Universidade do Estado Do Pará

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Centro de Ciências Sociais e Educação

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Marcel Brito Soares

O Ensino de Probabilidade por meio de Atividades

Belém

2018

Marcel Brito Soares

O Ensino de Probabilidade por meio de Atividades

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará como exigência parcial para obtenção de título de mestre em ensino de matemática.
Área de concentração: Matemática no Ensino Médio.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Belém

2018

Marcel Brito Soares

O Ensino de Probabilidade por meio de Atividades

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará como exigência parcial para obtenção de título de mestre em ensino de matemática.
Área de concentração: Matemática no Ensino Médio.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

Banca Examinadora

____ - Orientador
Prof. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Universidade do Estado do Pará

____ - Membro externo
Prof. Marcos Monteiro Diniz
Doutor em Matemática – Université Pierri et Marie Curie, LISE/CNRS, França.
Universidade Federal do Pará

____ - Membro interno
Prof. Ducival Carvalho Pereira
Doutor em Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Universidade do Estado do Pará

A meus pais, Nilton Soares (em memória) e Domingas Brito, meu filho, Yan Soares, meus filhos Miguel e Lara (em memória), minha esposa Lauriene Lobato, meus irmãos, sobrinhos e amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS! Sem ele, jamais teria conseguido. Muito obrigado Senhor!

A meus familiares, especialmente meu pai Nilton Soares (em memória) e minha mãe Domingas Brito que sempre me apoiaram e incentivaram na minha vida pessoal, profissional e acadêmica.

A meu filho Yan Barros e minha esposa Lauriene Lobato pelo apoio incondicional, compreensão e paciência, sem vocês não teria êxito.

Ao professor Pedro Franco de Sá, suas orientações foram fundamentais para elaboração das atividades e da escrita do texto. Um grande amigo e um profissional admirável pela competência e compromisso com o ensino de Matemática. Muito obrigado, sem você jamais esse trabalho se concluiria de forma digna.

A todos os alunos que participaram do experimento, ao professor Edinaldo Corrêa por colaborar com a realização e, ao meu amigo e compadre Maurício Lobato pelo apoio nos registros no diário de atividades.

A Universidade do Estado do Pará, pela disponibilidade da vaga no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, pela recepção no primeiro dia de aula e pela qualidade da formação recebida no decorrer do curso.

Aos membros da banca avaliadora professores Ducival Carvalho Pereira e Marcos Monteiro Diniz pelas considerações no texto da qualificação que muito contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa e a avaliação do texto final.

A todos os professores do curso que, com seus conhecimentos, contribuíram com uma formação de qualidade nas disciplinas. Especialmente aos professores Cínthia Pereira, Fábio Alves, Francisco Hermes, José Roberto, Miguel Chaquian, Maria de Lurdes, Natanael Cabral e Pedro Sá.

A Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC), por me conceder licença aprimoramento para a realização do curso.

A funcionária Glads Serra do PPGEM e ao coordenador Ducival Carvalho Pereira que contribuíram com as questões administrativas do curso.

Aos amigos da turma de 2015, especialmente, José Maria Lobato, Janir Maués e Welington Carvalho por compartilharem conhecimentos e momentos de descontração nas viagens de Abaetetuba para Belém e a professora Benedita das Graças que contribuiu com a análise estatística dos dados.

RESUMO

SOARES, Marcel Brito. **O ensino de Probabilidade por meio de atividades**. 2018. 294 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de Probabilidade por meio de atividades sobre os aspectos conceituais e desempenho da resolução de questões envolvendo o assunto. A parte experimental da pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública federal de Abaetetuba/PA com 20 alunos do 2º ano do Ensino Médio, adotou-se como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática. A análise dos resultados se deu pelo registro dos discentes nas atividades, confrontação das análises a priori e a posteriori, pela comparação entre os resultados do pré-teste com o pós-teste, análise dos erros ocorridos no pós-teste, bem como pela aplicação do Coeficiente de Correlação Linear de Pearson e do Teste de Hipótese. Os resultados da comparação apontaram aumento nas notas do pós-teste; o teste de hipótese comprovou que as notas do pós-teste tiveram melhora estatisticamente em relação ao pré-teste e a análise das correlações mostrou que nenhum dos fatores socioeconômicos levantados teve interferência direta nos resultados obtidos, constatando que o bom resultado do experimento deveu-se sobretudo à metodologia utilizada.

Palavras-chave: Ensino. Engenharia Didática. Ensino de Matemática. Ensino de Matemática por Atividades. Ensino de Probabilidade por Atividades.

ABSTRACT

SOARES, Marcel Brito. **The teaching of probability through activities**. 2018. 294 f. Dissertation (masters in mathematics education) – University of the state of Pará, Belém, 2018.

This thesis presents the results of a research with the objective of measure the effects of a didatic sequence to the teaching of probability by activities about the conceptual aspects and performance in solving issues involving the subject. The experimental part of the research was developed at a federal public school in Abaetetuba / PA with 20 students of 2^{nd} year of high school, was adopted as a research methodology the Didactic Engineering. The analysis of the results was based on registration of students in activities, the analysis of a priori and a posteriori analyzes, by the comparison between the results of the pre-test and the post-test, analysis of the errors occurred in the post-test, as well as the application of the Pearson Linear Correlation Coefficient and the Hypothesis Test. The results of comparison pointed to an increase in post-test scores; the hypothesis test proved that the post-test scores improved statistically in relation to the pre-test and the analysis of the correlations showed that none of the socioeconomic factors raised had direct interference in the results obtained, noting that the good result of the experiment was mainly due to the methodology used.

Keywords: Teaching. Didatic Engineering. Teaching of Mathematics. Teaching of Mathematics by Activities. Teaching of Probability by Activities.

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Dentre variados conhecimentos importantes para o exercício da cidadania, a educação matemática, bem como a probabilidade, agregam relevância para o desenvolvimento cognitivo, reflexivo e social do indivíduo. Dificuldades relacionadas ao seu aprendizado são oriundas de seu caráter seletivo caracterizado desde os primeiros anos de sua sistematização e implantação nas escolas (SÁ, 2009, p.14). Neste sentido realizam-se pesquisas que busquem soluções para o processo de ensino e aprendizagem desse saber na formação de um indivíduo cada vez mais dinâmico e participativo na sociedade.

A probabilidade trata dos acontecimentos de natureza aleatória, foi desenvolvida a partir dos jogos de azar, de acordo com Mlodinow (2009, p. 50) "O livro dos jogos de azar, foi o primeiro na história a tratar da teoria da aleatoriedade", tornando-se no decorrer dos anos uma teoria sistematizada utilizada nas várias áreas do conhecimento como ferramenta de compreensão e análise de resultados. Seus conceitos são fundamentais para compreender questões no âmbito social ou em questões críticas e reflexivas, que exijam do estudante compreender os eventos aleatórios, a interpretação de dados em gráficos ou em tabelas, tomadas de decisões a fim de compreender melhor o mundo globalizado. Segundo Fernandes et al. (2015)

> Cada vez mais a visão probabilística do mundo se tem tornado mais proeminente nos tempos atuais, recorrendo-se a aplicação dos métodos probabilísticos para a resolução de problemas dos mais variados setores da sociedade, incluindo outras ciências e as suas aplicações. (FERNANDES et al., 2015, p.43)

Não obstante, de nossa experiência docente observamos que o não aprendizado deste conteúdo tem contribuído para uma visão determinista de mundo, interferindo sobre a formação crítica e reflexiva de nossos estudantes, esta que prepara o educando para a vida pessoal e profissional, além disso, o aprendizado da probabilidade serve de apoio para o desenvolvimento da capacidade crítica e da autonomia dos estudantes, partindo do pressuposto de que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos auxiliando na tomada de decisões.

A escolha deste tema partiu das dificuldades encontradas em minha pratica docente, pois como professor comecei em 2005 em turmas de 2º e 3º anos do ensino médio pelo Sistema Modular de Ensino (SOME) da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Pará e, por se tratar de um conteúdo pouco estudado em minha formação inicial (ensino fundamental e médio), estudei apenas quando fiz um cursinho preparatório para o vestibular no ano de 2000, também na graduação não estudei uma disciplina que contemplasse o assunto em questão, na especialização fiz uma disciplina que contemplou bastante análise combinatória e quase nada de probabilidade. Por estas dificuldades, escolhi o tema em questão por se tratar de um assunto considerado difícil, mas que desperta bastante interesse e motivação para a pesquisa.

Nossa pesquisa foi elaborada a partir dos pressupostos da Engenharia Didática que é uma **metodologia** de pesquisa que pressupõe a aplicação sistematizada de métodos que associem teoria e experiência da pesquisa em didática da matemática, segundo Carneiro (apud SÁ e ALVES, 2011) relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor articulada com a prática de investigação, tendo como referência as relações entre docentes, discentes e o conhecimento no ambiente de sala de aula, abrangendo tanto processos específicos como transversais à conteúdo.

Segundo Artigue (1996) a engenharia didática se singulariza pela experimentação na sala de aula pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados, seguindo as seguintes etapas respectivamente: (a) analises previas; (b) concepções e analises a priori das situações didáticas da engenharia; (c) experimentação e (d) analise a posteriori e validação.

Nas **Analises Previas** é constituído o referencial teórico para fundamentar a elaboração da sequência didática a ser desenvolvida, nesta, segundo Artigue (1996), descreve-se o fenômeno a ser estudado através de uma análise epistemológica dos conteúdos que são objetivados pelo ensino; análise das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos dos discentes a realização da investigação; posto que a etapa em questão tem como objetivo identificar os problemas do ensino e aprendizagem do objeto de estudo afim de delimitar teoria e metodologia segundo as necessidades da investigação.

Neste sentido, realizamos uma investigação com o intuito de analisar as recomendações sobre ensino de probabilidade nos parâmetros curriculares nacionais de matemática para o ensino fundamental e médio; nas matrizes de referência do exame nacional do ensino médio(ENEM), sistema paraense de avaliação(SISPAE) e sistema nacional de avaliação da educação básica(SAEB).

Ainda nas análises prévias, fizemos uma revisão de estudos sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade no ensino médio- a partir de pesquisas em bancos de dados de universidades do Brasil em busca de trabalhos realizados no campo do ensino de probabilidade, um estudo sobre os aspectos históricos da probabilidade, uma fundamentação matemática e, uma pesquisa de campo com a utilização de questionários e questões envolvendo probabilidade, realizada com alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola pública estadual de Abaetetuba-PA.

A **concepção e analise a priori das situações didáticas da engenharia**, segunda fase da metodologia, tem como objetivo a elaboração e análise de uma sequência de atividades que serão desenvolvidas para um conteúdo em questão. Esta sequência de atividades é denominada de sequência didática, construída com base nos resultados obtidos nas análises prévias e mediante as competência e habilidades executadas pelos alunos e esperados pelo pesquisador sobre o conteúdo investigado.

Para a construção e desenvolvimento da sequência didática adotamos o ensino de matemática por atividades, definido por Sá (2009), na intenção de proporcionar, de acordo com o nível do aluno, momentos de construção do conhecimento, por meio da redescoberta e execuções de ações, princípios e propriedades matemáticas. Nessa perspectiva, foram elaboradas 12 atividades, acerca do estudo de probabilidade, com as devidas descrições dos procedimentos a serem realizados e espaços para os registros referentes ao resultado do experimento, das primeiras descobertas e das conclusões alcançadas.

A sequência didática tem como objetivos principais: desenvolver habilidades de registro, leitura e interpretações de informações; de identificação de conhecimentos matemáticos; construções de enunciados e procedimentos relativos ao conhecimento em estudo.

A **Experimentação,** terceira fase da metodologia, é o momento da aplicação das atividades propostas pela sequência didática previamente analisada, tendo como foco a sala de aula onde foram realizadas as “sessões” com a turma e os devidos registros, procurando sempre comparar o ocorrido e o planejado após cada intervenção.

Segundo Machado (apud SÁ e ALVES, 2011), esta fase segue as seguintes execuções: clareza e condição de realização dos objetivos em nível dos alunos que participarão do experimento; estabelecimento do contrato didático; aplicação dos instrumento de pesquisa; registro das observações durante a experimentação.

Nesta etapa, será apresentado o perfil socioeconômico dos alunos, levantado por meio da aplicação de um questionário no primeiro dia da experimentação, seguida da descrição de como ocorreu *in loco* a implementação da proposta planejada na fase anterior, ou seja, desde a aplicação de um pré-teste, o desenvolvimento da sequência, bem como a aplicação do pós-teste. O diário de atividades foi um dos instrumentos utilizados para registrar as informações obtidas no decorrer da investigação que não estiveram presentes nos teste, nas atividades nem nos questionários.

A ***Análise a posteriori e validação*** é o momento de confrontar os resultados produzidos na experimentação com o previsto e descrito na etapa da análise *a priori*, tendo como intenção amadurecer os argumentos que justifiquem o experimento. Para tanto, segundo Machado (apud SÁ e ALVES, 2011) o relatório descritivo da experimentação é de suma importância, podendo ser complementado por entrevista, questionários ou outros meios que nortearão a construção do protocolo da pesquisa.

A análise dos dados iniciou com a comparação do percentual dos números de acertos, erros e em branco das questões nos pré-teste e pós-teste. Estes dados foram organizados em tabelas e gráficos, com o intuito de verificar se houve ou não alteração significativa nas notas obtidas nos dois testes.

Em seguida, foram verificados os erros obtidos pelos discentes no pós-teste, foram considerados os erros na identificação dos espaços amostrais e de eventos, na utilização dos conceitos ou se os erros estavam relacionados na realização dos cálculos envolvidos nas questões.

A análise também teve embasamento estatístico, desenvolvido pelo coeficiente de Correlação Linear de Pearson, o qual pretendeu verificar se os fatores socioeconômicos levantados no início do experimento, como exercer atividade remunerada; escolaridade dos pais; dificuldades e notas obtidas em matemática e distração nas aulas de matemática tiveram alguma influência nos resultados.

Outra análise estatística, deu-se pela aplicação do teste de hipótese para dados pareados. Com o objetivo de avaliar se, estatisticamente, era possível tirar conclusões favoráveis ao experimento com base na diferença das notas dos participantes nos testes.

Desta feita, nossa questão de pesquisa é a seguinte:

Que efeitos o desenvolvimento de uma determinada sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de probabilidade em uma turma de 2º ano do ensino médio de uma escola pública de Abaetetuba, provoca sobre a participação em aulas de matemática e no desempenho da resolução de questões envolvendo probabilidade?

Diante da questão de pesquisa acima, temos como objetivo geral avaliar os efeitos de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de Probabilidade por meio de atividades, especificamente: 1) **Avaliar a participação de alunos de uma turma de 2º ano de uma escola pública de Abaetetuba em aulas de matemática sobre os aspectos conceituais de probabilidade durante o desenvolvimento de uma sequência didática diferente da tradicional**; 2) **Avaliar os efeitos do desenvolvimento de uma sequência didática, diferente da tradicional, sobre desempenho de alunos de uma turma do ensino Médio de uma escola pública de Abaetetuba da resolução de questões sobre probabilidade.**

A seguir, apresentaremos os estudos e levantamentos correspondente às análises prévias.

2. ANÁLISES PRÉVIAS

Nesta seção apresentaremos um estudo sobre a Probabilidade no Currículo da Educação Básica com a análise dos PCN do ensino fundamental e médio as Matrizes de referência do Exame Nacional do Ensino Médio(ENEM), Sistema Paraense de Avaliação(SISPAE) e Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica(SAEB), em seguida, exporemos os resultados das análises prévias, constituídos pelos Estudos Sobre o Ensino de Probabilidade separados por categorias em estudos Diagnósticos, estudos Teóricos/Investigativos e estudos Experimentais, bem como uma Fundamentação Matemática apresentado conceitos, definições, propriedades e axiomas sobre probabilidade e ainda um diagnóstico sobre o Ensino de Probabilidade Segundo Estudantes do Ensino Médio. Estas etapas serão descritas de forma sequencial a seguir:

2.1 Probabilidade no Currículo

Ao versar sobre o ensino da matemática é necessário entender a importância deste conhecimento na formação do indivíduo no tocante a compreensão e participação no mundo, caracterizado pela sua interação entre os aspectos naturais, culturais e sociais, bem como seu caráter de abstração, raciocínio lógico e suas aplicações em nosso cotidiano e em diversas áreas. Em relação ao ensino de Probabilidade, embora seja um tema presente no currículo da educação básica de nosso país, tem sido mostrado por pesquisadores não ser um assunto simples de ser ensinado e apreendido pelos estudantes.

Fischbein (apud FERNANDES et al., 2015, p.43) “atribui mesmo à visão determinista do mundo, que tem sido largamente dominante na escola, desde a época do renascimento, a origem das dificuldades que as pessoas enfrentam em probabilidades[...]”. Neste sentido, para compensar tal visão determinista, os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática recomendam que desde os primeiros anos de escolaridade o ensino de probabilidade seja oferecido nas escolas, tendo como objetivo:

> [...] a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços amostrais equiprováveis) (BRASIL,1998, p.52).

Para tanto, há de se considerar uma série de significados entrelaçados precisando ser apreendido para que ocorra um efetivo aprendizado. Batanero (2001), Batanero e Godino (2002) (apud CAZORLA et al., 2011) reforçam que: “para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico é necessário que o aluno vivencie atividades que possibilitem: a percepção do acaso; a ideia de experiência aleatória e a noção de probabilidade”

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, o raciocínio probabilístico também é uma das finalidades recomendas para os anos finais do Ensino Fundamental, sua implementação sugeri exploração de situações de aprendizagem que conduzam o aluno a assimilar conceitos de eventos, espaço amostral e estimativas de probabilidade. No Ensino Médio, os estudantes devem apreender que a probabilidade é uma medida de incerteza e que está presente em nosso dia-a-dia, principalmente nos meios de comunicação, isto é:

> Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descreve-las em termos de eventualidades, associa-las a um conjunto de eventos elementares e representa-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipótese de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatísticas das frequências para estimar a probabilidade de um evento dado. (BRASIL,2006, p.80)

O Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) em sua Matriz de referência de Matemática e suas tecnologias, a probabilidade está inserida na competência de área 7: compreender o caráter aleatório e não – determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística de forma específica nas habilidades:

> H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
> H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para construção de argumentação.
> H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade. (BRASIL, 2012, p.7)

Em âmbito Estadual, o Pará implementou o Sistema Paraense de Avaliação Educacional – SISPAE, com a finalidade de avaliar de forma mais especifica o grau de aprendizado dos estudantes paraenses nas disciplinas de Matemática e de Língua Portuguesa. A Matriz do SISPAE – 2014, trata da probabilidade no tema tratamento da informação na MPA61: – Resolver problemas que envolvam ideias básicas de probabilidade - direcionado para o 8º e 9º anos do ensino fundamental e no ensino médio, na MPA33 – Resolver problemas que envolvam probabilidades - no 2º ano, também no tema tratamento da informação.

No Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, a matriz de matemática está estruturada por anos e séries, sendo definido os descritores, estes organizados e agrupados por temas educacionais, indicando uma determinada habilidade que deve ter sido desenvolvida nessa fase de ensino. A Probabilidade, está inserida no tema III Números e Operações/Álgebra e Funções e no descritor D33 Calcular probabilidade de um evento.

Portanto a probabilidade está inserida em documentos oficiais de nosso país desde o ensino fundamental, sua importância se dá com base no fato de auxiliar na capacidade de raciocínio, abstração e prevenção, contribuindo para a formação de cidadãos atuantes de forma expressiva em suas comunidades/sociedade, implicando numa formação em que o indivíduo possa entender melhor o seu cotidiano, a natureza dos acontecimentos sociais, participando de forma efetiva em sua sociedade.

2.2. Estudos Sobre o Ensino de Probabilidade

Nesse momento apresentaremos os resultados de um estudo sobre o ensino de probabilidade, realizado com vista a obter informações necessárias ao desenvolvimento e construção da pesquisa, as tendências Temáticas e os enfoques teóricos e metodológicos, indicando os caminhos que estão sendo trabalhados pela pesquisa.

A busca pelos trabalhos adotou as seguintes etapas:1) busca pelo título de publicações nos bancos de dados do Google Acadêmico, Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior – CAPES, PUC - SP e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, com as seguintes palavras chaves: “probabilidade no ensino médio” e “Ensino de probabilidade” “dissertação” “PDF”. Vale ressaltar as pesquisas e resultados consultados nos bancos de dados do Programa de Pós-Graduação, tanto em nível de Mestrado como de Doutorado, selecionados seguindo os critérios:1) publicados a partir de 2011; 2) está vinculado a uma instituição de ensino superior, ou similar com caráter acadêmico. O quadro abaixo mostra os trabalhos que foram utilizados neste momento da pesquisa.

