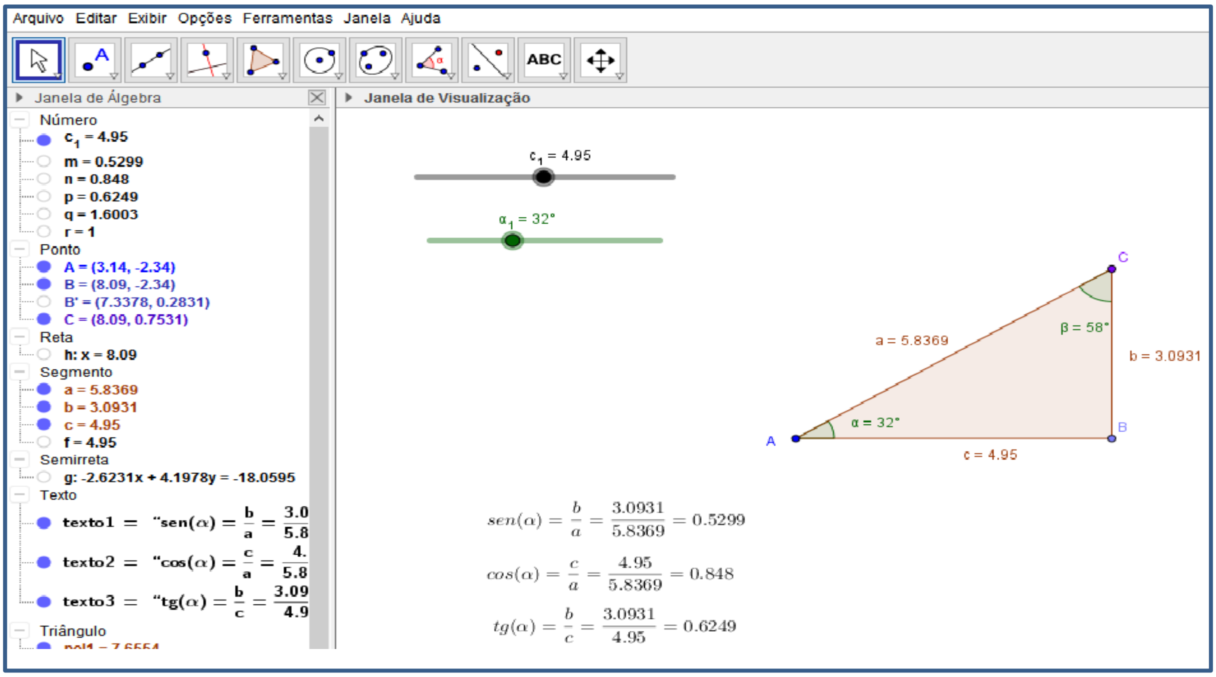
____

____

Guia de construção de uma calculadora trigonométrica

Entrada	Digitar **m = b/a**, em seguida dar "Enter"
Entrada	Digitar **n = c/a**, em seguida dar "Enter"
Entrada	Digitar **p = b/c**, em seguida dar "Enter"
Entrada	Digitar **q = c/b**., sem seguida "Enter"
Entrada	Digitar **r = m² + n²** , em seguida dar "Enter"
	Ativar **texto**. Clicar na janela de visualização gráfica, depois habilitar a opção "Fórmula LATEX". Na caixa de texto "Editar" digite "sen α =", e na aba "Fórmula LATEX" escolha a opção "Raízes e Frações" e selecione *a/b*). Entre chaves, no lugar de *a* digite "b" e no lugar de *b* digite *"a". Em seguida, digite "=", e novamente* na aba "Fórmula LATEX" escolha a opção "Raízes e Fração" e clique em *a/b*). Substitua o "a" pelo objeto "b" (que se encontra na aba "Objetos"), do mesmo modo substitua o "b" entre chaves pelo objeto "a". Depois digite "=" e na aba "Objetos" selecione *m*. E, finalmente, clique em "Ok". Repita o mesmo procedimento para obter as caixas de texto "cos α" e "tg α".

A construção obtida é semelhante à imagem a seguir:



ANEXO – Devolutivas da Prova Brasil (Item 612)

Item Proficiência

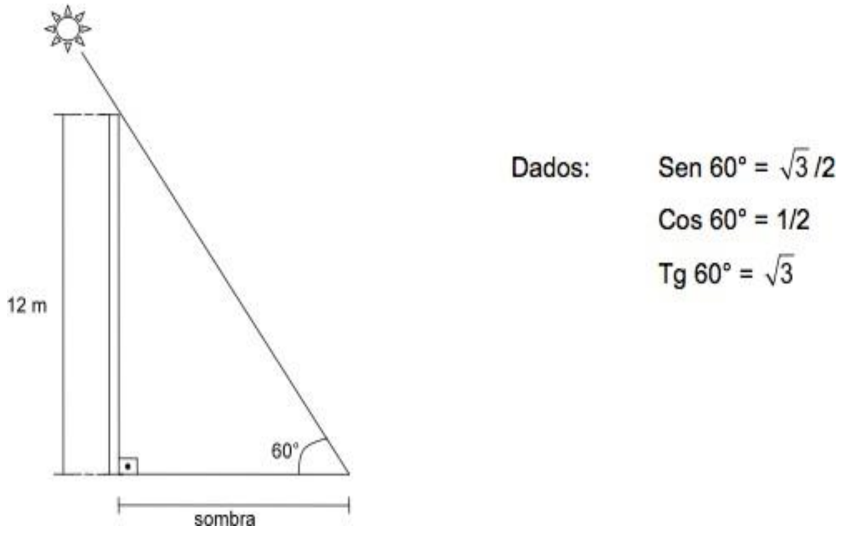
612 375 (/itens_publicados/612)

Habilidades avaliadas
pelo item

Determinar a medida de um cateto de um triângulo retângulo em um problema que envolve aplicação das razões trigonométricas em contexto extramatemático
(/itens_publicados/612)

Item

Um poste de 12 m de altura projeta uma sombra no solo em uma determinada hora do dia, como mostra a figura.