Quadro 1 – Estudos sobre o ensino de probabilidade

(Continua)

NATUREZA DO TRABALHO	AUTOR (ES)	TEMA	EVENTO/ INSTITUIÇÃO/ PERIÓDICO
Dissertação	Santana(2011)	O Acaso, o Provável, o Determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental	Universidade Federal de Pernambuco
Dissertação	Ribeiro(2012)	Uma proposta de ensino de probabilidade no ensino médio	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Dissertação	Biajot(2013)	Experimentos probabilísticos: noções de probabilidade no ensino fundamental II	Universidade Federal de São Carlos
Dissertação	Silva(2013)	Jogos no Processo de Ensino - Aprendizagem de Probabilidade	Universidade Federal de São Carlos
Dissertação	Duarte(2013)	Introdução à Estatística e Probabilidade: uma abordagem contextualizada no cotidiano dos alunos	Universidade Federal do Ceará
Dissertação	Gondim(2013)	Probabilidade e probabilidade geométrica: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino médio	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Dissertação	Lima(2013)	O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos	Universidade Federal de São Carlos
Dissertação	Moraes(2014)	Ensino de probabilidade: historicidade e interdisciplinaridade	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Dissertação	Silva(2014)	A Estatística e a Probabilidade nos Currículos dos Cursos em Licenciatura de Matemática no Brasil	Universidade Federal de Pernambuco

Conclusão

Dissertação	Moreira(2015)	Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula do Ensino Médio	Universidade Estadual de Campinas
Dissertação	Neves(2015)	Ensino de probabilidade: Tipos de Eventos	Universidade Federal do Pará
Dissertação	Nunes(2015)	A Utilização dos Jogos Lotéricos Para o Ensino de Probabilidade no Ensino Médio	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Dissertação	Oliveira(2015)	Análise do Ensino de probabilidade	Universidade Federal do Pará
Dissertação	Caberlim(2015)	Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Dissertação	Silva filho(2016)	Probabilidade e Valor Esperado Discussão de Problemas para o Ensino Médio	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Fonte: Pesquisa Bibliográfica

Para tanto, foram organizados e analisados em categorias distribuídos em:

1) **Estudos diagnósticos:** estudos que tem como objetivo analisar dados referentes ao processo de ensino e aprendizagem da probabilidade, tais como dificuldades dos discentes no aprendizado de probabilidades e, depois trata-las durante o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade.

2) **Estudos experimentais:** os quais apresentam trabalhos no sentindo de propor atividades que possam contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno no ensino de probabilidade.

3) **Estudos teórico/investigativos:** apresentam uma sequência de investigação conceitual com o intuito de colaborar para o processo de ensino e aprendizado da probabilidade.

2.2.1. Estudos Diagnósticos

Iniciamos com o trabalho de Oliveira(2015) que teve por objetivo: “[...] compreender a relação aluno versus aprendizado de probabilidade... [...]” (OLIVEIRA,2015, p.1). Como metodologia de pesquisa utilizou um questionário direcionado aos alunos com perguntas de cunho social e educacional contendo 16 itens com o intuito de obter informações referentes a idade, gênero, série, quanto ao gosto pela matemática, e frequência no estudo da disciplina fora da escola, além de perguntas que visavam a respeito da metodologia de ensino utilizada pelos professores de matemática ao ministrarem os conteúdos programáticos.

Em seguida as indagações aconteceram de forma específica para probabilidade, questionando os alunos sobre seus sentimentos em relação ao assunto, classificando os tópicos de probabilidade em: muito fácil, fácil, difícil, muito difícil. O questionário foi aplicado a 80 alunos concluintes do ensino médio de uma escola pública estadual do bairro de Nazaré da cidade de Belém- Pará.

De maneira geral o trabalho apresentou que os problemas de aprendizagem, em relação ao assunto probabilidade, são enormes e que novas técnicas e novas maneiras de se tratar o conteúdo, com os educandos, devem ser experimentados, com o intuito de melhorar o entendimento desses conceitos, que são tão importantes para o dia-a-dia do cidadão.

Oliveira(2015) deixa como sugestão uma sequência de atividades que poderá ser utilizado pelos professores ao trabalharem o conteúdo de probabilidade dando ênfase a melhorar o aprendizado dos alunos de maneira dinâmica, utilizando material concreto como apoio.

Neves (2014), analisou o Ensino da Probabilidade: Tipos de Eventos Com objetivo de: “[...] verificamos o conhecimento deste assunto por parte dos alunos concluintes do ensino médio em algumas escolas públicas do estado do Pará [...]”. (NEVES, 2014, p.11).

O referido estudo diagnóstico baseado na análise de questionários e dos livros didáticos utilizados no ensino médio direcionou aos alunos perguntas de cunho social e educacional e também, contendo 13 questões específicas de probabilidade com o intuito de obter informações sobre o aprendizado dos alunos em: espaço amostral, evento, definição de probabilidade, probabilidade de eventos certos e impossíveis, probabilidade de eventos complementar e outros.

O autor concluiu que os resultados encontrados estão muito longe do ideal, o que reflete o grande “déficit” dos alunos nos conhecimentos sobre probabilidade, além de não terem um acompanhamento necessário para ajudá-lo em casa em suas tarefas. Após analisarem os questionários perceberam que, em média, os alunos obtiveram menos de 15% de índice de acerto para cada questão.

Neves(2014) notou que os alunos concluintes do ensino médio não estão preparados para resolver as questões do Enem, sofrendo bastante com a utilização da metodologia tradicional em sala de aula. Verificou também, as limitações apresentadas pelos livros didáticos em relação a probabilidade, deixando como sugestão uma proposta de material para o ensino e aprendizado de probabilidade:

> [...]uma proposta de intervenção, complementar, contendo uma série de atividades, com dinâmicas e materiais concretos, com planos de ensino acompanhado de um material para o professor com conteúdo específico, repleto de exercícios contextualizados, de fixação e questões do ENEM, com aplicações desde jogos de azar até situações problemas do cotidiano dos alunos; todo material com as devidas orientações aos professores. (NEVES, 2014, p.89)

Caberlim (2015) desenvolveu um estudo de Letramento Probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos.

> O objetivo do trabalho foi diagnosticar invariantes operatórios mobilizados pelos alunos em situação de resolução de problemas, para que busquemos elementos para identificar o letramento probabilístico desses alunos. (CABERLIM,2015, p.17)

Foi formulado uma questão problema para nortear o objetivo planejado:

> Que elementos do letramento probabilístico identificaram na mobilização de invariantes operatórios por aluno do 3 ano do ensino médio, ao resolverem problemas que articulassem o enfoque clássico e frequentista do conceito de probabilidade? (CABERLIM,2015, p.18)

Para alcançar o objetivo e responder a questão de pesquisa a autora utilizou a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990, 1998) articulado com o letramento probabilístico proposto por Gal (2005).

Um estudo de caso foi utilizado como metodologia de pesquisa, tendo como sujeitos de pesquisa alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola da rede privada da cidade de São Paulo. De uma turma de 25 alunos, participaram, inicialmente 15 alunos, sendo escolhidos sete destes para avaliação dos protocolos.

As atividades foram realizadas em dupla e trio, com o intuito de promover as discussões entre as equipes e se necessário a institucionalização dos conceitos, sendo desenvolvido em horários acordados antecipadamente, entre a pesquisadora e os participantes, propiciando assim a interação entre as equipes para que houvesse uma análise mais profunda sobre a mobilização dos invariantes operatórios em cada atividade.

A autora descreveu um cenário para cada atividade aplicada, com objetivo de introduzir o conceito de probabilidade, tendo como pressuposto que os alunos já tinham conhecimentos prévios de probabilidade. Separadas em: Situação “A”, situação “B” e situação “C”. Ressaltando que para realização das três situações foi necessário distinguir três estágios: o concreto, pseudo-concreto e o abstrato.

A situação “A” foi uma atividade de cunho introdutório para que os alunos pudessem distinguir experiências reprodutíveis e não reprodutíveis e reconhecerem uma experiência aleatória. Em seguida, a autora trabalhou o reconhecimento da configuração da “Urna de Bernoulli” em experiência aleatória.

A situação “B” foi uma atividade que relacionou a probabilidade clássica com a probabilidade geométrica. Esta atividade foi oferecida a partir de um desenho construído com Cabri-Geomètre II, seguidas de três perguntas que relacionavam as medidas dos comprimentos dos lados de um retângulo e das suas respectivas áreas.

O software Cabri-Geomètre II e a planilha eletrônica Excel, foram utilizadas como ferramenta para simulações de experimentos aleatórios e a verificação da frequência estabilizada de sucessos obtidos pelo dispositivo, relacionando assim o enfoque geométrico com o frequêntista.

Atividade “C” através do jogo Franc-Carreau, por meio do software Cabri-Geomètre consistiu em implementar as simulações do experimento aleatório “sortear um pixel ao acaso e observar a região do retângulo no qual ele se localiza” teve como foco observar invariantes operatórios mobilizados pelos alunos nas atividades anteriores como o raciocínio proporcional e espaço amostral.

Para a autora, a participação e os questionamentos dos alunos na identificação do que era proposto nas atividades, implicou num desenvolvimento dos alunos em probabilidade no nível básico, principalmente no letramento probabilístico, e a utilização do software surtiu como facilitador na identificação dos invariantes operatórios e para os alunos na resolução das atividades.

Contudo Caberlim(2015) enfatizou a importância da abordagem articulada de probabilidade nos termos clássico e frequentista, de forma diferenciada o geométrico. E também, sugeriu para que sejam feitas pesquisas nas licenciaturas em matemáticas abordando o enfoque clássico e o frenquentista e a realização de uma pesquisa empírica, com o intuito de generalizar os invariantes operatórios de letramento probabilísticos.

Santana (2011) em sua pesquisa: “O acaso, o Provável, o Determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental”. Centrado no objetivo geral de: “Analisar concepções e conhecimentos de professores do Ensino Fundamental sobre Probabilidade”. Buscando como objetivos específicos:

> Identificar como professores da rede pública concebem na importância do ensino de probabilidade; levantar os motivos que apresentam para trabalhar, ou não, este conceito em suas salas de aula; Analisar conhecimentos identificados por professores de diferentes níveis de ensino; Verificar que noções os professores consideram ser necessárias na construção do conceito de probabilidade. (SANTANA,2011, p,14).

A metodologia de pesquisa, utilizada por Santana(2011), foi de cunho qualitativa, tendo como mecanismo para levantamento dos dados a entrevista semi-estruturada, e a análise de conteúdo, ocorrendo análise de atividades sobre o ensino de probabilidade, com o intuito de inferir sobre o que os professores dos anos iniciais do ensino fundamental e professores dos anos finais do ensino fundamental concebiam sobre o ensino de probabilidade.

Segundo Santana(2011) os professores do ensino fundamental, ao menos os de sua amostra, exploram muito pouco os conceitos probabilísticos, justificando pela falta de uma formação acadêmica inicial que os orientasse para que incorporassem saberes e práticas relativas aos conhecimentos de probabilidade, e também a abordagem nos livros didáticos não oferecer subsídios para se trabalhar com o referido conteúdo.

Contudo, ficou evidenciado, segundo a autora, a falta de preparo que muitos professores sentem para explorar o conteúdo de probabilidade, por conta da compreensão dos conceitos inicias, da fragilidade mostrada no entendimento dos conceitos de fenômeno aleatório, evento, espaço amostral e acaso.

Desta feita, sugeriu a necessidade de mais pesquisas acadêmicas relacionadas ao ensino de probabilidade e suas noções básicas e a instrumentalização dos cursos de formação inicial e continuada na construção de estratégias que fomentem o trabalho com o aleatório para a introdução ao conceito de probabilidade, de forma que o professor adquira autonomia para formular e executar uma organização matemática e didática desse conteúdo visando a escola básica e dando condições de proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa.

Silva (2014) investigou a Estatística e a Probabilidade nos Currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. Com objetivo de:

> -Analisar nos currículos dos cursos presenciais de Licenciatura em Matemática no Brasil a formação para o ensino da Estatística e Probabilidade, mais especificamente: - Identificar os cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil que contemplam em seus currículos a formação para o ensino da Estatística e Probabilidade;
>
> -Verificar se os componentes curriculares de formação conceitual em Estatística e Probabilidade estão presentes nas matrizes curriculares desses cursos de forma obrigatória; - Verificar componentes curriculares que contemplem a Educação Estatística;
>
> -Verificar nos componentes curriculares de educação e relativos à prática pedagógica, tais como de: currículo, didática, epistemologia, história e filosofia, pesquisa ou metodologia da pesquisa, prática/estágio, psicologia, tecnologia, aspectos diferenciados que possam influenciar na formação do professor para ensinar Estatística;
>
> -Verificar nos comentários e nos Projetos Políticos Pedagógicos (PPP) a preocupação com princípios tais como: a pesquisa, a contextualização e a interdisciplinaridade, incorporadas ao ensino e aprendizagem dos componentes da Estatística e Probabilidade;
>
> -Identificar os conteúdos estatísticos e probabilísticos abordados pelas disciplinas e verificar se existe consenso sobre os conteúdos a serem abordados pelas IES; - Verificar a integração de ensino entre as disciplinas de Estatística e Probabilidade;
>
> -Verificar a preocupação com o uso de softwares, como mediadores no processo ensino e aprendizagens; (SILVA, 2014, P.25).

Seu estudo fundamentou-se na pesquisa de cunho estatístico e documental, baseado em uma análise de conteúdo, este segundo Silva (2014, apud BARDIN, 1977) sendo um conjunto de ferramentas que auxilia metodologicamente e melhora de forma constante, podendo ser aplicada a diferentes formas práticas.

E segundo a autora é um acervo de procedimento de análise das comunicações que, através de uma decisão objetiva, sistemática e quantitativa do assunto manifesto das comunicações, tem por intenção a acepção dessas mesmas comunicações.

A autora concluiu que a falta de enumerações nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura em Matemática, dê conteúdos que devam ser ensinados, falando apenas que devem ser trabalhados os assuntos dos Ensinos Fundamental e Médio, faz com que cada IES eleja os conteúdos a serem abordados assim como, quanto, quantidade de horas aula destinados ao assunto. E nesse argumento observa-se ainda a falta de um acordo entre as IES. Abordaram os elementos da estatística e da probabilidade em todas as IES, em tópicos de assuntos em disciplina única, e em componentes separados.

E segundo a autora não foi possível analisar se a reunião acontece apenas em tópicos de componentes em comum ou se as IES têm a preocupação com a agregação de ensino entre as disciplinas de Estatística e Probabilidade, não sendo possível entender se os elementos de cunho estatístico dão ênfase nas análises inferenciais ou apenas análises descritivas.

Desta feita, sugeriu como novas pesquisas podem contribuir para entendermos as práticas no ensino da Estatística e Probabilidade, compreendendo como os princípios da Educação Estatística localizados nos currículos analisados são utilizados, assim como, examinar o uso de softwares para esse assunto, uma vez que, comprovando Silva (2014, apud BEN-ZVI, 2011), a disciplina da Estatística e da Probabilidade deve se dá numa total coesão entre conteúdo-pedagogia-tecnologia.

Vale ressaltar a contribuição destes estudos com nossa pesquisa, pois nos proporcionou um melhor entendimento do nosso objeto de estudo, mostrando a necessidade de desenvolvermos estratégias de ensino, a utilização de recursos teóricos e metodológicos, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, reforçando a ideia de se trabalhar de forma relacionada os diferentes enfoques probabilísticos como o clássico, frequentista, geométrico e subjetivo. Com o intuito de promover descobertas nos alunos, assim como utilizar atividades, jogos, software como recursos pedagógicos no ensino de probabilidade. Estes trabalhos foram importantes para que pudéssemos entender a atual realidade sobre o ensino de probabilidade e assim construirmos nossa sequência didática, a partir das dificuldades dos alunos, percebidas e destacadas nestes estudos. Em seguida, vamos analisar os estudos experimentais, com o intuito de compreender as atividades direcionadas para o ensino de Probabilidade.

2.2.2. Estudos Experimentais

Em Silva(2013) “Jogos no Processo de Ensino-Aprendizagem em Probabilidade”. Cujo objetivo: “incentivar boas práticas pedagógicas almejando a melhor aprendizagem dos alunos em probabilidade, através de aplicações cotidianas ou dos jogos.” (SILVA, 2013, P. 8).

A pesquisa se deu a partir do desenvolvimento de uma sequência didática que foi idealizada por um programa de televisão (“o último passageiro”) desenvolvida por simulações do jogo, debates, cálculo de probabilidade e construção de gráficos com estudantes dos 2º e 3º ano do ensino médio.

Foram apresentadas sete atividades: Na primeira atividade foi desenvolvido o jogo de perguntas e respostas com alunos do ensino médio, segundo as regras do programa, com algumas alterações.

Na segunda atividade com perguntas discursivas que foram entregues aos alunos para que se reunissem e respondessem o questionário.

Na terceira atividade foi dado ênfase na formalização do cálculo da probabilidade baseada estritamente em estimativas e exame da tabela.

Na quarta atividade foram feitas a representação gráfica em cartolinas onde os alunos representaram informações a partir de gráficos.

Na quinta atividade foram propostas questões para refletir e incentivar o debate onde os alunos apostaram, verbalmente, replicar alguns pontos.

Na sexta atividade utilizaram tabela de probabilidades com 3 equipes e com essa tabela todo o material para representar os gráficos. E na sétima a construção dos gráficos.

O autor concluiu que o aspecto lúdico na educação decompõe o ensino em algo mais encantador, idealizando uma aprendizagem mais atraente e divertida. No entanto, mudanças são de essencial importância, porquanto intervém espontaneamente no efeito do processo de aprendizagem. Pois ao escolher o jogo como estratégia de ensino de probabilidade, favoreceu uma aprendizagem agradável, expressiva e de evolução, estimando o raciocínio lógico e colaborando para o desenvolvimento da personalidade e crescimento gradativo do educando indo mais à frente de suas estimativas tradicionais.

Na dissertação de Rossano Evaldt Steinmtz Ribeiro que tem o título “Uma Proposta de Ensino de Probabilidade no Ensino Médio” encontramos os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo:

> Os principais objetivos de nosso trabalho são elaborar, investigar e analisar atividades para o ensino de probabilidades no Ensino Médio, tendo em vista as possibilidades de estas despertarem o interesse dos alunos, e também contribuírem para o desenvolvimento da compreensão do seu cotidiano, quando este apresenta relações com aspectos ou conceitos de probabilidade. (RIBEIRO,2012, p.10)

Ribeiro(2012) enfatiza que e a prática docente e a analise realizada na pesquisa estão fundamentadas nos conceitos de aprendizagem de Skovsmose e na Resolução de Problemas, segundo Polya e Pozo. A metodologia adotada na pesquisa é qualitativa levando-se em consideração a participação e os questionamentos dos alunos no processo de ensino aprendizagem, para apoiar a pesquisa qualitativa foi usado a abordagem de Estudo de Caso.

O autor aplicou uma sequência didática, dividida em sete aulas incluindo uma avaliação formal que foram testadas em uma turma de ensino médio no município de Osório/RS. O pesquisador descreve as análises das aulas em três etapas: a 1ª é o planejamento, objetivos e expectativas a 2ª é a descrição da aula e observação do professor e a 3ª são as conclusões do professor.

Segundo o autor "... Podemos afirmar que nossa sequência didática propiciou a construção de um ambiente de aprendizagem de cenários para investigação e abriu espaço para movimentos dentro da matriz proposta por Skovsmose..."(RIBEIRO,2012,p.87.), pois os resultados obtidos são que as atividades contextualizadas sobre os conceitos de probabilidade despertaram maior interesse e participação dos alunos nas aulas, visto que houve questionamentos, interação, com a participação ativa dos alunos e não passiva, diferente do ensino tradicional.

Em Moreira (2015) encontramos um estudo sobre "Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula do Ensino Médio" que, [...] "tem por objetivo apresentar probabilidade e suas diferentes interpretações, bem como inserir no currículo do Ensino Médio a teoria da decisão." (MOREIRA,2015, p.1.) com a finalidade de:

> [...] oferecer ao professor um material que apresente as diferentes abordagens de probabilidade, considerando em alguns momentos os contextos históricos, dando espaço ao lúdico e as atividades diversificadas. Inserimos também a concepção subjetivista de probabilidade, a teoria da decisão e a relação com a estatística. Queremos proporcionar ao aluno um modo diferente de aprendizagem, baseado não apenas no tradicionalismo em que o aluno é o receptor

> das ideias e conceitos passados pelo professor[...] (MOREIRA,2015, p.1).

Fez parte da metodologia de ensinar conceitos da teoria da decisão, a apresentação de vídeos aos alunos para promover debate, a interdisciplinaridade da estatística e da probabilidade e também a utilização de jogos em sala de aula. As atividades realizadas envolvendo probabilidades e teoria da decisão para a sala de aula foram:

A atividade" Role os Dados", realizada com uma turma de 2° ano do ensino médio os alunos deveriam relacionar probabilidade clássica e frequentista por meio de um jogo envolvendo o lançamentos de dois dados e também suas análises para o fato do jogo ser justo ou não.

A atividade "As médias podem não ser significativas", teve como foco trabalhar os conceitos de média de forma significativa, abordando não só o algoritmo, mas também o raciocínio e a compreensão, com uma abordagem adequada quanto ao significado e a representação de cada uma das medidas de centralidade e dispersão, para que o aluno perceba que as médias são medidas utilizadas para se fazer previsões em momentos de incerteza.

A atividade "Sorte ou Azar", apresentou ao aluno o jogo da raspadinha, levantando o questionamento: Vale a pena apostar nesse tipo de jogo? Ao calcular as probabilidades de ganhar os prêmios propostos pelo jogo, os alunos ficaram surpresos com as pequenas chances e com o alto valor arrecadado com a venda de todos os bilhetes do jogo.

A atividade "Ciência Forense e Probabilidade", com objetivo de desvendar um crime e verificar o comportamento das pessoas nas tomadas de decisão e possíveis mudanças, teve a participação de todos os alunos como atores sendo: vítima, perito, investigador e apresentador da situação, além da participação da comunidade escolar, pois foi realizada na feira de ciências da escola, inserindo assim os conceitos de probabilidade subjetiva e teoria da decisão.

A atividade "Qual a melhor decisão?" Viajar para a praia, para um hotel fazenda ou uma casa de campo? com o intuito de levar os alunos a fazer análises e escolher o melhor caminho diante de uma situação de incerteza, envolvendo assim a probabilidade subjetiva e teoria da decisão.

Os resultados obtidos mostram que os alunos perceberam a presença da probabilidade nas situações de incerteza e sua importância nas tomadas de decisão, além de participarem de forma efetiva nas aulas, questionando, interagindo e indagando sobre a matemática em diversas situações do cotidiano.

Na concepção de Moreira(2015), “há necessidade urgente de aliar às aulas tradicionais uma nova maneira de ensinar, onde professor e aluno são os elementos mais importantes desse contexto”. E que a matemática deve ser apresentada de forma integrada ao cotidiano do aluno e em outras áreas do conhecimento, favorecendo a interdisciplinaridade, a contextualização evitando um tratamento isolado da matemática.

Lima (2013) desenvolveu um estudo sobre: “O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos”. Tendo como objetivo:

> [...] apresentar uma proposta de aulas diferentes da tradicional para dar início as aulas de probabilidade: o uso de uma atividade denominada “Jogos dos Discos”, que envolve, dentre outras coisas, experimentação, modelagem, gráficos e funções quadráticas[...] (LIMA, 2013. p. 22).

O autor utilizou a metodologia investigativa, dando intervalos de tempo razoáveis para os estudantes pensarem em como resolver um problema cujo tema ainda não havia sido apresentado.

Além disso, utilizou uma sequência didática, criando uma situação na qual os alunos precisaram fazer uso da criatividade para conseguir resolver a atividade, já que o que fizeram foi apenas apresentá-la a eles e deixaram com que resolvessem sozinhos, com o professor palpitando o mínimo possível.

Para Lima(2013) os alunos compreenderam que vários acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que os resultados podem ser estimados pelas possibilidades de resultados observados nos experimentos, conseguindo perceber a proximidade existente entre a probabilidade teórica de um evento e a frequência relativa com que este evento ocorre na natureza.

O autor sugere que no uso da referida metodologia e sequência de aulas, seja utilizado um tempo que contemple o raciocínio e a realização do experimento em sala de aula. Além de mostrar o método algébrico, utilizar o programa desenvolvido pelo aluno Lucas, podendo ser encontrado em: htt://sourceforge.net/projects/jogodosdiscos/, como recurso de se alcançar um número maior de simulações e melhor entendimento de resultados probabilísticos.

[...] “a realização desse trabalho resultou em grandes contribuições para a vida profissional do autor, que pôde observar um aprendizado efetivo da Probabilidade através do uso de um jogo bem elaborado” [...]. (LIMA,2013, p.112).

Em Duarte(2013) “Introdução a Estatística e Probabilidade: Uma Abordagem Contextualizada no Cotidiano dos Alunos” com o objetivo principal de “[...] mostrar como abordar a Estatística de uma forma mais interessante e interativa com os alunos com uma sequência de aulas, envolvendo também a probabilidade”. (DUARTE,2013, p.15).

Duarte(2013) aplicou uma sequência de aulas estruturadas partindo da pesquisa sobre o último pleito eleitoral no município de Caucaia-CE; o caso as eleições para vereadores e prefeito; das planilhas de licitação de merenda escolar; com o intuito de atingir de forma mais precisa os alunos, dando ênfase aos conceitos de População e amostra, variáveis, gráficos e tipos de variáveis e a associação com o livro didático “Conexões com a Matemática”, adaptado pela escola em que trabalha.

Na sequência das aulas, ocorreu a solicitação aos alunos de uma pesquisa de campo, para trazer os preços do kg de arroz de várias marcas de um estabelecimento comercial mais próximo de sua casa, para que fosse trabalhado os conceitos de frequência absoluta, relativa e acumulada e a construção de gráficos.

Uma outra pesquisa direcionada na turma foi encaminhada pela coleta dos resultados da primeira rodada dos jogos internos da escola, associando-os aos conceitos de média aritmética simples e ponderada, mediana e moda.

A sequência didática também explorou uma breve abordagem sobre probabilidade, estabelecendo relação entre estatística e probabilidade, através do exemplo da tabela construída sobre o preço do arroz para tratar de alguns conceitos probabilísticos.

Para o autor a metodologia adotada nas aulas teve um resultado satisfatório sobre as demais aulas ministradas com o método tradicional, reforçando que, “[...] minha prática docente ganhou muito no que diz respeito a pesquisa e interação dos alunos com o meio em que estão inseridos, espero poder realizar este tipo de trabalho com outros conteúdos[...]" (Duarte2013, p,52.).

Os resultados obtidos por Duarte(2013) mostrou os desdobramentos para o ensino de estatística e probabilidade, que o professor possa utilizar outros recursos metodológicos nas aulas como: planilhas eletrônicas para se fazer cálculos, dentro das possibilidades da escola; registros dos cardápios da escola; registro da popularidade do grêmio estudantil, estes podendo subsidiar o processo de aprendizagem dos alunos.

No trabalho Biajoti (2013) "Experimentos Probabilísticos: Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II" com o objetivo de "relatar os resultados de uma investigação didático-pedagógica que utiliza jogos para ensinar Probabilidade no Ensino Fundamental II" (BIAJOTI, 2013, p.15) e como objetivo específico:

> "[...] de planejar e desenvolver uma sequência didática sobre noções iniciais de Probabilidades que permitisse uma assimilação significativa e abrangente do assunto através de uma metodologia que tem como ponto de partida a realização de experimentos, o uso de jogos e a realidade dos alunos" (BIAJOTI, 2013, p.15)

Como metodologia de pesquisa o autor utiliza a Engenharia Didática, pois:

> "[...]a engenharia didática leva esse nome por ter semelhança com o trabalho do engenheiro, que se apoia em seus sólidos conhecimentos teóricos e científicos para elaborar um projeto, mas que em certo momento, na execução, pode se deparar com problemas práticos e imprevisíveis". (ALMOULOUD,2008, apud BIAJOTI,2013, p.19).

Biajoti(2013), elaborou e aplicou uma sequência didática contendo 4 atividades, partindo dos pressupostos da engenharia didática, baseando-se na elaboração de jogos e experimentação em sala de aula, direcionada para quatro turmas de 7º ano do Ensino Fundamental II, para um total de 94 alunos, divididos em 47 duplas.

As duplas foram organizadas pelo próprio pesquisador, com o intuito de haver uma melhor distribuição dos alunos e para que houvesse trocas de ideias entre as duplas e entre toda a turma, no final das atividades. Dando ênfase a importância de valorizar sempre o trabalho e as discussões apresentadas pelos alunos em cada atividade.

Relacionando a história das probabilidades com os jogos de azar, a sequência didática teve como objetivo trabalhar as noções elementares de probabilidades como: eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples, a construção de tabelas de dupla entrada, experimentos determinísticos e aleatórios frequência relativa e analise de padrões. Cada atividade elaborada continha, a priori, seus objetivos e justificativas, além das expectativas que poderiam ser apresentadas pelos alunos antes da aplicação.

Na atividade 1, composta por uma relação entre o estudo de probabilidade e jogos de azar, onde os personagens Paulo e Pedro tomam algumas decisões na “sorte” apostando em cara ou coroa no lançamento de uma moeda, produto par ou ímpar no lançamento de dois dados, e devem responder as questões, usando apenas a intuição para justificar se as consideram justas ou não.

A atividade 2, foi formada por dois jogos e suas análises, no jogo 1, denominado Cara ou Coroa, os alunos devem escolher quem será o jogador Cara e o jogador Coroa. A pontuação será de acordo com a ocorrência de cara ou coroa, o ganhador será aquele que mais sair depois de 50 lançamentos. Cada dupla recebeu uma moeda de 1 real para fazer os lançamentos.

Ainda na atividade 2, o jogo do produto, “dois dados devem ser lançados ao mesmo tempo” os alunos devem escolher quem será o jogador par e quem será o jogador ímpar. Observar o número da face voltada para cima e multiplicar os resultados verificando se deu par ou ímpar. Cada dupla recebeu dois dados para efetuar os lançamentos.

A atividade 3 teve como objetivo formalizar os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e introduzir o conceito de probabilidade, utilizando-se dos jogos Cara ou Coroa e Produto Par ou Ímpar, levando os alunos a construírem tabelas de dupla entrada para entenderem melhor os conceitos envolvidos nas atividades, e assim apreendam de forma significativa a linguagem probabilística.

A Atividade 4, composta por dois jogos: soma par e a diferença entre a maior e a menor pontuação ou entre os pontos iguais no lançamento de dois dados. Esta deu ênfase a verificação do aprendizado dos alunos nas atividades anteriores. Levando os mesmos a realizar os experimentos, construir as tabelas e responderem as questões propostas.

Segundo o autor a aplicação das folhas de atividades proporcionou uma participação ativa dos alunos na realização dos experimentos bem como na construção dos conceitos e nas tomadas de decisão sobre as situações envolvidas nas mesmas. Os alunos mostraram-se interessados em aprender fazendo perguntas e questionamentos durante o desenvolvimento das situações propostas. Observou ainda, que as duplas reconhecem situações que envolvem incertezas e utilizam uma linguagem cotidiana para justificar as respostas.

O estudo de Silva (2013), apresentou o uso de uma sequência didática idealizada a partir de um programa de televisão, utilizando simulações de jogos, debates, conceitos de probabilidades, relatando a ocorrência de mudanças na postura dos alunos frente às atividades. Ribeiro (2012) trabalhou em sala de aula com uma sequência didática estruturada dividida em 7 aulas com questões contextualizadas, despertando interesse e participação dos alunos. Moreira (2015) em sua pesquisa apresentou a probabilidade e suas diferentes concepções, através de vídeos, interdisciplinaridade da Probabilidade com a Estatística e o uso de jogos, promovendo debates e questionamentos entre os alunos. Os resultados de Lima (2013) com uso de uma sequência didática para o ensino da Probabilidade em que os alunos precisaram de criatividade e percepção ao observarem os experimentos envolvendo a probabilidade teórica de um evento e a frequência relativa. Duarte (2013) aplicou uma sequência de aulas envolvendo Estatística e Probabilidade numa abordagem contextualizada com o cotidiano dos alunos. Biajoti (2013) elaborou uma sequência didática contendo 4 atividades com jogos e experimentação em sala de aula de Ensino Fundamental, enfatizando a importância de valorizar o trabalho e as discussões dos alunos. Estes estudos tem em comum o fato da eficiência e da necessidade da metodologia diferenciada facilitando a formação de ideias e conceitos nos alunos. Neste sentido, estes estudos reforçaram a nossa perspectiva de elaborar uma sequência didática com atividades estruturadas que visem o ensino de Probabilidade. Estes trabalhos foram importantes para a construção e adaptação de nossa sequência didática. Em seguida, analisamos os estudos Teóricos/Investigativos.

2.2.3. Estudos Teórico/Investigativos

No estudo de Gondim(2013) “Probabilidade e Probabilidade Geométrica: Conceitos e exemplos aplicáveis no Ensino Básico” a pesquisa teve como objetivo:

> A contextualização de uma questão, levando-a ao cotidiano do aluno, se faz necessária uma vez que objetivamos abordar atividades que os façam interagir em grupos e adquirir conhecimento de forma autônoma. Entendemos que o professor deve interagir como mediador nesse processo, mostrando os caminhos, mas deixando o aluno caminhar por eles”. (GODIM, 2013, p.8)

A autora fez uma breve Abordagem Histórica sobre probabilidade, o desenvolvendo da teoria desde de sua origem até problemas atuais com algumas aplicabilidades dando ênfase a importância da probabilidade para a sociedade.

O estudo abordou definições e conceitos sobre os conteúdos de probabilidade, as definições de probabilidade de Laplace e a definição de frequência, explorando também probabilidade condicional, arvore de possibilidades, probabilidade geométrica sua origem e importância para a sociedade. Assim como a análise de documentos como: Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN), Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e “Orientações Curriculares Complementares” (PCN)$^{+}$ sobre o ensino de probabilidade no ensino básico.

Na sequência da análise a autora sugere o uso de jogos e a resolução de problemas no ensino de probabilidades. Destacando a importância de uma sequência didática para o ensino ao pesquisar problemas e experimentos que podem ser utilizados como ferramentas para o ensino de probabilidades no ensino Fundamental ou Médio.

Em suas considerações finais a autora propõe “inserir atividades diferenciadas das trabalhadas em sala de aula, abrindo um leque maior de possibilidades de situações, uma vez que é preciso explorar com mais afinco essa área, pois a mesma é rica em aplicações” (GODIM,2013, p.62), deixando como sugestão atividades que possam auxiliar de forma significativa o processo de aprendizagem.

Em Moraes(2014) “Ensino de Probabilidade: Historicidade e interdisciplinaridade” encontramos os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo:

> Este trabalho traz uma proposta de ensino da teoria da probabilidade, com contextualização histórica, interdisciplinaridade, confrontando duas visões diferentes do conceito probabilístico, visão clássica e a visão frequentista, sem deixar de usar jogos e problemas para a construção do conhecimento, com um objetivo maior: que o aluno possua uma postura crítica do conceito estudado. (MORAES,2014, p.4).

O Autor faz uma abordagem histórica detalhada desde a antiguidade 3500 a.C. citando a origem dos jogos de dados, baralhos e seguros, as primeiras publicações em teoria da probabilidade. Enfatizando os principais trabalhos, tratados probabilísticos que se deram através dos renomados cientistas da época que iniciaram e contribuíram para o desenvolvimento da teoria probabilística. A importante participação dos matemáticos russos dando uma axiomatização moderna da probabilidade.

A metodologia da pesquisa está baseada na utilização da história da matemática como ferramenta fundamental para o processo de ensino e aprendizado. A utilização de jogos bem elaborados de forma cuidadosa com objetivos definidos para que o aluno possa aprender de forma efetiva, contribuindo em seu aprendizado e na sua formação pessoal e profissional. Com ênfase na interdisciplinaridade como recurso metodológico para o professor, a mesma pode fazer a diferença no aprendizado do aluno frente ao mundo globalizado.

Moraes(2014) elaborou como proposta de ensino e aprendizagem atividades que são construídas a partir do enfoque histórico de probabilidades, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos no processo de elaboração dos conceitos para em seguida apresentar as definições sistematizadas.

No estudo de Silva Filho (2016) “Probabilidade e Valor Esperado Discussão de Problemas para o Ensino Médio” teve como objetivo: “[...] a discussão de problemas envolvendo os conceitos de probabilidade e valor esperado.” (SILVA FILHO,2016, p,35.)

A investigação apresentou alguns aspectos da história da probabilidade em problemas clássicos associados a recurso didático para serem implementados no Ensino Médio, como os problemas ligados a jogos de azar propostos por Chevalier de Méré ao matemático francês Blaise Pascal(1623-1662), mostrando o famoso problema sobre a divisão do bolo das apostas quando um jogo é interrompido antes do final.

O autor fez simulações para mostrar de forma empírica o resultado da Lei dos Grandes Números, do cálculo do valor esperado, determinar a função probabilidade, construir gráficos e calcular o desvio padrão, utilizando como recurso didático ferramentas computacionais como o Geogebra e o Excel.

Na sequência o estudo abordou a "Discussão de Problemas" onde o conceito de valor esperado pode ser apresentado aos alunos sem maiores dificuldades. Fazendo uma simulação através do Excel para mostrar o resultado do lançamento de dois dados. Utilizando jogos como o da raspadinha Portuguesa, jogos com dois ou três dados, jogo do bicho, resolvendo problema desafiadores de vestibulares como da IME-USP, desafios apresentando problemas que fujam do padrão normalmente apresentados nas salas de aula.

Na concepção de Silva Filho(2016), o conceito de valor esperado, deveria ser lecionado no Ensino Médio, visto que em diversas situações de tomadas de decisões o valor esperado será o critério principal para tomada de decisões, ou seja, uma média do que vai ocorrer a longo prazo.

A dissertação de Nunes (2015) intitulada, "A Utilização dos Jogos Lotéricos para o Ensino de Probabilidade no Ensino Médio", trouxe como objetivo: "[...] elaborar uma metodologia diferenciada de ensino, com base na análise das loterias federais […] (NUNES,2015, p,14.).

A análise dos jogos de azar foi utilizada como metodologia estratégica de envolvimento do aluno por se tratar de uma situação de seu cotidiano, o intuito foi o de despertar nele o interesse pelo assunto probabilidade de forma a facilitar seu aprendizado. Para tanto foi construído uma estrutura sistematizada em 4 capítulos versando desde uma abordagem histórica dos jogos de azar e surgimento da probabilidade; exposição conceitual da teoria da probabilidade; prognostico de arrecadação e apostas da loteria federal no Brasil; finalizando com a proposição de uma atividade pedagógica chamada "Quem quer ser um milionário".

Como observado na estrutura da dissertação de Nunes, a proposta de atividade pedagógica trabalhada no 4 capitulo, também segue a mesma tendência de sistematização para se alcançar entendimento entre os alunos. A atividade envolve os jogos lotéricos e foi planejada para ser desenvolvida em sala de aula em 4 etapas com previsão de 30 a 60 minutos de duração.

A partir da utilização de um material concreto “moeda”, a *primeira etapa* tem como objetivo dar ao aluno uma ótima noção de interpretação dos números no cálculo de probabilidade e da dificuldade em ser premiado numa loteria federal;

Na *segunda etapa* os alunos agrupados em equipe de 4 e 6 alunos debatem alguns questionamentos em relação a Mega Sena com o objetivo de perceber que cada sorteio é um evento independente;

Na *terceira etapa* os alunos são convidados a refletir sobre a seguinte questão: Com R$ 24 ,50, consegue-se fazer uma aposta com 7 números no mesmo cartão ou 7 apostas de 6 números, ambas na Mega Sena. Pergunta-se o que seria mais vantajoso: apostar 7 números num mesmo cartão ou apostar em 7 cartões com 6 números em cada, todas as dezenas distintas? o objetivo e leva os alunos a concluírem que para se acerta a Sena, marcar 7 números num mesmo cartão ou marcar 6 números em 7 cartões distintos, as chances se equiparam, porém, se pensado o acerto da Quina e considerado os sete cartões marcados com todas as dezenas distintas, concluiremos que é mais vantajoso apostar em 7 cartões distintos com 6 números;

Na *etapa final*, é solicitado aos alunos a reflexão da questão: “Será que existe uma loteria federal mais indicada para se apostar? O objetivo é de leva o aluno a concluir que para se comparar dois jogos de azar, devemos considera suas premiações e probabilidades. Ainda na sequência da reflexão leva-se os alunos a fazer o questionamento:” E se as probabilidades e prêmios pagos não forem iguais? Como compara-los?” Como resposta espera-se o valor esperado de um jogo que é uma medida estatística que leva em consideração a premiação e sua probabilidade.

As resposta dos questionamentos deverá ser alcançada mediante atividade realizada com os alunos baseada no valor esperado de cada jogo. Contudo as premiações dependem da arrecadação de cada jogo e do número de acertadores do total a ser pago, necessitando calcular a média das premiações pagas a cada jogo. Observando, que o valor calculado de R$0,75 não leva em consideração que o apostador deve pagar R$3,50 para realizar uma aposta simples da Mega Sena, logo o valor esperado de todo jogo é dado por R$0,75-R$3,50= -R$2,75.

Ao final da atividade o aluno deverá ser capaz de tirar algumas conclusões, tais como: que a loteria mais indicada é a LOTOMANIA pois possui o maior valor esperado (R$-0,83); a MEGA SENA possui o menor valor esperado(R$-2,75); todas essas loterias serem equivalentes se possuírem o mesmo valor esperado; estratégias nos jogos envolvendo partidas de futebol; maximizar o valor esperado de sua aposta, apostando quando as premiações estiverem acumuladas.

Como observado todas as etapas devem ser intermediadas e coordenadas pelo professor além de indicar uma sequência sistêmica de compreensão das questões e questionamentos.

Concluiu-se que a aprendizagem de probabilidade, será mais significativa se houver uma aproximação do conteúdo com o cotidiano do aluno. Acreditando que situações da realidade do aluno no caso utilizado do jogo de azar, as aulas tornam-se mais atraentes um dos entraves no ensino aprendizagem de Matemática no Ensino Médio.

O estudo de Gondim(2013) fez uma abordagem histórica da probabilidade com seus conceitos e definições, as concepções clássica e geométrica da probabilidade. Moraes (2014) pesquisou a probabilidade em um contexto Histórico e Interdisciplinar para o ensino da probabilidade. Silva Filho (2016) pesquisou problemas envolvendo os conceitos de probabilidade e valor esperado. Nunes (2015) pesquisou uma metodologia diferenciada de ensino baseada na análise das loterias federias.

A revisão desses estudos contribuíram em nossa visão a respeito das dificuldades apresentadas por nossos estudantes em relação ao aprendizado e domínio dos conceitos probabilísticos, e direcionaram para a possibilidade de sucesso para o uso de uma sequência didática estruturada com atividades que favoreçam a percepção e a descoberta dos conceitos e ideias sobre Probabilidade. Contudo, para compor melhor nosso trabalho, consideramos importante trazer em nossa pesquisa uma Fundamentação Matemática sobre a Probabilidade, partindo dos Aspectos Históricos e em seguida uma Conceituação Teórica do referido tema. Estes resultados estão dispostos a seguir.

2.3. Aspectos Históricos da probabilidade

Segundo Morais (2014), a Probabilidade tem sua origem nos jogos de "azar" – "dado" em árabe. Documentos do tipo arqueológicos ou históricos mostram a existência dos jogos de azar desde a antiguidade, porém nunca foram objetos de estudo até a Idade Média.