Logo o comprimento da sombra, em metros, é

(A) $\sqrt{3}/3$

(B) $\sqrt{3}$

(C) $2/\sqrt{3}$

(D) $4\sqrt{3}$

(E) $6\sqrt{3}$

Comentário pedagógico

Para a resolução do item, o respondente deve reconhecer que o comprimento da sombra projetada pelo poste corresponde ao comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo. Com base nisso, deve reconhecer os lados do triângulo retângulo (catetos e hipotenusa) e a razão trigonométrica adequada para determinar a medida do cateto que representa a sombra. Como é necessário determinar a medida (chamaremos de x, em metros) do cateto adjacente ao ângulo de 60°, sendo conhecida a medida (12 m) do cateto oposto a este ângulo, então a razão trigonométrica mais adequada é a tangente e o respondente pode proceder da seguinte forma:

$$tg\ 60° = \frac{12}{x} = \sqrt{3}\ \therefore x = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\ .\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

<p>Escolhido por 29% dos respondentes, o gabarito (D) foi a alternativa preponderante a partir do nível 300 da escala de proficiência. Acertaram a resposta 53% dos pertencentes ao grupo com maior desempenho e 14% dos que compõem o grupo com menor desempenho. Desta forma, o item foi capaz de discriminar estes dois grupos.
 O distrator E (23%) foi a opção dos estudantes que, possivelmente, aplicaram erroneamente a razão seno para determinar o comprimento da sombra, como segue:</p> <p style="text-align:center"> </p> <p> $sen\ 60° = \frac{x}{12} = \sqrt{3}\ \therefore x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{3}$ </p> <p> Os estudantes frequentemente cometem este tipo de erro, pois ficam confusos sobre qual o lado do triângulo é o "oposto" e qual é o "adjacente". Há também os que consideram que qualquer razão entre as medidas dos lados pode ser utilizada como seno, cosseno ou tangente.
 O distrator C (19%) pode ter sido a escolha de quem tinha muito pouco ou nenhum conhecimento sobre as relações trigonométricas e apenas considerou o valor inverso de sen 60° como resposta. O B (17%) apresenta o valor exato de tg 60°. Quem optou por essa alternativa, provavelmente, identificou que a razão trigonométrica adequada à resolução é, de fato, a tangente. Porém, não igualou esse valor à razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de 60° e a medida do cateto adjacente. O distrator A (9%) apresenta o valor da tg 30°. Ele, possivelmente, foi a escolha de quem percebeu que o ângulo complementar do apresentado na figura é, de fato, 30°, e considerou que essa seria a resposta.</p>

Estatísticas

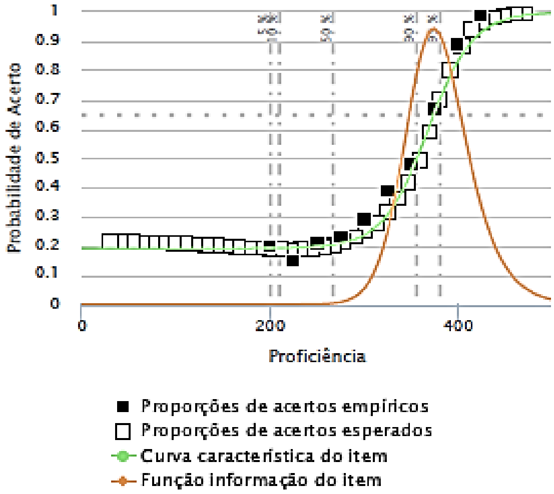
Nível do item na escala: 375
Posição do item na escala: 367

Coeficientes estatísticos clássicos do item

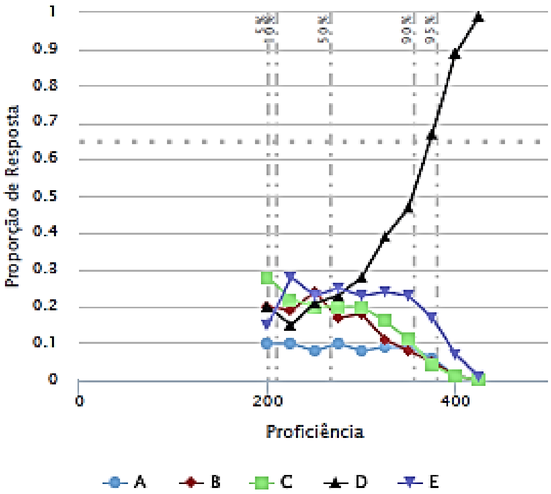
ÍNDICES						PROPORÇÕES DE RESPOSTA					COEFICIENTES BISSERIAIS				
GAB	DIFI	DISCR	ABAI	ACIM	BISSE	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
D	0.29	0.39	0.14	0.53	0.48	0.09	0.17	0.19	0.29	0.23	-0.1	-0.18	-0.15	0.48	-0.07

Gráficos de Teoria de Resposta ao Item (TRI)

Proporção de escolha das alternativas em função da proficiência



Probabilidades de acerto em função da proficiência



Proficiência	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425
Proporções de acertos empíricos	0.2	0.15	0.21	0.23	0.29	0.39	0.48	0.67	0.89	0.99

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/mestradomatematica