O *jogo de ossos* – formas primitivas de dados feitos de ossos, conhecidos como *astrágalo,* esteve presente em quase todas as civilizações, encontradas por historiadores em pinturas de tumbas egípcias feitas em 3500 a.c.; na Índia e no norte do Iraque – antes Mesopotâmia - em 3000 a.c.; Polinésia e Siberianos; difundido para o mundo grego, romano e chegando no mundo Cristão Medieval através dos comerciantes marítimos italianos; e durantes as cruzadas trazidas para o Ocidente. (MORAES, 2014, p.5).

A probabilidade, historicamente associada a práticas baseadas em estimativas empíricas tais como: jogos de dados, baralhos, surgimento dos seguros aplicados a perda de carga de navios em naufrágios e roubos, jogos e apostas, previsão de futuro, decisão de disputas, divisão de heranças, acidentes para estipular as taxas e prêmios correspondentes; estabeleceu ao longo do tempo aproximação com experiências frequentes, comuns ou simples do cotidiano. (MORAES, 2014, p.5).

Na antiguidade atribuíam-se aos deuses as suposições de vitória ou de derrota diante de um jogo ou fato e por acreditarem em superstições e insistirem na verdade absoluta provadas pela lógica, tinham dificuldade em aceitar a ideia de aleatoriedade. (MORAES, 2014, p.5).

De acordo com Moreira (2015), os romanos foram os primeiros a utilizar o processo de aleatoriedade. Eram mais preocupados com a medição e a contagem do que com a geometria. Porém, o desenvolvimento do cálculo de probabilidade teve início apenas no século XVI, mostrados por trabalhos relevantes sobre a teoria da probabilidade.

O italiano ***Girolamo Cardano*** **(1501 – 1576)** escreveu um tratado de 32 capítulos sobre um estudo de jogos em que ele mesmo apostava: dados, gamão, cartas, astrágalos, xadrez com o título "O Livro dos Jogos de Azar", primeiro trabalho a introduzir princípios de probabilidade, mostrando que eventos sujeitos ao acaso são dependentes de fatores incertos; a probabilidade de um evento sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de possíveis resultados; indicando uma nova metodologia ao associar métodos combinatórios no desenvolvimento de uma teoria da probabilidade; representando avanços na compreensão da natureza da incerteza. Cardano, por ter escrito em uma época ainda sob forte influência das aferições empíricas, apresentou alguns equívocos, por exemplo, quando associava uma sequência de derrotas ocorridas, por supor que a sorte estava adversa, uma maneira de mudar o resultado seria jogar o dado com bastante força. Cardano, em outro trabalho com o título “Novo Trabalho em Proporções” trata de vários problemas ligados à combinatória. (MORAES,2014; MOREIRA,2015).

O italiano ***Niccoló Tartaglia*** **(1499 – 1557)** escreveu um trabalho com o título “Tratado Geral Sobre Números e Medidas” abordando o assunto de cálculos de probabilidades e combinatórias em que utiliza um problema proposto em 1494 por Luca Pacciole. O italiano ***Galileu Galilei*** **(1564 – 1642)** físico, astrônomo, matemático e filosofo dedicando-se ao estudo da probabilidade, fez um estudo do número possível de resultados em jogos de dados com o título “Ideias Sobre o Jogo de Dados” presumindo que um dado tem probabilidade igual de cair em qualquer um dos seis lados. (MOREIRA,2015, p.10).

O francês ***Blaise Pascal*** **(1623 – 1662)** físico e matemático. Em 1654 desenvolveu em parceria com o também francês ***Pierre de Fermat (1601 – 1662)*** advogado e matemático, iniciaram por correspondências, uma abordagem sistêmica e generalizável estabelecendo os fundamentos para cálculo de probabilidade; e solução do problema/desafio proposto anos antes por Paccioli, divulgado como o “problema dos pontos”, que consiste em determinar qual deve ser a divisão das apostas quando um jogo é interrompido antes do seu final, este problema foi exposto a Pascal por Chavalier de Méré, um intelectual francês lembrado por sua participação na teoria da probabilidade. Em 1679, as correspondências de Pascal e Fermat apresentaram abordagem próprias, resolvendo diversas versões do problema proposto por Paccioli e foram publicadas em Toulouse na França. Um conjunto de documentos históricos considerados patrimônio da história da matemática, composto por sete cartas, originarias da teoria da matemática da probabilidade. Os estudos de Pascal e Fermat foram baseados no aperfeiçoamento da regra geral de Cardano e na aplicação do cálculo combinatório. (MORAES,2014; MOREIRA,2015).

O holandês ***Christiaan Huygens* (1629 – 1695)** matemático. Em 1657 ao perceber o surgimento de uma importante teoria matemática escreveu um livro com o título “De Ratiociniis in Ludo Aleae” (O Raciocínio em jogos de azar), resultado da resolução de uma sequência de 14 problemas relacionados a jogos de azar sem utilização da combinatória, estes que compõe o primeiro livro publicado em teoria da probabilidade, utilizado até o século XVIII. Huygens teve forte influência do matemático francês René Descartes (1596 – 1650) em sua educação matemática. (MORAES,2014).

O suíço ***Jakob Bernoulli* (1654 – 1705)** matemático, com formação em filosofia, teologia e astronomia escreveu um tratado de probabilidade com o título “Ars Conjectand” (A Arte da Conjectura), falecendo antes de conclui-lo foi finalizado por seu sobrinho também matemático Nicolaus Bernouli (1687 – 1759) e publicado postumamente em 1713. Neste livro, Bernoulli prova a Lei dos Grandes Números, resultado que estabelece uma relação entre os conceitos de probabilidade e frequência relativa; contendo considerações sobre esperança matemática e probabilidade a priori e a posteriori. O tratado contem quatro partes: a primeira representa a reedição do livro de Huygens complementados por comentários; a segunda com o título “A Doutrina de Permutação e Combinações”; a terceira aplicou a teoria da combinatória na resolução de 24 problemas de jogos de azar; e a quarta parte com o título “Pars Quarta” onde fez aplicações em problemas cívicos, morais e econômicos. Bernoulli defendia a tese de que as tomadas de decisões para determinar probabilidade deveriam ser auxiliadas por métodos matemáticos, posto que, com o aumento do número de observações, as frequências observadas deveriam ser cada vez mais precisas. (MORAES,2014; MOREIRA, 2015).

O suíço Leonhard Euler (1707-1783) matemático obteve forte influência da família Bernoulli que produziu vários grandes matemáticos, alguns dos quais com contribuição na teoria da probabilidade: Johann Bernoulli (1667-1748), Jakob Bernoulli (1654 – 1705) e Daniel Bernoulli (1700 – 1782). Em 1726, aos 19 anos, ocupou a vaga de Nicolaus II Bernoulli (1695 – 1726), que havia falecido, na Academia de Ciências de São Petersburgo. Dentre vários, Euler, desenvolveu um trabalho com o título “Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain” (Pesquisa sobre a mortalidade geral e a multiplicação da humanidade), publicado em 1760, propondo resoluções a vários problemas na área da demografia matemática, contribuindo na aplicação da probabilidade na área de loteria, demografias e seguros. (MORAES, 2014).

Segundo Eves (2004) o francês ***Abraham De Moivre* (1667 – 1754)** matemático conhecido por seu trabalho com o título "Doctrine of Chances" (Doutrina das Chances) publicado em 1718 em inglês, composto por muito material sobre a teoria das probabilidades e *Miscellanea analytica*, contendo contribuições a séries recorrentes, probabilidade e geometria analítica. De Moivre foi o primeiro a trabalhar com a integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, em probabilidade e mesmo de forma implícita, as técnicas de reduzir problemas de probabilidade a equações e de usar funções geratrizes para solucionar essas equações.

O francês ***Georges-Louis Leclerc* (1707 – 1788)** conhecido como Conde de Buffon, matemático, naturalista e membro da Academia Francesa, segue a tendência da aplicação da teoria da probabilidade às ciências naturais influenciando vários naturalistas, entre os quais se destacou o britânico Charles Darwin. Buffon desenvolveu um trabalho sobre espécies perdidas; e origem dos planetas como produto de colisão associados a cálculos de probabilidades. Seus estudos serviram de fundamento para o aperfeiçoamento da paleontologia. Em 1777 apresenta o "problema da agulha de Buffon" propondo determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento l atravessar um feixe de paralelas, distantes entre si de $a > \mathrm{l}$, quando lançada aleatoriamente. (MORAES,2014).

O francês ***Pierre-Simon Laplace* (1749 – 1827)** físico e matemático produziu seus melhores trabalhos nas áreas da mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais e geodesia. Sobre probabilidade publicou em 1812 um tratado com o título "Théorie Analytique des Probabilitées" (Teoria Analítica de Probabilidade), obra em que constam os estudos de Cardano em probabilidade que desenvolveu entre os anos de 1771 e 1786. A fundamentação feita por Laplace em sua obra reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores, incluindo aplicações na teoria de análise de erro de medições, inicialmente desenvolvida em 1756, pelo matemático inglês Thomas Simpson (1730 – 1761). Adepto do determinismo, Laplace não acreditava na aleatoriedade da natureza, agregando a probabilidade, a incerteza das causas exatas dos fenômenos estudados. O aleatório sempre foi objeto de controvérsia filosóficas para o qual a teoria quântica trouxe respostas em contraposição ao determinismo da física do matemático e físico inglês Isaac Newton (1643 – 1727). Atualmente essa obra de Laplace é conhecida como: “Definição Clássica de Probabilidade”, posto que deu início ao período clássico da teoria probabilística se mantendo inalterada até o século XX. (MORAES,2014; MOREIRA, 2015).

O alemão ***Carl Friedrich Gauss* (1777 – 1855)** matemático. Desenvolveu o método dos mínimos quadrados, estabelecendo a relação da distância de erros de medidas com a curva normal, formulado de forma independente da proposta do matemático americano Robert Adrian (1775 – 1843), e pelo matemático francês Adrian-Marie Legendre (1752 - 1833). O francês ***Siméon-Denis Poisson (1781 – 1840)*** matemático e físico. Publicou em 1837 seu trabalho com o título “Recherches sur la Probabilité des Jugements” (Pesquisa sobre a probabilidade dos julgamentos (das decisões)), defendendo a tese da aplicação da teoria da probabilidade em analises de decisões judiciais. A distribuição proposta por Poisson é básica na verificação de variados problema relativos a ocorrências de eventos aleatórios no tempo e no espaço, hoje conhecida como “Lei dos Pequenos Números contendo a distribuição de Poisson”. (MORAES,2014).

O russo ***Pafnuty L’vovich Chebyshev* (1821 – 1894)** matemático. Marca a fundação da conceituada escola de São Petersburgo formando relevantes matemáticos russos com contribuições fundamentais à teoria da probabilidade. Obtendo forte influência dos matemáticos: o russo Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 – 1889), que publicou o livro “Fundamentos da teoria matemática das probabilidades”; e o ucraniano Mikhail Vassiliovich Ostrogradski (1801 – 1862), ambos produtos da linhagem inaugurada por Daniel Bernoulli e Euler em São Petersburgo. Período que se iniciam aplicações de probabilidade na física, com trabalhos de Boltzmann, mostrando evidentes limitações dos fundamentos matemáticos na teoria da probabilidade, enfatizado através de paradoxos, sendo o mais famoso o “Paradoxo de Bertrand”, que mostra que a probabilidade de se escolher aleatoriamente uma corda com comprimento maior que $\sqrt{3}$ em um circuito de raio unitário pode ter várias respostas. Chebyshev foi o primeiro a raciocinar de forma sistematizada termos de variáveis aleatórias e seus momentos, estabelecendo uma simples desigualdade que permitiu uma prova trivial da lei dos grandes números enunciado como: “*A frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se nas vizinhanças de um valor quando o número de provas cresce indefinidamente”.* (LIMA,2013; MORAES,2014).

O russo **Andrei Andreiwich Markov (1856 – 1922)** matemático. Estudioso da teoria da probabilidade, por influência de Chebyshev, seu professor, utilizou o conceito de movimento para dar uma prova rigorosa do teorema central do limite, além de estudos sobre dependência de variáveis aleatórias, hoje denominadas cadeias de Markov. O russo **Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918)** matemático. Outro famoso estudioso da teoria da probabilidade. Usando o conceito de funções características para dar uma prova mais simples das cadeias de Markov. (MORAES,2014).

O russo **Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987)** matemático. Seus trabalhos contemplaram várias áreas da matemática. Seu interesse em probabilidade iniciou em 1924, publicando seu primeiro trabalho nesta área junto com Aleksander Yakovlevich (1894 – 1959); desenvolveu um fundamental trabalho sobre as cadeias de Markov em tempo contínuo. A contribuição teórica de Kolmogorov marca o início do desenvolvimento da teoria moderna da probabilidade, publicando em 1931 um importante artigo “Métodos Analíticos na Teoria da Probabilidade” no qual estabelece os fundamentos da teoria moderna de processos estocásticos, período em que a teoria da probabilidade já era considerado um instrumento eficaz, exato e confiável do conhecimento. (MOREAS,2014)

De acordo com Moraes (2014), Moreira (2015) a teoria da probabilidade é caracterizada pelo alargamento cada vez mais constante do alcance de suas aplicações práticas, percebidas na tradição de várias nações – Estados Unidos; França; China; Itália; Grã-Bretanha; Polônia; Hungria; e outros países do mundo. Usada diariamente de forma intuitiva, o cálculo de probabilidade é percebido em variadas situações do cotidiano, chances de jogos, passar em concursos públicos, probabilidade de chover, da situação do trânsito, além de estudos em diversas áreas: estatística, economia, física, química, sociologia, psicologia, biologia, na análise de decisão entre outros ramos do conhecimento.

2.4. Fundamentação Matemática

Neste momento apresentaremos um estudo acerca de algumas definições e propriedades da Teoria da Probabilidade, inicialmente discorremos sobre as diferenças entre experimentos Determinísticos e os Aleatórios, em seguida os conceitos de Espaço Amostral e Eventos e as Operações entre eventos, as diferentes concepções probabilísticas: Clássica, Frequentista, Subjetiva, Axiomática e Geométrica que foram se desenvolvendo no decorrer dos tempos. Discorremos um pouco sobre a diferença de Chance e Probabilidade. Pesquisamos exemplos e aplicações em diversos livros didáticos e dissertações, para um melhor entendimento quando o leitor for da área do ensino de matemática ou não, buscando clareza sem perder de vista o caráter matemático como abstração, raciocínio lógico, demonstrações e outros.

2.4.1. Experimentos Aleatórios e Determinísticos

O conceito de probabilidade está ligado diretamente com nosso cotidiano, quando nos questionamos, por exemplo: "Será que o ônibus vai atrasar hoje?"; "Quais números da Mega Sena serão sorteados essa semana?"; "A água aquecida a 100ºC, sob pressão normal, entra em ebulição?". Cada um desses questionamentos está associado à ideia de que existe uma possibilidade de ocorrer um determinado evento. Como percebemos nos questionamentos existem casos em que é extremamente difícil saber o resultado, e em outros que o resultado torna-se bastante óbvio. Esses casos serão chamados de experimentos e irão ser classificados em experimentos aleatórios ou experimentos determinísticos.

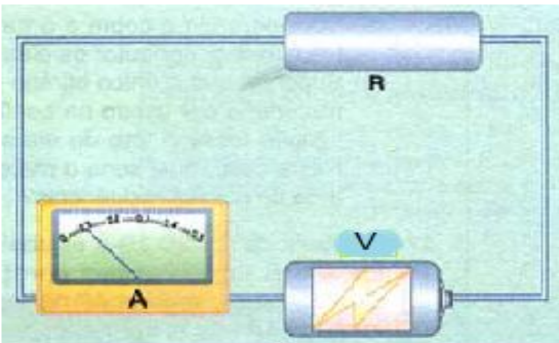
A probabilidade é o ramo da matemática que estuda e formula modelos que podem ser utilizados para compreender experimentos aleatórios. Segundo Dantas (1997), quando experimentos são repetidos sob as mesmas condições e não produzem essencialmente o mesmo resultado, são chamados de experimentos aleatórios. Por exemplo, ao jogar um dado o resultado do experimento é o aparecimento de uma das faces $1, 2, 3, 4, 5\ ou\ 6$, logo, observamos que mesmo jogando o dado na mesma direção, sobre a mesma superfície plana, e com a mesma força repetidas vezes o experimento não apresenta resultados previsíveis. Com isso, concluímos que em experimentos aleatórios as condições da experimentação determina somente o comportamento probabilístico do resultado observável.

Como exemplo, num sorteio das dezenas da Mega-Sena, em que o jogador pode escolher de 6 a 15 números, entre 60 números disponíveis enumerados de 1 a 60. Este jogo consiste em um sorteio de 6 dezenas e recebe a premiação máxima o jogador que acertar as 6 dezenas sorteadas. Mesmo repetindo o sorteio um grande número de vezes em condições idênticas, não é possível prever o resultado.

Outra definição que devemos ressaltar é a de experimento determinístico, que diferente do experimento aleatório, conduz ao mesmo resultado nas mesmas condições. Por exemplo, podemos determinar a posição e a velocidade de uma pedra que cai de uma determinada altura, para qualquer intervalo de tempo, ou seja, se repetirmos esse experimento várias vezes, sob as mesmas condições nesse caso a altura que a pedra cai e a massa da pedra, os resultados serão os mesmos para os mesmos intervalos de tempo. Ou seja, em um experimento determinístico admite-se que o resultado observável seja determinado pelas condições sob as quais o experimento seja executado.

Vamos considerar o circuito elétrico simples abaixo, ao introduzirmos uma bateria no circuito (imagem 1), o modelo matemático que descreve o fluxo de corrente elétrica observável em um amperímetro, seria $I = V/R$, ou seja a Lei de Ohm.

Imagem 1 - Circuito elétrico simples.



Fonte: www.google.com.br/imagensdecircuitoseletricos

O modelo prognostica o valor de I tão logo os valores de V e R sejam fornecidos. Em outras palavras, se o experimento mencionado for repetido um certo número de vezes, e em todas as vezes utilizando-se o mesmo circuito, isto é, mantendo fixos os valores de V e de R, podemos esperar o mesmo resultado para I.

2.4.2. Espaço Amostral e Eventos

O espaço amostral é o conjunto de todas as possibilidades possíveis de um experimento aleatório, e será simbolizado pela letra S. Por exemplo, ao jogar um dado em uma superfície plana observa-se o número mostrado na face voltada para cima. Nesse caso todas as possibilidades possíveis para esse experimento são $1, 2, 3, 4, 5, 6$, logo o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Como exemplo temos em uma linha de produção, fabricam-se peças em série e conte o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas.

$$S = \{0, 1, 2, 3, \ldots, N\}$$

Em que N é o número de máximo de peças que pode ser produzido em 24 horas.

É importante ressaltar que para descrever um espaço amostral associado a um experimento, devemos ter uma ideia bastante clara do que estamos observando. Por esse motivo, devemos falar de "um" espaço amostral associado a um experimento, e não de "o" espaço amostral.

Um evento é um subconjunto do espaço amostral, e podemos simboliza-lo pela letra E. Por exemplo, ao jogar um dado em uma superfície plana observa-se a ocorrência de aparecer um número par na face voltada para cima. Nesse caso o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e o evento é $E = \{2, 4, 6\}$. Logo, notamos que um evento E é relativo a um espaço amostral S particular, associado a um experimento.

Se por exemplo, uma asa de avião é fixada por um grande número de rebites. Conte o número de rebites defeituosos. Consideremos o evento mais de dois rebites eram defeituosos, neste caso, teremos:

O espaço amostral do experimento em questão é: $S = \{0, 1, 2, \ldots, M\}$, em que M é o número de rebites empregados.

O evento em questão é: $E = \{3, 4, \ldots, M\}$, ou seja, mais de dois rebites eram defeituosos.

Segundo Meyer (2009), quando o espaço amostral S for finito ou infinito numerável, todo subconjunto poderá ser considerado um evento. Entretanto, se S for infinito não numerável, encontraremos uma dificuldade teórica. Então, verifica-se que nem todo subconjunto imaginável poderá ser considerado um evento.

2.4.3. Operações entre Eventos

É possível relacionar as técnicas de operações entre conjuntos aos eventos e vice-versa. Logo, podemos aplicar as operações já estudadas em conjuntos (união, interseção, diferença, complemento), em eventos e obter novos eventos. Sabendo disso, consideremos as seguintes afirmações.

- Sendo A e B dois eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se A ou B, ou ambos, ocorrerem.
- Sendo A e B dois eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se A e B ocorrerem.
- Sendo A um evento, $\bar{A}$ será o evento que ocorrerá se, e somente se A não ocorrerem.
- Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer.
- Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrerem.
- Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ for qualquer coleção infinita numerável de eventos, então, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer.
- Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ for qualquer coleção infinita numerável de eventos, então, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrerem.

Observemos que, se denominarmos dois eventos, A e B, mutuamente excludentes, ou seja, se eles não puderem ocorrer juntos. Exprimiremos isso escrevendo $A \cap B = \emptyset$.

Por exemplo, um dispositivo eletrônico é ensaiado e o tempo total de serviço t é registrado. Admitiremos que o espaço amostral seja $S = \{t|t \geq 0\}$. Sejam A, B e C três eventos definidos da seguinte maneira:

$$A = \{t|t < 100\};\ B = \{t|50 \leq t \leq 200\};\ C = \{t|t > 150\}.$$

Consequentemente temos que:

$$A \cup B = \{t|t \leq 200\}; A \cap B = \{t|50 \leq t < 100\}; B \cup C = \{t|t \ \geq 50\};$$
$$B \cap C = \{t|150 < t \geq 200\}; A \cap C = \emptyset; A \cup C = \{t|t < 100 \ ou \ t > 150\};$$
$$\bar{A} = \{t|t \ \geq 100\}; \ \bar{C} = \{t|t \ \leq 150\}.$$

2.4.4. Definições de Probabilidade

A história nos mostra que há muito tempo tornou-se necessário o estudo e a compreensão da teoria da probabilidade, que teve sua origem ligada à necessidade de calcular as chances de ocorrência de certos resultados em jogos de azar. Hoje em dia, tal teoria tem um papel fundamental em todas as áreas da ciência, e pode ser apresentada em vários níveis de formalização matemática. No decorrer do tempo foram desenvolvidas algumas definições de probabilidade que serão listadas a seguir.

2.4.5. Definição Clássica

A definição clássica de probabilidade baseia-se no conceito primitivo de eventos igualmente possíveis. Considera-se um experimento com um número finito de eventos. Supondo que um evento E pode ocorrer de $n(E)$ maneiras distintas e igualmente prováveis, em um total de $n(S)$ maneiras possíveis. Logo, a probabilidade de ocorrência do evento $P(E)$ é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \qquad (1)$$

Este conceito foi criado por Pierre de Laplace, que se referiu as maneiras distintas $n(E)$ de um evento ocorrer como sendo “casos favoráveis”, e o total de maneiras possíveis $n(S)$ de “casos possíveis”. Ou seja:

$$Probabilidade = \frac{número \ de \ casos \ favoráveis}{número \ de \ casos \ possíveis}$$

Se S é um espaço amostral finito que satisfaz as condições da definição clássica de probabilidade. O cálculo da probabilidade definida na equação (1) satisfaz:

- $P(E) \geq 0$, para todo $E \subset S$;
- Se $A \ e \ B$ são eventos mutuamente exclusivos, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- $P(S) = 1$.

Vamos considerar o seguinte exemplo: Admita-se que o evento E seja a ocorrência dos números 3 ou 4, em um único lance de dado. Há seis maneiras segundo as quais o dado pode cair, e que resultam nos números 1, 2, 3, 4, 5, ou 6. Se o dado é honesto (isto é, não é viciado), pode-se supor que as seis maneiras são igualmente prováveis. Como E pode ocorrer de duas maneiras, tem-se:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6}$$

Logo:

$$P(E) = \frac{1}{3}$$

Segundo Spiegel (1976) a definição clássica de probabilidade apresenta uma grande desvantagem, pela expressão “igualmente provável” ser vaga. E essa definição está definindo a probabilidade com seus próprios termos. Ou seja, como vimos anteriormente em determinadas circunstâncias podemos atribuir a mesma chance a todos os eventos simples associados ao experimento. No entanto, quando o número de eventos simples do espaço amostral não for finito, esta possibilidade se torna afastada.

2.4.6. Definição Frequentista

A definição da probabilidade como frequência é uma definição estatística de probabilidade, e permite apenas determinar uma estimativa da probabilidade de ocorrência de um evento para infinitas repetições.

Quando o número de observações é extremamente grande, a probabilidade de um evento é considerada como a frequência relativa de sua ocorrência. Ou seja, ao repetir o experimento aleatório por n vezes, e anotar quantas vezes o evento E associado a esse experimento ocorre. Adotando $n(E)$ como sendo o número de vezes que o evento E ocorreu nas n repetições do experimento, podemos calcular a frequência relativa de E nas n repetições, por:

$$f_E = \frac{n(E)}{n} \tag{2}$$

A frequência relativa f_E definida na classe dos eventos do espaço amostral S, deve satisfazer as seguintes condições:

- $0 \leq f_E \leq 1$;

- $f_E = 1$ se, e somente se, E ocorrer em todas as n repetições;
- $f_E = 0$ se, e somente se, E nunca ocorrer nas n repetições;
- Quando A e B forem eventos mutuamente exclusivos, e se $f_{A \cup B}$ for a frequência relativa associada ao evento $A \cup B$, então, $f_{A \cup B} = f_A + f_B$;
- f_A, com base em n repetições do experimento e considerada como uma função de n, converge em certo sentido probabilístico para $P(A)$, quando $n \to \infty$.

Se, por exemplo em 1000 lances de uma moeda resultam 529 caras, a frequência relativa das caras é:

$$f_E = \frac{529}{1000} = 0{,}529.$$

E em outros 1000 lances resultam 493 caras, a frequência relativa total dos 2000 lances será:

$$f_E = \frac{(529 + 493)}{2000} = 0{,}511.$$

De acordo com a definição estatística, prosseguindo-se dessa maneira, pode-se finalmente chegar cada vez mais próximo de um número que será denominado probabilidade de ocorrer uma cara no único lance de uma moeda, isto é, repetindo-se o experimento um grande número de vezes, nas mesmas condições, observa-se que a frequência relativa de ocorrência do evento tende a uma constante.

Embora a definição estatística de probabilidade seja útil na prática, a mesma apresenta dificuldades do ponto de vista matemático, sendo que quando a frequência relativa se aproxima de uma constante o número de repetições do experimento tende ao infinito.

2.4.7. Definição Subjetiva

Existem casos em que a probabilidade de ocorrência de determinados eventos não podem ser calculados em termos de probabilidade clássica ou frequentista, pois ambas partem do princípio de que o experimento seja repetido sob as mesmas condições, como por exemplo, para saber se vai chover em um determinado dia, você pode ter informações disponíveis sobre ocorrências passadas de chuva em certa época do ano, de uma certa localidade, sob certas condições atmosféricas como: temperatura, umidade, velocidade e direção do vento. Mas não se pode afirmar que qualquer uma destas informações represente situações exatamente idênticas à atual.

Para isso usa-se a definição subjetiva de probabilidade, que de acordo com Freund(2006, p. 129) é utilizada em situações que o experimento não pode ser repetido nas mesmas condições. Sendo assim, considera-se a probabilidade de um evento como sendo a medida da crença que o observador, de um experimento, possui na ocorrência do evento, em outras palavras a probabilidade subjetiva é baseada no julgamento pessoal, acúmulo de conhecimento e experiência de vida. Ou seja, podemos pensar na probabilidade como a representação da opinião individual referente ao que acontecerá em um único evento do experimento incerto em questão, em vez de uma afirmação sobre o que ocorrerá em uma série de repetições.

2.4.8. Definição Axiomática

Do ponto de vista axiomático, a probabilidade é um objeto que satisfaz determinados axiomas, definidos por Kolmogorov, obtendo os resultados teóricos mediante deduções lógicas. Nesse caso a probabilidade é definida numa classe de eventos do espaço amostral (S) que satisfaz as seguintes propriedades:

P.1. A probabilidade do evento E ocorrer é maior/igual zero, ou seja, $P(E) \geq 0$. Nesse caso, a chance de ocorrência do evento E não deve ser negativa.

P.2. Se os eventos $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ são uma sequência de eventos de F, que são mutuamente exclusivos, então:

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\,(E_n); \tag{3}$$

Esse axioma nos mostra que a probabilidade de ao menos um de vários eventos ocorra, sendo que dois eventos não ocorram simultaneamente, será a soma das chances dos eventos individuais.

P.3. A probabilidade do espaço amostral S é igual a 1, ou seja, $P(S) = 1$. Por esse axioma, notamos que a maior probabilidade de S é 1.

Devemos considerar os espaços amostrais enumeráveis. Ou seja, se o espaço amostral (S) é enumerável e E um subconjunto de S, podemos definir a probabilidade de E como segue:

$$P(E) = \sum_{n:\omega_n \in E} P(\omega_n) \tag{4}$$

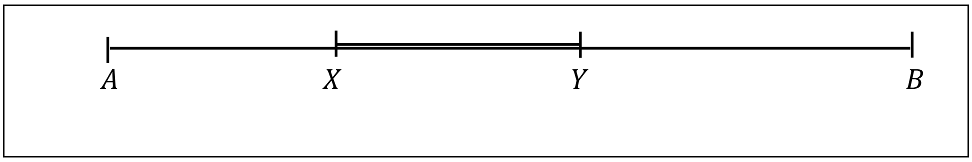
Nesse caso o espaço amostral S será representado da seguinte maneira $S = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)$. Associaremos cada ω_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, um número $P(\omega_n)$, tal que $P(\omega_n) \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_n) = 1$, e $P(\omega_n)$ será denominado de probabilidade do evento simples ω_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

2.4.9. Definição Geométrica

A definição de probabilidade geométrica é utilizada quando se tem a necessidade de usar noções de geometria para resolver problemas probabilísticos, e as noções mais utilizadas são as de comprimento, área e volume.

A noção de comprimento é usada quando precisamos escolher um ponto de uma determinada "linha", para isso precisaremos entender a ideia de segmento para resolver o problema. Para Gondim (2013), sejam X e Y pontos de um segmento de linha de extremos A e B, conforme ilustra a imagem 2.

Imagem 2 - Representação dos pontos X e Y do segmento de reta.



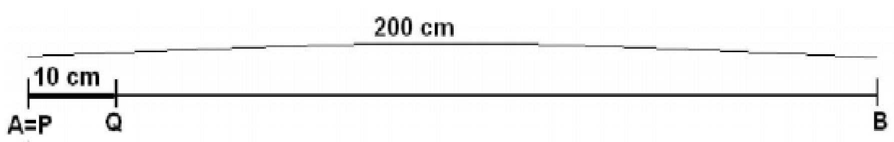
Fonte: Elaborado pelo autor

Admitindo que a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença à linha XY (contida em AB) é proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos X e Y sobre AB. Logo, escolhendo um ponto de AB, a probabilidade de que ele pertença a XY será de:

$$Probabilidade(XY) = \frac{medida\ do\ comprimento\ de\ XY}{medida\ do\ comprimento\ de\ AB}$$

Como exemplo, qual a probabilidade de, em uma corda de comprimento 2 m, um ponto pertencer exatamente aos 10 cm iniciais? Conforme ilustra a imagem 3.

Imagem 3 - Imagem 3: representação dada no exemplo.



Fonte: Alcântara (2014)

Assim, a probabilidade pedida é a de um ponto do segmento AB, de 200 cm, pertencer ao segmento PQ, de 10 cm. Logo:

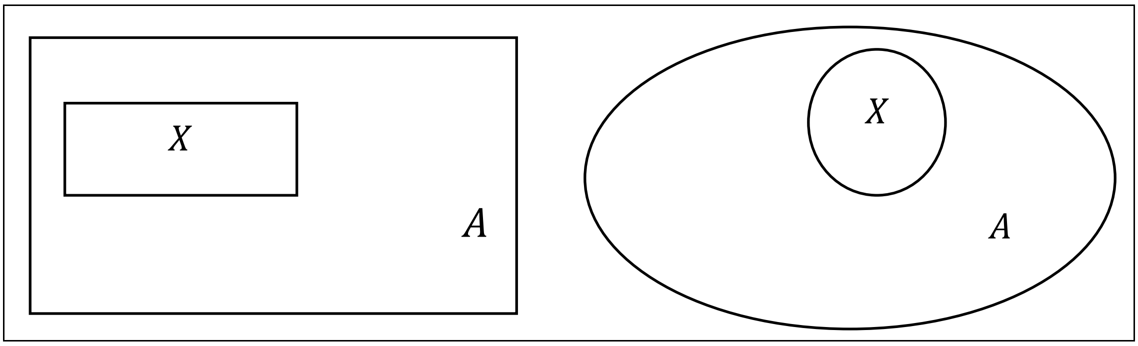
$$P(XY) = \frac{medida\ do\ comprimento\ de\ PQ}{medida\ do\ comprimento\ de\ AB}$$

$$P(XY) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Ou seja, a probabilidade de que o ponto pertença aos 10 centímetros iniciais é de 5%.

Assim, para o cálculo de probabilidade envolvendo as noções áreas consideremos, como exemplo, a região X do plano que está contida na região A, conforme ilustra a imagem 4.

Imagem 4: Áreas geométricas para calcular a probabilidade.



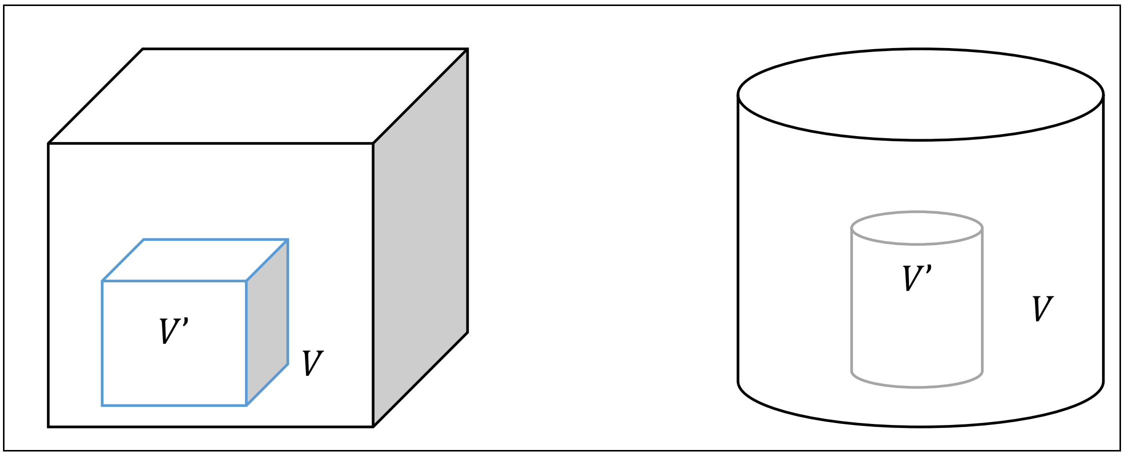
Fonte: Elaborado pelo autor

Adotando que a probabilidade de que um ponto da região da área A pertença à região X (que está contida na área A) é proporcional à área de X e não depende da posição que X ocupa em A. Portanto, selecionando ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a X será de:

$$Probabilidade(X) = \frac{medida\ da\ área\ de\ X}{medida\ da\ área\ de\ A}$$

Segundo Gondim (2013), são poucos problemas de probabilidade que envolve noções de volume, mas não são menos importantes. Considere um corpo com um volume V' no espaço que está contido em um corpo de volume V, de acordo com a imagem 6.

Imagem 5: noções de volume para calcular a probabilidade.



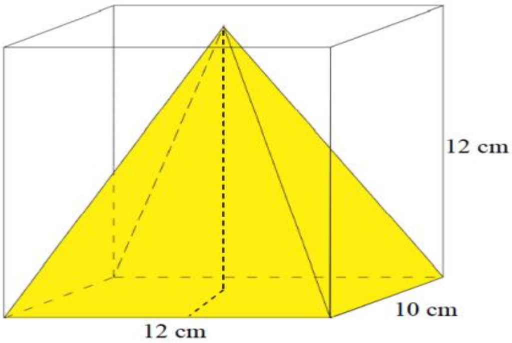
Fonte: Elaborado pelo autor

Admitindo que a probabilidade de que um ponto do corpo de volume V pertença ao corpo de volume V' (que pertence à V) é proporcional ao volume V' e não depende da posição que V' ocupa em V. Logo, selecionando ao acaso um ponto de V, a probabilidade de que ele pertença a V' é de:

$$Probabilidade(V') = \frac{medida\ do\ volume\ de\ V'}{medida\ do\ volume\ de\ V}$$

Como exemplo, um paralelepípedo retangular de 12 cm de comprimento por 10 cm de largura por 12 cm de altura, temos uma pirâmide retangular inscrita, como mostra a imagem a seguir:

Imagem 6: Ilustração do exemplo.



Fonte: Alcântara (2014)

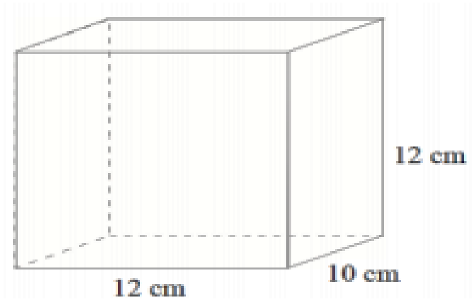
Qual a probabilidade de, ao pegarmos um ponto ao acaso no interior do paralelepípedo, esse ponto pertencer à pirâmide?

Sabendo que o volume de um paralelepípedo é calculado por: $V = A_b.h$. Onde: V é o volume, A_b é a área da base do paralelepípedo e h é a altura do paralelepípedo.

E o volume de uma pirâmide é calculado por: $V' = \frac{1}{3}.A_b.h$. Onde: V' é o volume, A_b é a área da base da pirâmide e h é a altura da pirâmide.

Assim, o volume do paralelepípedo retangular dado neste exemplo é:

Imagem 7: Paralelepípedo do exemplo dado.



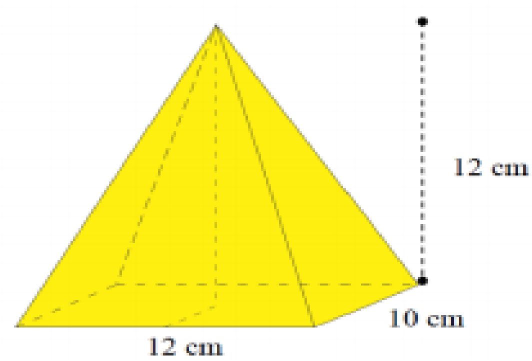
Fonte: Alcântara (2014)

$$V = A_b.h$$

$$V = 120.12 = \ 1440\ cm^3$$

Por outro lado, o volume da pirâmide dada neste exemplo é:

Imagem 8: Pirâmide do exemplo dado.



Fonte: Alcântara (2014)

$$V' = \frac{1}{3}.A_b.h \ = \ \frac{1}{3}.120.12 = \ 480\ cm^3.$$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P(V') = \frac{medida\ do\ volume\ de\ V'}{medida\ do\ volume\ de\ V} = \frac{480}{1440} = \frac{1}{3} = 0{,}3333\ ...$$

Portanto, a probabilidade de, escolhido um ponto ao acaso no paralelepípedo retangular, ele pertencer à pirâmide é de 33,33%.

2.4.10. O Problema da Agulha de Buffon

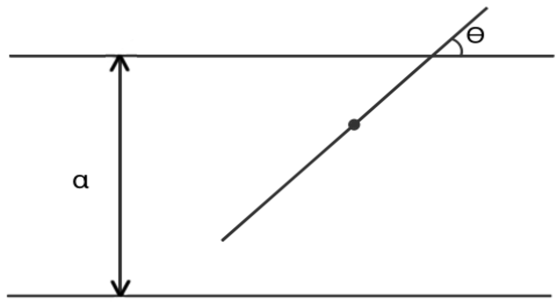
Em 1777 o francês ***Georges-Louis Leclerc* (1707 – 1788),** conhecido como Conde de Buffon, matemático, naturalista e membro da Academia

Francesa, apresenta o “problema da agulha de Buffon” propondo determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento l atravessar um feixe de paralelas, distantes entre si de a $> \mathrm{l}$, quando lançada aleatoriamente. Para este problema tomamos como referência o estudo de Moraes (2014) que trata de forma concisa, sem deixar de lado o rigor e a demonstração.

Consideremos uma família de retas paralelas em um plano, onde qualquer duas paralelas adjacentes distam de a. Lançando ao acaso, sobre o plano, uma agulha de comprimento $l\ (l < a)$, qual a probabilidade de que a agulha intercepte uma das retas?

Sejam x a distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima e θ o ângulo formado pela agulha e por esta mesma reta, conforme ilustra a Imagem 09.

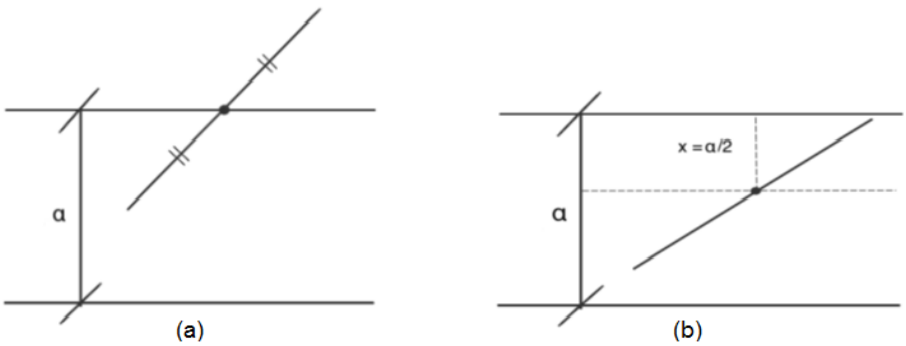
Imagem 09: Distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima



Fonte: Moraes (2014)

Esses dois valores $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$; $\theta \in [0; \pi]$, determinam a posição da agulha em relação à reta mais próxima. Note que $x = 0$, se o ponto médio da agulha cai exatamente sobre uma das retas paralelas e $x = \frac{a}{2}$ se este ponto médio interceptar a reta bissetora de duas paralelas, conforme ilustra a Imagem 10.

Imagem 10: (a) Ponto médio da agulha cai exatamente sobre uma das paralelas, (b) Ponto médio intercepta a reta bissetora de duas paralelas.

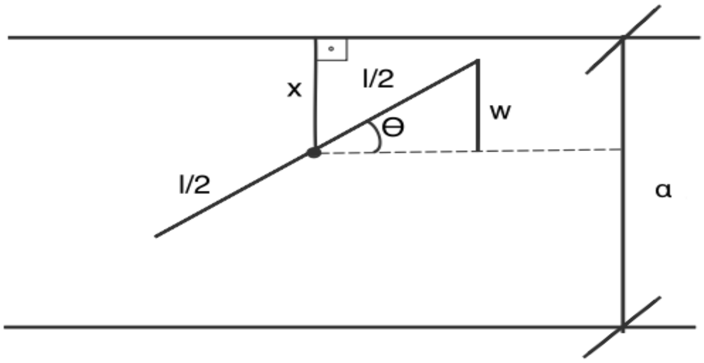


Fonte: Moraes (2014)

Quando a agulha interceptará a reta mais próxima?

Considere uma linha imaginária passando pelo ponto médio da agulha, paralela às linhas paralelas. Seja w a distância entre uma das extremidades da agulha e tal linha imaginária, veja Imagem 11.

Imagem 11: Linha imaginária passando pelo ponto médio da agulha.

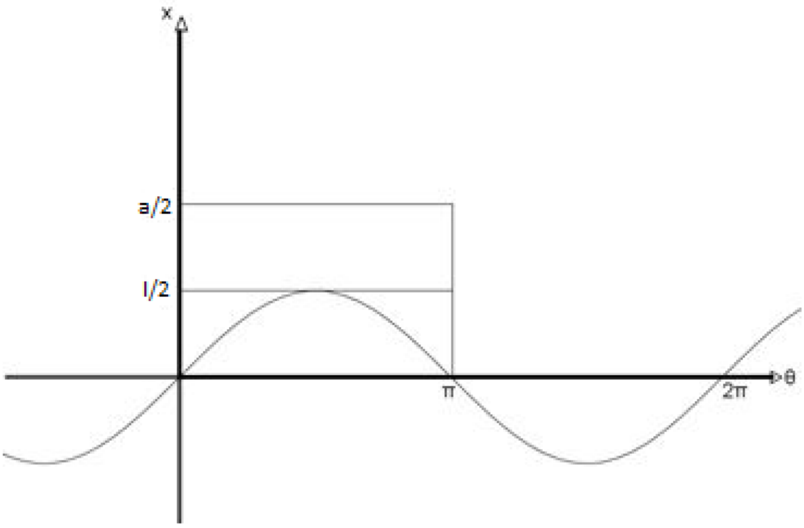


Fonte: Moraes (2014)

Observe que a agulha tocará a linha paralela mais próxima do seu centro se $w \geq x$. Assim, $sen\theta = \frac{w}{\frac{l}{2}}$, ou seja, $w = \frac{lsen\theta}{2}$.

Concluímos que a agulha tocará a linha paralela mais próxima de seu centro se $x \leq w = \frac{lsen\theta}{2}$, ou seja, $x \leq \frac{lsen\theta}{2}$. Lembrando que $x \in [0; a/2]$ e $\theta \in [0; \pi]$, temos que o gráfico da função $x(\theta) = \frac{lsen\theta}{2}$ no plano $\theta \times x$, é:

Imagem 12: Gráfico da função $x(\theta)$



Fonte: Elaborado pelo autor

O retângulo de vértices $(0,0), (\pi, 0), (\pi, a/2)$ e $(0, a/2)$ corresponde a todos os possíveis pares ordenados (θ, x) no lançamento da agulha. Pela inequação $x \leq \frac{lsen\theta}{2}$ a região sob o gráfico da função $x(\theta) = \frac{lsen\theta}{2}$ é a região na qual a agulha toca uma linha paralela. A área desta região é dada por:

$$\int_0^{\pi} \frac{l}{2} sen\theta d\theta = \frac{l}{2} cos\theta|_0^{\pi} = \frac{l}{2}(-cos\pi + cos0) = \frac{l}{2}(1+1) = l.$$

Sendo A o evento dos pontos onde a agulha toca uma linha, temos que, a probabilidade geométrica de que a agulha toque uma linha é:

$$P(A) = \frac{l}{\pi.\frac{a}{2}} = \frac{2l}{a\pi}$$

Por exemplo, se a distância entre as paralelas for 5 e o tamanho da agulha for $l = 4$, então a probabilidade de que a agulha toque uma linha é de$\frac{2.4}{5\pi} \cong 51\%$.

2.4.11. Propriedades da Probabilidade

Apresentaremos algumas propriedades da probabilidade que resultam diretamente ou indiretamente dos axiomas da definição axiomática de probabilidade seção 2.4.8.

P.1. Chamando de Φ um evento impossível, temos que a probabilidade de Φ ocorrer é igual a zero, isto é, $P(\Phi) = 0$.

Demonstração:

Se um evento E de um espaço amostral S de probabilidade positiva, e seja Φ um evento impossível, podemos representar o evento de E da seguinte maneira:

$$E = E \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$$

Onde para todo $i \geq 1,\ \Phi_i = \Phi$.

Pelo segundo axioma da definição 3.4.4, temos que:

$$P(E) = P(E) + \sum_{i=1}^{\infty} P(\Phi)$$

Se substituirmos $P(E)$ de ambos os lados da igualdade, temos que a expressão acima só faz sentido se:

$$P(\Phi) = 0. \tag{5}$$

P.2. Sabendo que os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são mutuamente exclusivos, temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$$

Demonstração:

Para demonstrarmos basta considerarmos a sequência $E_1, E_2, \ldots, E_n$, $E_k = \Phi, \mathrm{k} \geq \mathrm{n} + 1$ e aplicar o segundo axioma da definição 3.4.4, e considerando $P(\Phi) = 0$. Então temos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\,(E_i). \tag{6}$$

P.3. Como $\bar{\mathrm{A}}$ é o complementar de A, a probabilidade de $\bar{\mathrm{A}}$ ocorrer é igual 1 menos a probabilidade A ocorrer, isto é, $P(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - P(A)$.

Demonstração:

Se A e Ā são eventos mutuamente exclusivos, então A ∩ Ā = Ø e sua reunião é S. Disso decorre que:

$$P(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 1$$

Então,

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A}). \tag{7}$$

P.4. Sendo A e B dois eventos do espaço amostral S, tais que A está contido em $B\ (A \subset B)$, temos que a probabilidade de A ocorrer é menor/igual à probabilidade de B ocorrer, isto é, $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração:

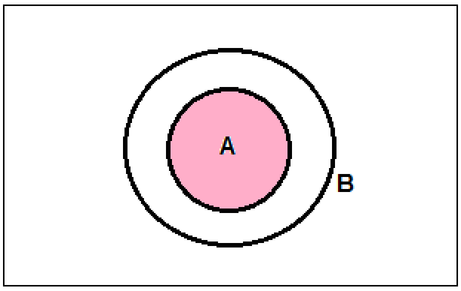
Já que $A \subset B$, segue que $B = A \cup (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}})$, então:

$$P(B) = P(A) + P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}).$$

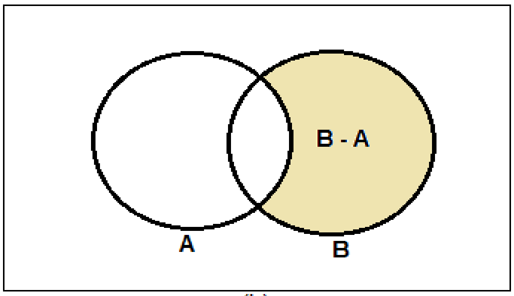
Como $P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) \geq 0$, concluímos que:

$$P(A) \leq P(B). \tag{8}$$

Imagem 13 (a): Representação pelo diagrama de Veem de $A \subset B$. (b): Representação pelo diagrama de Veem de $\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}$.



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor

P.5. Se A e B são dois eventos quaisquer do espaço amostral S, temos que a probabilidade da união de A e B é igual à probabilidade de A mais a probabilidade de B menos a probabilidade da interseção de A e B, isto é, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração:

Podemos decompor $A \cup B$ e B em dois eventos mutuamente exclusivos:

$$A \cup B = A \cup (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}).$$

Logo temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) \tag{9}$$

Sabendo que $B = (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, vem:

$$P(B) = P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \tag{10}$$

Subtraindo a equação (10) da equação (9), obtemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\mathrm{B}) - P(A \cap B). \tag{10}$$

2.4.12. Chance e Probabilidade

Segundo Stevenson (2001) conceitos como chance e probabilidade são os quais temos noções intuitivas e acham-se estreitamente relacionadas. Chance é apenas um método alternativo de exprimir as probabilidades. A única diferença entre chance e probabilidade é que a chance compara o número de resultados favoráveis com o número de casos desfavoráveis, ou seja, a chance de um evento é uma razão entre a probabilidade de acontecer o evento sobre a probabilidade de não acontecer o evento, portanto, pode dar valores entre 0 e infinito. Ao passo que a probabilidade compara o número de resultados favoráveis com o número total de resultados possíveis, isto é, a probabilidade de um certo acontecimento é uma medida que relaciona o número de eventos favoráveis a este acontecimento desejado sobre o número de eventos possíveis, e nesse caso só pode assumir valores entre 0 e 1.

Por Exemplo, **s**uponhamos uma urna com 10 bolas, 8 vermelhas e 2 verdes. A probabilidade de escolher uma verde numa única extração é:

$$P(Verde) = \frac{2}{10}$$

Logo, a probabilidade de que em uma única extração saia uma bola verde é $\frac{1}{5}$. Enquanto que a chance a favor da bola verde é $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$.

Suponhamos, agora, que quiséssemos saber a probabilidade de escolher uma vermelha numa única extração.

$$P(Vermelha) = \frac{8}{10}$$

Sendo assim, a probabilidade de que em uma única extração saia uma bola vermelha é $4/5$. Enquanto que a chance a favor da bola vermelha é $8/2$ ou 4.

2.4.13. Probabilidade Condicional

O conceito de probabilidade condicional é de grande importância para distinguir a teoria da probabilidade de outros ramos da matemática. Para introduzirmos tal conceito devemos considerar uma situação especial, em que o espaço amostral tem eventos equiprováveis.

Considere o experimento que consiste em lançar um dado duas vezes em uma superfície plana e observar o número de pontos na face superior do dado em cada um dos lançamentos. Supondo que não se presencie os lançamentos do dado, mas receba a seguinte informação: em cada um dos lançamentos, o número de pontos observados é menor ou igual a dois. E chamaremos de A esse evento. Nessas condições, questiona-se: Adotando por B o evento "soma dos pontos nos dois lançamentos igual a quatro". Qual a probabilidade $P(B)$? Ou seja, queremos saber qual a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo que o evento A já ocorreu?

O espaço amostral associado aos eventos A e B é:

$$S = \{(i,j) : i,j \text{ são inteiros } 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\ ;\ B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$

Ao dizer que o evento A já ocorreu, é o mesmo que dizer que pode não se levar em conta qualquer ponto do espaço amostral que não pertença a A, logo se considera A como sendo o novo espaço amostral do experimento. Desse modo a probabilidade de B ocorrer dado A é igual a $1/4$, pois dos quatro elementos de A apenas o elemento $(2,2) \in B$, e os quatro pontos são equiprováveis.

Por definição, sejam A e B dois eventos associados a um experimento, a probabilidade condicional do evento B ocorrer quando o evento A tiver ocorrido e $P(A) > 0$, pode ser calculada por:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{11}$$

É importante observar que a definição de probabilidade condicional satisfaz a várias propriedades da probabilidade, já citadas anteriormente, como segue:

P.1. A probabilidade condicional do evento ∅ ocorrer quando o evento A estiver ocorrido é igual à zero, ou seja, $P(\emptyset|A) = 0$.

Demonstração:

$$P(\emptyset|A) = \frac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0.$$

P.2. A probabilidade condicional do evento B ocorrer quando o evento A tiver ocorrido é maior/igual a zero e menor/igual a 1, ou seja, $0 \leq P(B|A) \leq 1$.

Demonstração:

Como $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$, temos:

$$0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1,$$

Ou seja,

$$0 \leq P(B|A) \leq 1.$$

P.3. A probabilidade condicional do espaço amostral S ocorrer quando o evento A tiver ocorrido é igual a 1, ou seja, $P(S|A) = 1$.

Demonstração:

$$P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

P.4. A probabilidade condicional da união de dois eventos B_1 e B_2 ocorrer sendo que o evento A já ocorreu é igual a probabilidade condicional de B_1 ocorrer sendo que A já ocorreu mais a probabilidade condicional de B_2 ocorrer sendo que A já ocorreu se a interseção de B_1 e B_2 for igual a ∅, isto é, $P[(B_1 \cup B_2)|A] = P(B_1|A) + P(B_2|A)\ se\ B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} P[(B_1 \cup B_2)|A] &= \frac{P[(B_1 \cup B_2) \cap A]}{P(A)} \\ &= \frac{P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)]}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} \end{aligned}$$

$$= P(B_1|A) + P(B_2|A).$$

Como exemplo, Suponha que em um escritório possua 100 máquinas de calcular. Algumas dessas máquinas são elétricas (E), enquanto outras são manuais (M); e algumas são novas (N), enquanto outras são usadas (U). A tabela a seguir dá o número de máquinas de cada categoria. Uma pessoa entra no escritório, pega uma máquina ao acaso, e descobre que é nova. Qual será a probabilidade de que seja elétrica?

	E	M	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

Em termos de notação, desejamos calcular $P(E|N)$.

Considera-se somente o espaço amostral reduzido N, (isto é, as 70 máquinas novas), temos:

$$P(E|N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}.$$

Empregando a definição de probabilidade condicional, temos que:

$$P(E|N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{40/100}{70/100} = \frac{4}{7}.$$

Uma consequência imediata da definição de probabilidade condicionada é o Teorema do Produto, que de acordo com Flor (2014), apresentaremos a seguir.

2.4.14. Teorema do Produto

Se $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq \emptyset$ então,

$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) =$

$$= P(A_1).(A_2|A_1).P[A_3/(A_1 \cap A_2)] \dots P[A_n/(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})]$$

Demonstração

Pelo princípio da indução finita o teorema é válido para $n = 2$, pois pela definição de probabilidade condicional temos que:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).(A_2|A_1)$$

Também podemos mostrar que o teorema é válido para três conjuntos. Basta tomar $A_1 \cap A_2$ como único conjunto de A_3 como o outro, então temos que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3] = P(A_1 \cap A_2).P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Como $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).(A_2|A_1)$, concluímos que,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_2) = P(A_1).(A_2|A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

Logo, o teorema é válido para $n = 3$. Como hipótese de indução vamos admitir que o teorema fosse valido para $n = k$, ou seja,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) =$$
$$= P(A_1).(A_2|A_1).P[A_3/(A_1 \cap A_2)] \ldots P[A_k/(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})]$$

Vejamos agora se o teorema é valido para $k + 1$ conjuntos. Consideremos então os seguintes conjuntos:

$A = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$ e A_{k+1}. Podemos escrever então:

$$P(A_1 \cap A_{k+1}) = P(A).P(A_{k+1}/A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k).P(A_{k+1}/A)$$

Utilizando a hipótese de indução podemos chegar a seguinte conclusão: $P(A_1 \cap A_{k+1}) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P[(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1}] = = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k).P\,[A_{k+1}/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k] = P(A_1).(A_2|A_1) \ldots P(A_k\,/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}).P(A_{k+1}/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$, o que prova o teorema, pois admitindo que o mesmo valha para k, concluímos que este vale para $k + 1$, ou seja, vale para todos os naturais n.

Essa relação é, algumas vezes, mencionada como o teorema da multiplicação. E é aplicada para calcular a probabilidade da ocorrência conjunta de dois ou mais eventos.

Consideremos um lote formado de 20 peças defeituosas e 80 não defeituosas. Se escolhermos ao acaso duas peças, sem reposição, qual será a probabilidade de que ambas as peças sejam defeituosas?

Definiremos os eventos A e B da seguinte maneira:

$$A = \{a\ primeira\ peça\ \text{é}\ defeituosa\};\quad B = \{a\ primeira\ peça\ \text{é}\ defeituosa\}.$$

Consequentemente calcularemos $P(A \cap B)$, para isso utilizaremos o teorema do produto.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Como $P(B|A) = 19/99$ e $P(A) = 1/5$, temos que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5}\,.\frac{19}{100} = \frac{19}{495}$$

Outro Teorema importante em Probabilidade é o Teorema da Probabilidade Total permite calcular a probabilidade de um evento A quando se conhece as probabilidades de um conjunto de eventos disjuntos cuja reunião é o espaço amostral e as probabilidades condicionais de A dado cada um deles. Tomamos como referência o trabalho de Flor (2014) para o enunciado e a demonstração, como exposto a seguir.

2.4.15. Teorema da Probabilidade Total

Seja B um conjunto associado a um evento B e sejam os conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ associados aos eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Considere todos os conjuntos A_i, i variando de 1 até n todos disjuntos e também que o conjunto B esteja contido na união dos n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Do que foi exposto conclui-se que:

$$P(B) = P(A_1).(B|A_1) + P(A_2).(B|A_2) + \cdots + P(A_n).(B|A_n)$$

Demonstração

Por hipótese temos que $B \subset (A_1 \cup\ A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Daí decorre que,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (\ A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

Vale ressaltar que os conjuntos $(A_i \cap B), 1 \leq i \leq n$, são todos disjuntos pois os elementos de $(A_1 \cap B), (\ A_2 \cap B), \dots, (A_n \cap B)$, pertencem respectivamente a $A_1, A_2, \dots, A_n$ que são disjuntos.

Da disjunção dos $(A_1 \cap B)$ conjuntos temos:

$$n(B) = n(A_1 \cap B) + n(\ A_2 \cap B) + \cdots + n(A_n \cap B)$$

Dividindo o primeiro e o segundo membro da igualdade por $n(\Omega)$, ficamos com o resultado:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(\ A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

Para concluir a demonstração do teorema, é suficiente a aplicação da definição de probabilidade condicional para todos os $(A_i \cap B)$ eventos, ou seja,

$$P(A_i \cap B) = P(A_i).(B|A_i)$$

Para $1 \leq i \leq n$.

Com esta informação finalizamos da seguinte maneira:

$$P(B) = P(A_1).(B|A_1) + P(A_2).(B|A_2) + \cdots + P(A_n).(B|A_n)$$

Como queríamos demonstrar.

Como exemplo, são dadas três urnas com as seguintes composições: a urna um tem três bolas brancas e cinco vermelhas, a urna dois tem quatro bolas brancas e duas vermelhas e a urna três tem uma bola branca e três vermelhas. Escolhe-se uma dessas três urnas de acordo com as seguintes probabilidades: urna um com probabilidade $2/6$, urna dois com probabilidade $3/6$ e urna três com probabilidade $1/6$. Uma bola é retirada da urna selecionada. Calcularemos a probabilidade de a bola escolhida ser branca.

Denotaremos por A o evento que corresponde a retirar uma bola branca da urna selecionada, e por B_i, para $1 \leq i \leq 3$, o evento " a urna i é selecionada". Então temos $A = A(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

Utilizando o teorema das probabilidades totais para $n = 3$ obtemos:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

O exemplo nos fornece os seguintes dados:

$$P(B_1) = \frac{2}{6}, \qquad P(B_2) = \frac{3}{6}, \qquad P(B_3) = \frac{1}{6};$$

$$P(A|B_1) = \frac{3}{8}, \qquad P(A|B_2) = \frac{4}{6}, \qquad P(A|B_3) = \frac{1}{4}.$$

Substituindo esses valores na expressão acima obtemos:

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Não menos importante é o Teorema de Bayes, também conhecido como fórmula da probabilidade de causa ou dos antecedentes, nos dá a probabilidade de um evento particular B_i dado um evento A tenha ocorrido, ou seja, um dos eventos B_i deverá ocorrer e somente um poderá ocorrer. A seguir temos o Teorema com seu enunciado e uma demonstração de acordo com a dissertação de Flor (2014).

2.4.16.Teorema de Bayes

De acordo com o teorema da probabilidade total, temos que:

$$P(B) = P(A_1).(B|A_1) + P(A_2).(B|A_2) + \cdots + P(A_n).(B|A_n)$$

Para calcular a probabilidade de algum evento A_i, sendo este i fixado, podemos assumir valores de 1 até n, dado que o evento B ocorreu, temos:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).(B|A_i)}{P(B)}$$

Fazendo uso do já concluímos a cima, podemos escrever:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).(B|A_i)}{P(B) = P(A_1).(B|A_1) + P(A_2).(B|A_2) + \cdots + P(A_n).(B|A_n)}$$

Importante salientar que quando calculamos $P(B)$ pelo teorema da probabilidade total, estamos calculando esta probabilidade em relação ao espaço amostral (Ω), enquanto que, ao utilizar o teorema de Bayes, estamos calculando necessariamente uma probabilidade condicional.

Por exemplo, durante o Mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinado é de $4/10$. O Flamengo ganha um jogo em um dia com chuva com probabilidade de $6/10$ e em um dia sem chuva com probabilidade de $4/10$. Sabendo que o Flamengo ganhou um jogo naquele dia de agosto, qual a probabilidade de que choveu nesse dia?

Notaremos por $P(C)$ para quando de chover, $P(NC)$ para não choveu, $P(G)$ para quando ganhou e $P(NG)$ para quando não ganhou.

Utilizando o teorema de Bayes temos:

$$P(C|G) = \frac{P(C)P(G|C)}{P(C)P(G|C) + P(NC)P(G|NC)}$$

Logo:

$$P(C|G) = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{1}{2}.$$

2.4.17. Probabilidade de Eventos Independentes

Como já vimos, quando dois eventos A e B não ocorrem conjuntamente $A \cap B = \emptyset$. Neste caso, temos que A e B são mutuamente excludentes, então $P(A|B) = 0$. Em outro caso se A e B são dois eventos e suponhamos que $P(A) > 0$, o evento B é considerado independente de A se:

$$P(B|A) = P(B). \quad (14)$$

Isso significa que a probabilidade de B não se altera com a informação de que A já ocorreu. Sabendo disso temos:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (15)$$

Assim, se o evento B é independente de A podemos afirmar que A é independente de B, então:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Por exemplo: Duas moedas são lançadas. Consideremos os seguintes eventos: $A_1 =$ cara no primeiro lançamento, $A_2 =$ cara no segundo lançamento e $A_3 =$ nos lançamentos ocorre a mesma face.

Nesse caso o espaço amostral é $S = \{CC, CK, KC, KK\}$, onde C significa cara e K coroa.

Supondo que a moeda é balanceada e, portanto que os pontos do espaço amostral têm probabilidade $1/4$.

$A_1 = \{CC, CK\}, A_2 = \{CC, KC\}, A_3 = \{CC, KK\}$,

$A_1 \cap A_2 = \{CC\}, A_1 \cap A_3 = \{CC\}, A_2 \cap A_3 = \{CC\}$,

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{CC\}$.

Calculando a probabilidade desses eventos, obtemos:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}.$$

Com isso, notamos que a equação (15) vale para eventos tomados dois a dois, entretanto para eventos tomados três a três a mesma não vale, logo:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

2.5. O Ensino de Probabilidade Segundo Estudantes do Ensino Médio

Com o intuito de identificar dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem de probabilidade, realizamos uma consulta diagnóstica por meio de questionários de perguntas fechadas contendo 14 questões versando sobre aspectos sociais e educacionais, complementado por oito questões propostas envolvendo tópicos básicos sobre probabilidade para o ensino médio. Em um trabalho de campo aplicado para 71 alunos de uma escola pública, localizada no bairro do Algodoal do Município de Abaetetuba- Pará. Os alunos oriundos da zona urbana, rural e comunidades ribeirinhas do Município e que já haviam estudado o conteúdo em questão.

A pesquisa foi realizada no dia 26 de janeiro de 2016, após um contato prévio no dia 19 de janeiro com a direção da escola, com os professores de matemática e a coordenação pedagógica com o intuito de explicitarmos nossos objetivos e obtermos as autorizações dos mesmos quanto ao acontecimento do diagnóstico. Vale ressaltar a forma harmoniosa que fomos recebidos nesta escola.

Assim como, para a participação dos alunos, explicamos para eles que se tratava de um trabalho de pesquisa cujo objetivo era contribuir para o ensino e aprendizado de probabilidade, os estudantes entenderam os nossos objetivos e não ofereceram resistência em participar. Todavia, foi encaminhada previamente a autorização aos seus responsáveis através do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

As aplicações dos questionários ocorreram em aulas cedidas pelos professores de matemática ou de outras áreas ou em horários vagos. Alguns alunos entregaram o questionário com as questões bem rápido, cerca de 10 minutos. Mas, percebeu-se que a maioria leu com calma as questões e as resolveram com muita concentração. Em média as atividades duraram 60 minutos. Como forma de agradecimentos demos para cada aluno (a) uma caneta, e indicamos o App Duolingo que é um aplicativo que ajuda o aluno em língua estrangeira.

Após a aplicação dos questionários e das questões, procedemos com a sistematização dos dados, utilizamos para isso o Google Drive que é uma ferramenta que disponibiliza fazer questionários on-line podendo enviar as respostas para a construção de tabelas e gráficos.

2.5.1 Resultados e Análises

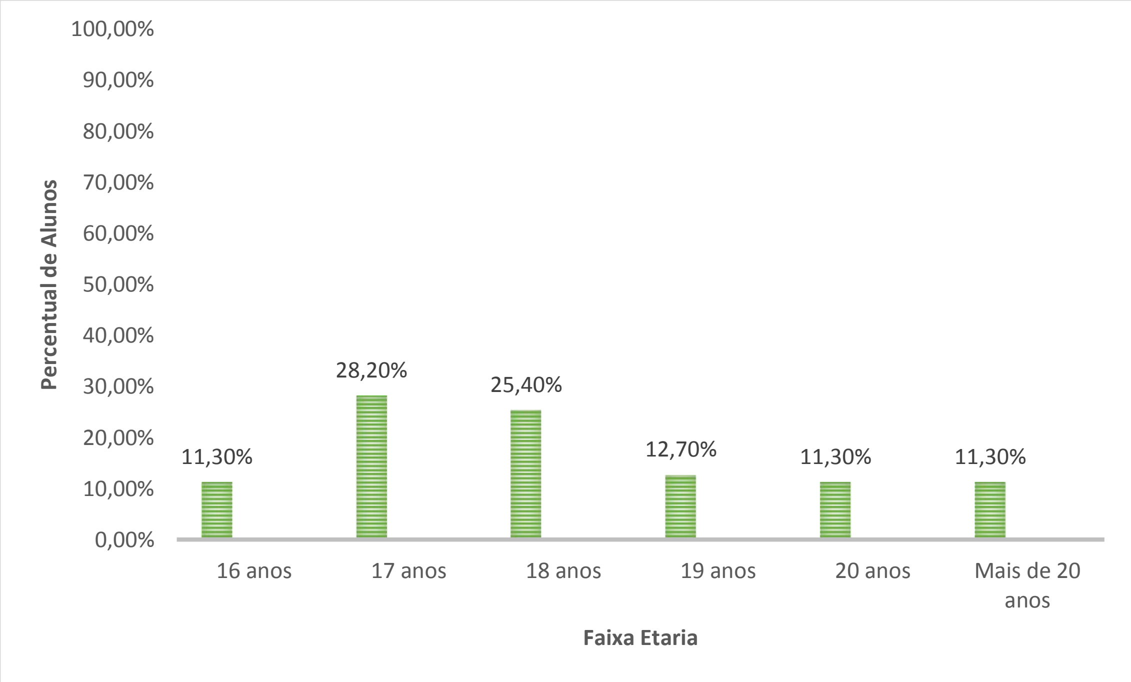
Com relação à faixa etária:

Quadro 2- Percentual dos alunos divididos em faixa etária

Faixa etária	Número de Alunos	%
16 anos	8	11,3
17anos	20	28,2
18 anos	18	25,4
19 anos	9	12,7
20 anos	8	11,3
Mais de 20 anos	8	11,3

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016)

Gráfico 1 - Percentual de alunos divididos em faixas etárias



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016)

Considerando a idade padrão entre 17 e 19 anos para conclusão do ensino médio, podemos observar que dos 71 discentes pesquisados, 11,3% tinham 16 anos, 28,2%, 17 anos, 25,4% 18 anos, 12,7% 19 anos, 11,3% 20 anos e 11,3% mais de 20 anos, é possível concluir que 47 discentes estão na idade certa para completar o ensino médio, ou seja, 66,3% da amostra, enquanto isso, temos 8 alunos com um ano de antecedência e 16 alunos com um ou mais anos de atraso em relação a idade ideal.

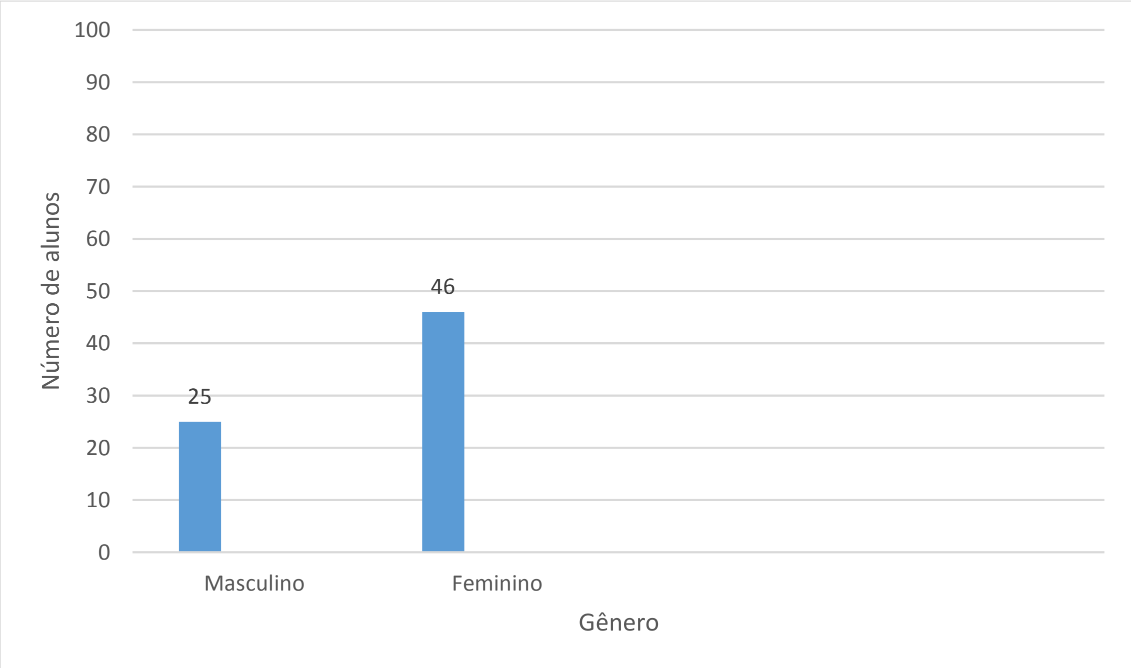
Quanto ao gênero:

Quadro 3 – Número de alunos divididos em gênero

Gênero	Número alunos
Masculino	25
Feminino	46

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016)

Gráfico 2: Número de alunos ao gênero.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016)

A maioria dos alunos da amostra 64,8% era do gênero feminino, enquanto que 35,2% do gênero masculino.

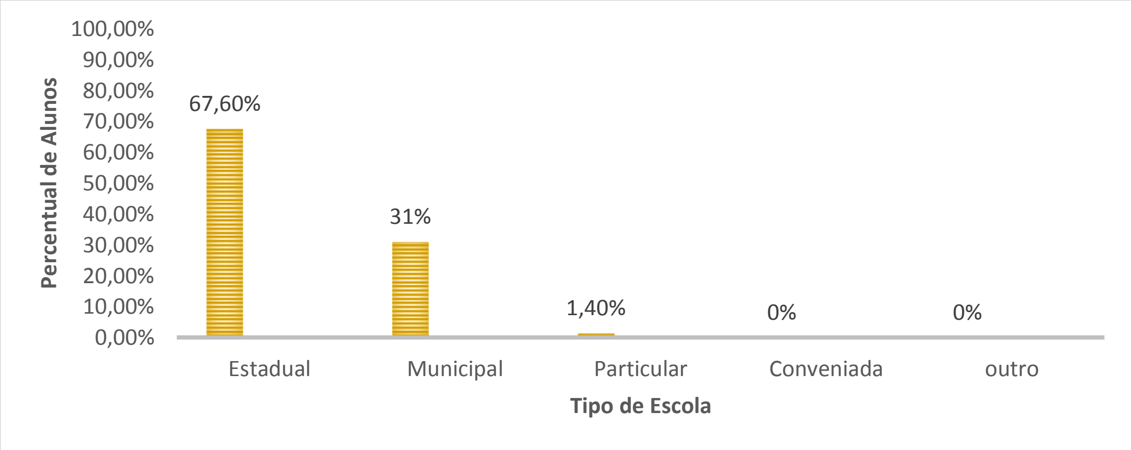
Quanto ao tipo de escola:

Quadro 4 - percentual dos alunos em relação ao tipo de escola.

Tipo de Escola	Número de alunos	%
Estadual	48	67,6
Municipal	22	31
Particular	1	1,4
Conveniada	0	0
Outro	0	0

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016)

Gráfico 3 – percentual dos alunos em relação ao tipo de escola.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016)

Podemos analisar que dos 71 alunos participantes, 98,6% estudaram o Ensino Fundamental em escolas públicas e apenas um aluno, 1,4% estudou em escola particular.

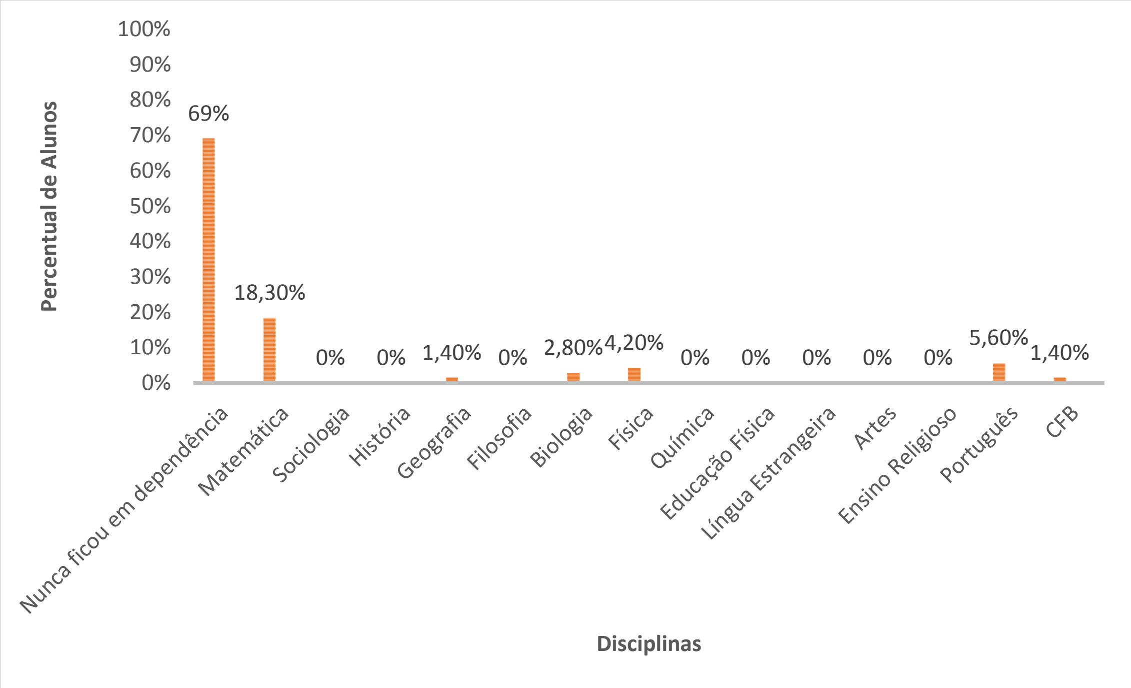
Quanto ao índice de dependência:

Quadro 5 - Percentual dos alunos em dependência por disciplina.

Nunca ficou em dependência	49	69%
Matemática	13	18,3%
Sociologia	0	0%
História	0	0%
Geografia	1	1,4%
Filosofia	0	0%
Biologia	2	2,8%
Física	3	4,2%
Química	0	0%
Educação Física	0	0%
Língua Estrangeira	0	0%
Artes	0	0%
Ensino Religioso	0	0%
Português	4	5,6%
CFB	1	1,4%

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016)

Gráfico 4 – Percentual dos alunos em relação a dependência por disciplina.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Podemos perceber que a maioria dos alunos da amostra, 69% assinalou nunca ter ficado em dependência, seguida da matemática com 18,3%, Língua Portuguesa com 5,6%, Física com 4,2%, Biologia com 2,8%, CFB e Geografia com 1,4% cada.

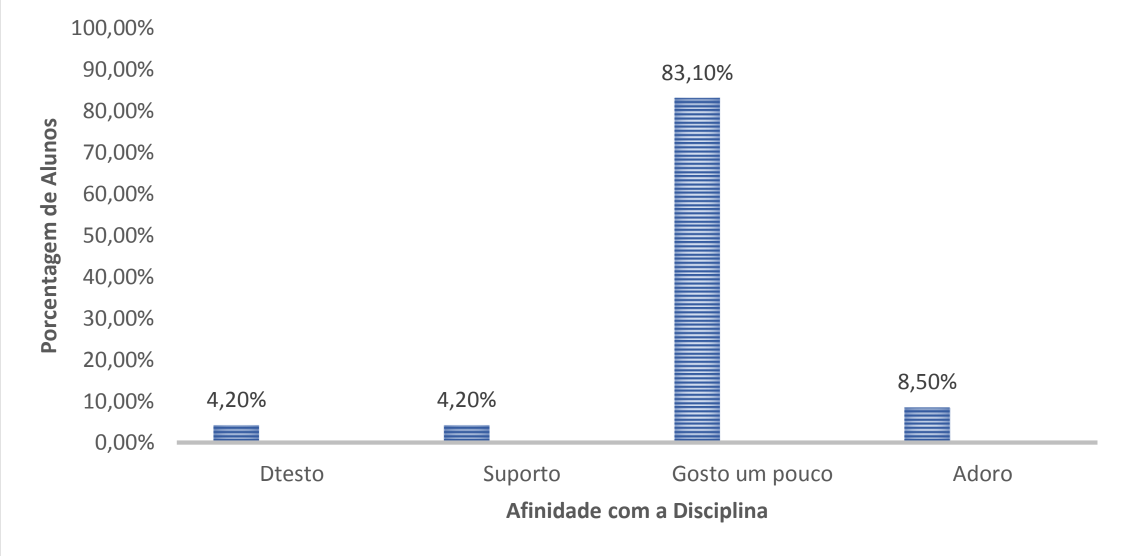
Quanto à afinidade:

Quadro 6 - percentual dos alunos em relação a sua afinidade com a disciplina.

Afinidade com a disciplina?	Número de alunos	%
Detesto	3	4,2
Suporto	3	4,2
Gosto um pouco	59	83,1
Adoro	6	8,5

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016)

Gráfico 5: Percentual dos alunos em relação a sua finalidade com a disciplina.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Os dados revelaram que 83,1%, a maioria, dos alunos gosta “um pouco” de matemática. Dentre os 71 alunos pesquisados apenas 8,5% disseram “adorar” matemática e 4,2% disseram detestar e suportar matemática cada um. No trabalho de Neves (2015), realizada com 156 alunos concluintes do ensino médio de duas escolas públicas estaduais de Belém- Pa, os resultados obtidos sobre a afinidade com a disciplina revelaram que: “64,1% dos discentes, dizem que não gostam ou que gostam pouco de matemática, apenas 10 alunos demonstraram que gostam muito da matemática, ou seja, 6,41% da amostra”. O observado em nossa pesquisa converge com os resultados obtidos na pesquisa de Neves (2015), pois que percebemos o fato dos discentes gostarem pouco de matemática, dificulta o seu aprendizado.

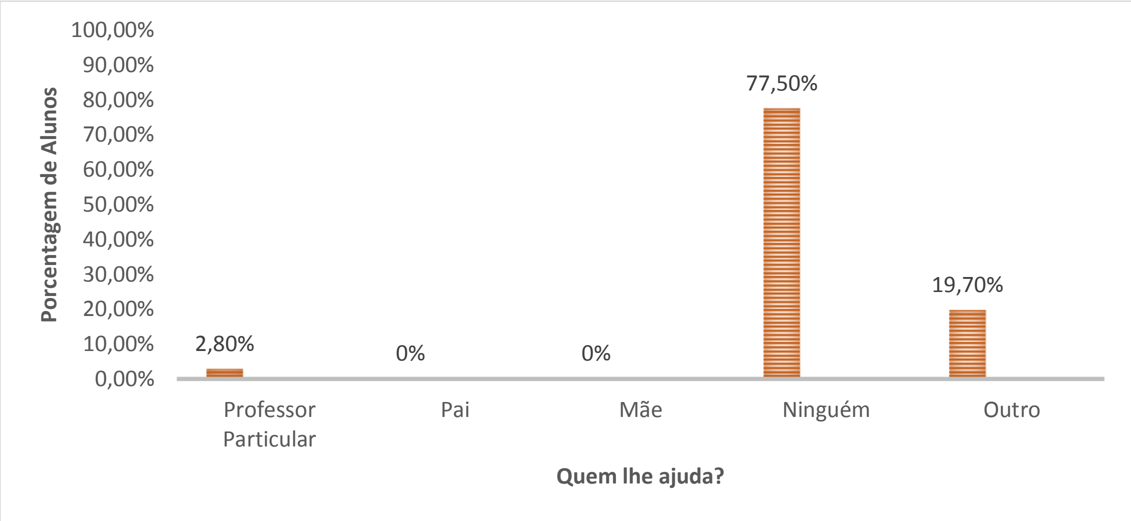
Quanto à ajuda nas tarefas de matemática:

Quadro 7 - Percentual dos alunos em relação à ajuda nas tarefas de matemática.

Quem lhe ajuda?	Número de alunos	%
Professor particular	2	2,8
Pai	0	0
Mãe	0	0
Ninguém	55	77,5
Outro	14	19,7

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 6 - percentual dos alunos em relação à ajuda nas tarefas de matemática.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Os dados mostram que a maioria dos alunos 77,5%, não recebe ajuda nas tarefas de matemática, sendo que 2,8% são assistidos por professor particular e 19,7 % disseram que outras pessoas lhe ajudam. Na pesquisa de Brito (2015) aplicada a 180 alunos concluintes do ensino médio em duas escolas da região metropolitana de Belém-Pa, metade da amostra, disseram que não possuem ajuda no momento de estudar, também em Neves (2015) observou-se que 69,23% dos alunos pesquisados disseram que não possuíam ajuda no momento de ajudar, assim como em Oliveira (2015) dos 80 participantes de sua pesquisa, 72,50% disseram não possuir ajuda no momento de estudar. Com estes resultados percebemos a necessidade de maior participação familiar na formação dos alunos.

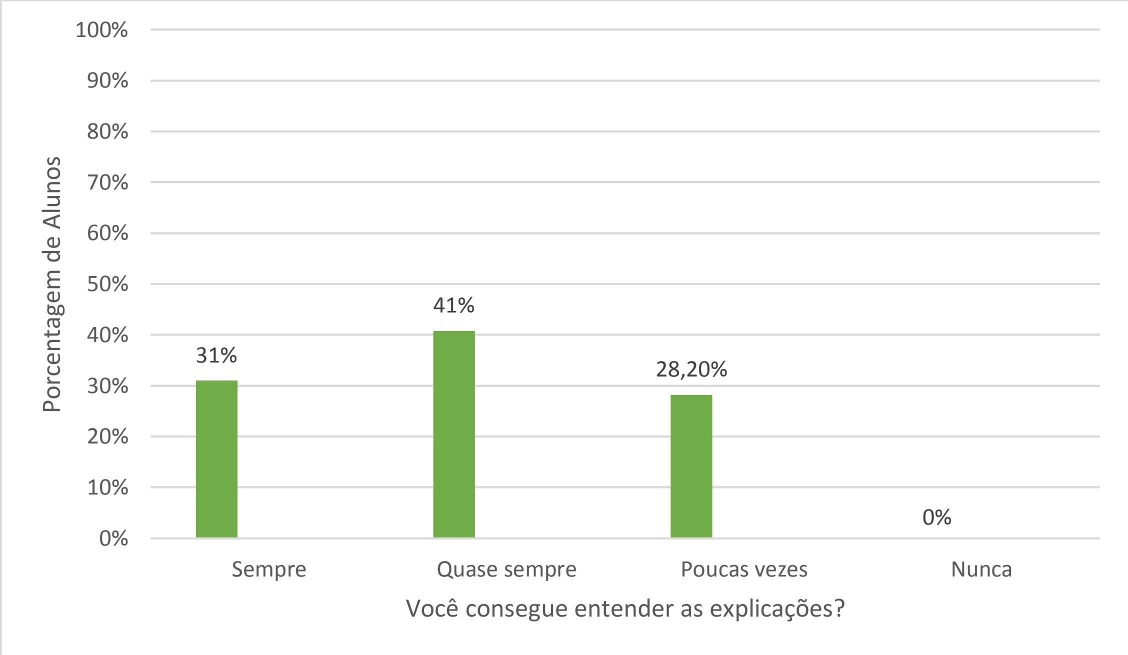
Quanto ao entendimento das explicações nas aulas:

Quadro 8 - percentual dos alunos em relação ao entendimento nas aulas de matemática.

Você consegue entender as explicações?	Número de alunos	%
Sempre	22	31
Quase sempre	29	40,8
Poucas vezes	20	28,2
Nunca	0	0

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 7 - percentual dos alunos em relação ao entendimento nas aulas de matemática.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Os dados mostram que 31% dos alunos da amostra "sempre" entendem a explicação, 40,8% "quase sempre" e 28,2% "poucas vezes". O fato do aluno não entender sempre as explicações, pode estar relacionado com as metodologias utilizadas nas aulas.

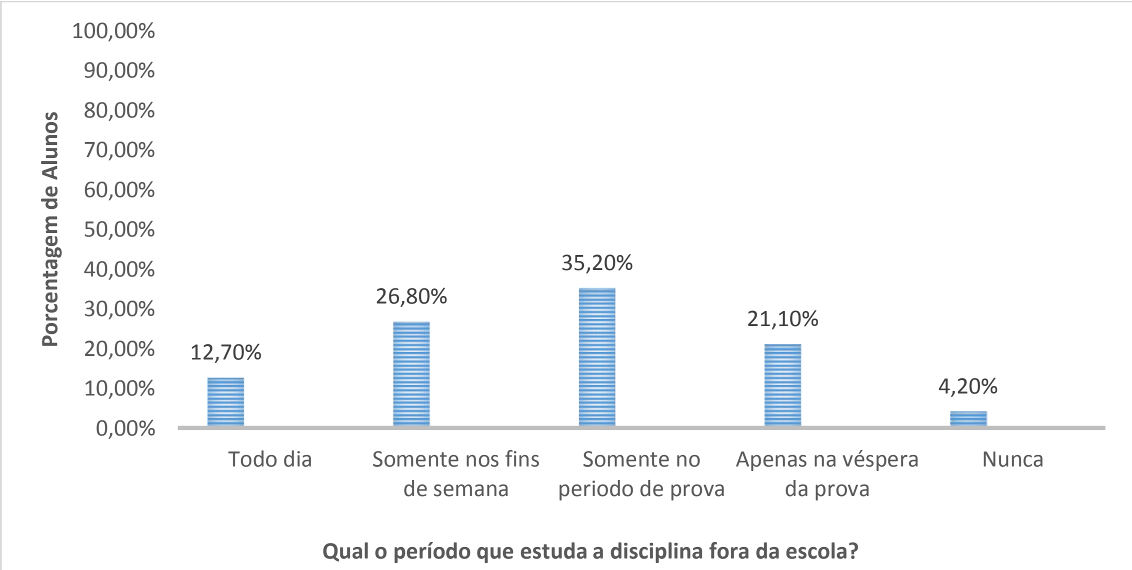
Quanto ao período que os alunos estudam matemática:

Quadro 9 - Percentual dos alunos em relação ao período que estuda a disciplina fora da escola.

Qual o período que estuda a disciplina fora da escola?	Número de alunos	%
Todo dia	9	12,7
Somente nos fins de semana	19	26,8
Somente no período de prova	25	35,2
Apenas na véspera da prova	15	21,1
Nunca	3	4,2

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 8 - percentual dos alunos em relação ao período que estuda a disciplina fora da escola.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Os dados revelam que somente 12, 7% dos alunos estudam diariamente matemática fora da escola, 26,8% somente nos fins de semana, 35,2% somente no período de prova, 21,1% apenas na véspera da prova e 4,2% nunca estudam matemática além do horário escolar. A falta de entendimento nas explicações nas aulas de matemática associada ao pouco incentivo familiar pode esta contribuindo para que os alunos não estudem matemática com mais frequência.

Vale ressaltar que a escolaridade dos responsáveis e a atividade econômica exercida por alguns alunos pode ser um dos condicionantes do aluno não estudar diariamente matemática, como afirma Silva (2014):

> [...]52% estudam “alguns dias da semana”, sem ajuda de ninguém, 31% estudam apenas em período de provas, 9% só na “véspera da prova”. Enquanto que 50% dos alunos têm “um pouco” de dificuldade em aprender matemática, desses, 44% estudam apenas “no período de provas” com ajuda de parentes ou amigos. Apenas 9% afirmam “não” ter esta dificuldade, destes, 55% estudam “alguns dias da semana” fora da escola, sem ajuda de ninguém. A falta de ajuda para estudar fora da escola pode estar relacionada com a escolaridade do responsável e com influência das atividades remuneradas exercidas por alguns alunos. (SILVA,2014, p.77)

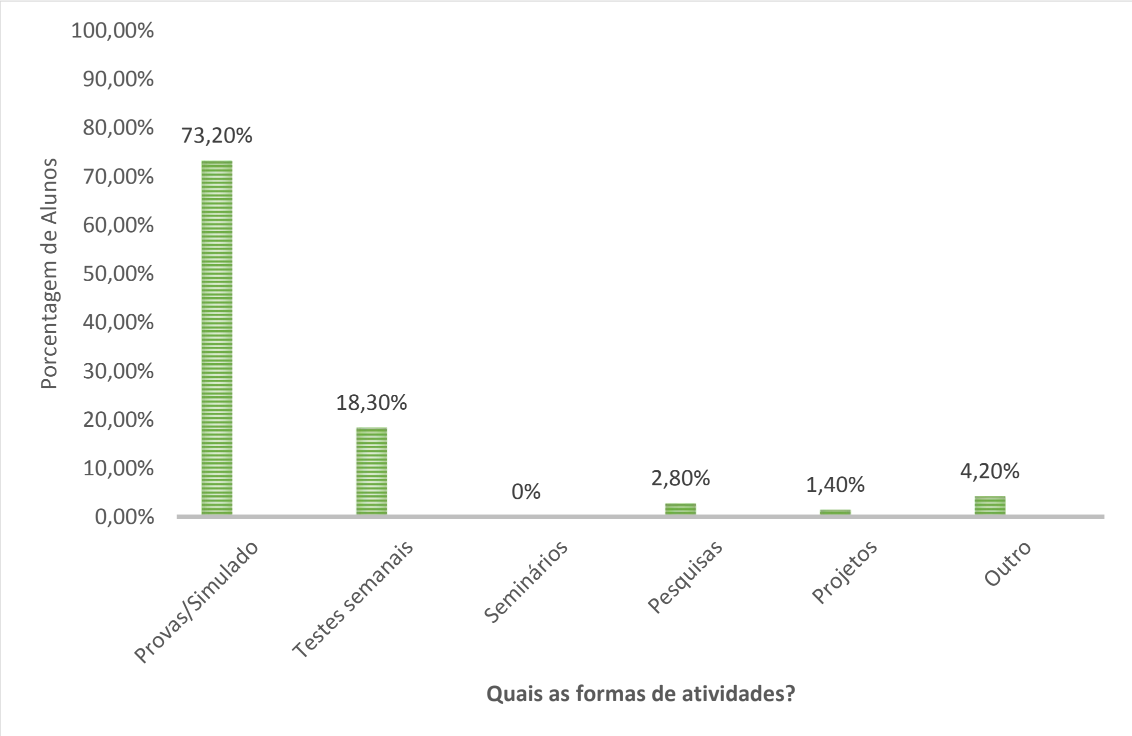
Quanto às formas de atividades avaliativas:

Quadro 10 - percentual dos alunos em relação à forma de avaliação.

Quais as formas de atividades?	Número de alunos	%
Provas/Simulado	52	73,2
Testes semanais	13	18,3
Seminários	0	0
Pesquisas	2	2,8
Projetos	1	1,4
Outro	3	4,2

FONTE: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 9 - percentual dos alunos em relação a forma de avaliação.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Os dados revelam que 73,2% dos alunos foram avaliados através de provas/simulados, 18,3% testes semanais, pesquisas 2,8%, projetos 1,4%, seminários 0% e outro 4,2%. Mostrando que a avaliação tradicional em formato de exames ainda é predominante.

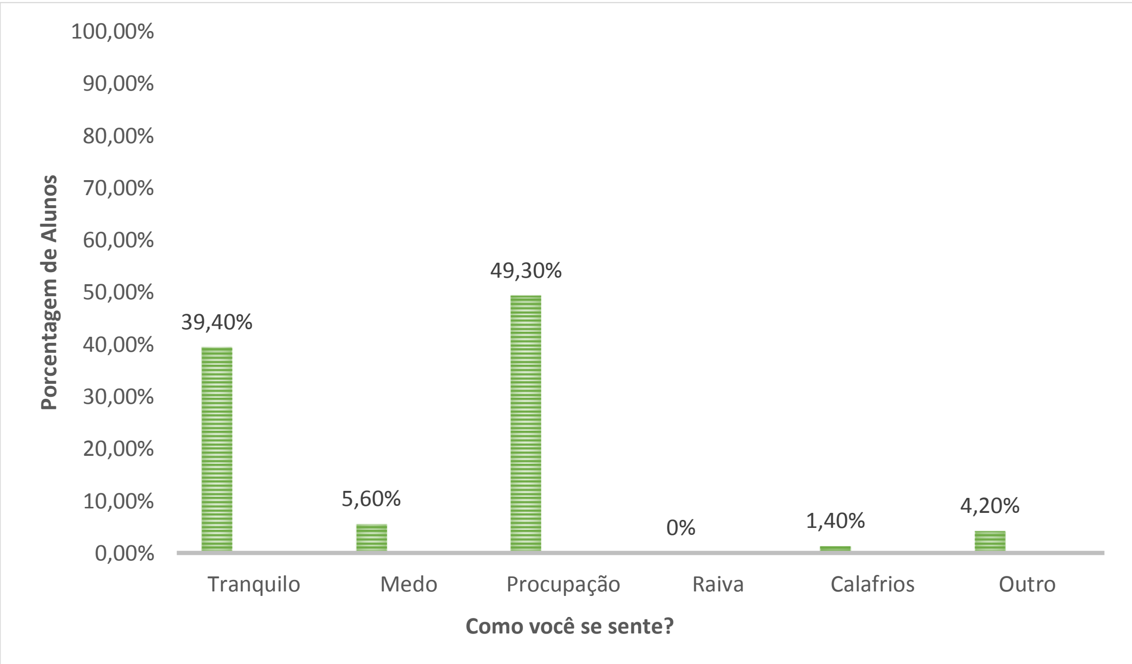
Quanto aos sentimentos dos alunos na avaliação de matemática:

Quadro 11 - percentual dos alunos em relação aos seus sentimentos realizando uma avaliação de matemática.

Como você se sente?	Número de alunos	%
Tranquilo	28	39,4
Medo	4	5,6
Preocupação	35	49,3
Raiva	0	0
Calafrios	1	1,4
Outro	3	4,2

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 10 - percentual dos alunos em relação aos seus sentimentos realizando uma avaliação de matemática.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Os dados nos mostram que: 49,3% dos alunos sentem-se preocupados, 39,4% tranquilos, 5,6% medo, 1,4% calafrios e 4,2% outro sentimento.

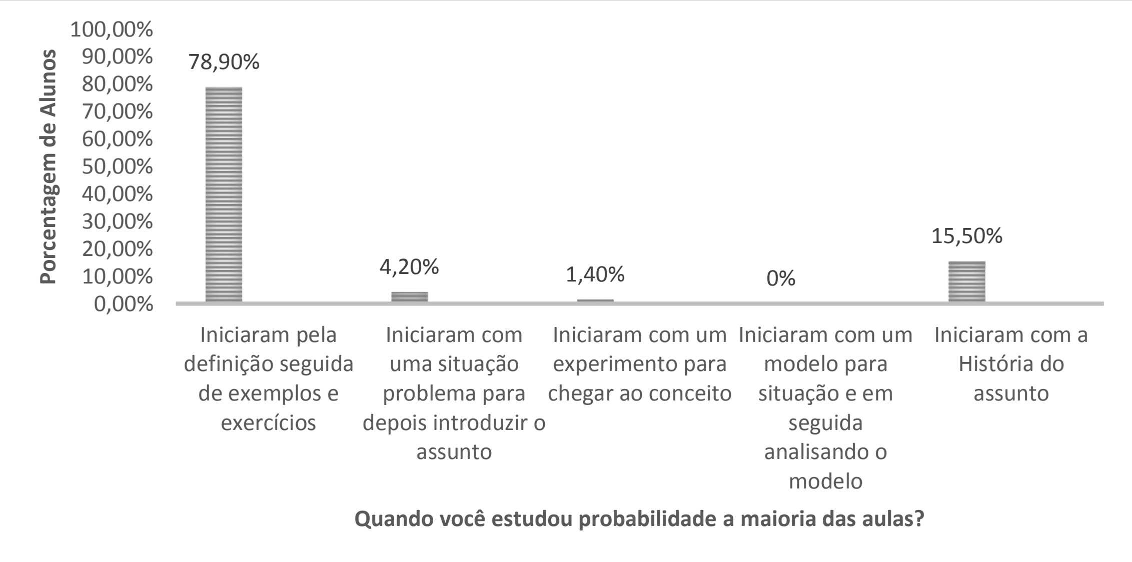
Quanto ao ensino de probabilidade:

Quadro 12 - Percentual do modo como os alunos iniciaram o assunto probabilidade.

Quando você estudou probabilidade a maioria das aulas?	Número de alunos	%
Iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios	56	78,9
Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto	3	4,2
Iniciaram com um experimento para chegar ao conceito	1	1,4
Iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo	0	0
Iniciaram com a História do assunto	11	15,5

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 11 - Percentual do modo como os alunos iniciaram o assunto probabilidade.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Observamos que: 78,9%, dos alunos afirmam que os professores “iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios”, 4,2% “Iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto”, 1,4% “Iniciaram com um experimento para chegar ao conceito” e 15,5% “Iniciaram com a História do assunto”. Percebemos que a predominância da metodologia tradicional em que o professor coloca as definições seguidas de exemplos e exercícios é um dos agravantes para a falta de entendimento dos conteúdos explicados nas aulas de matemática.

Brito (2015), seguindo a mesma indagação, constatou:

> [...] foi possível observar que mais de 96% dos 180 alunos responderam a primeira opção, ou seja, a de que os professores começam pela definição seguida de exemplos e exercícios, esta é uma metodologia das mais antigas e usadas na rede educacional, talvez por esse motivo o pouquíssimo ou quase nenhum interesse dos alunos pela matemática, pois o ensino não consegue acompanhar o dinamismo do cotidiano desse aluno [...]. (BRITO, 2015 p. 29)

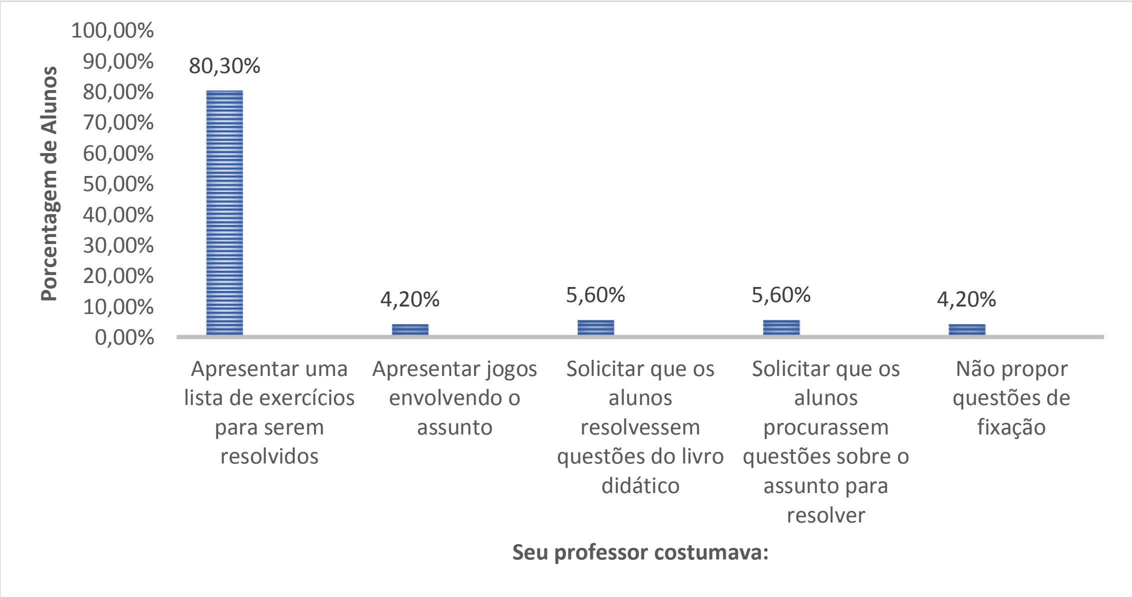
Quanto à fixação do conteúdo de probabilidade:

Quadro 13 - Percentual do modo como os alunos fixaram o assunto probabilidade.

Seu professor costumava:	Número de alunos	%
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	57	80,3
Apresentar jogos envolvendo o assunto	3	4,2
Solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático	4	5,6
Solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver	4	5,6
Não propor questões de fixação	3	4,2

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 12 - Percentual do modo como os alunos fixaram o assunto probabilidade.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Os dados nos revelam que a maioria 80,3%, para fixar o assunto, resolveu uma lista de exercícios, 5,6% resolveram questões propostas no livro didático, 5,6% solicitou que os alunos procurassem questões para resolver, 4,2% utilizaram jogos envolvendo o assunto e 4,2% não propunha questões de fixação. Assim como na questão anterior, para fixação dos conteúdos prevalece a metodologia tradicional.

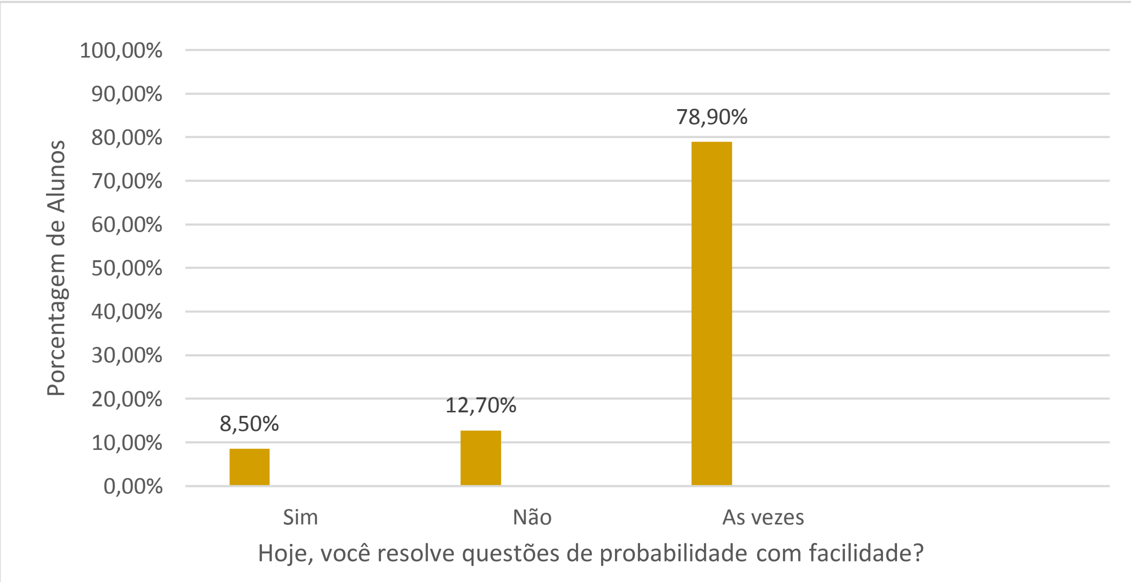
Quanto à resolução de questões de probabilidade:

Quadro 14 - Percentual do modo como os alunos resolvem questões de probabilidade.

Hoje, você resolve questões de probabilidade com facilidade?	Número de alunos	%
Sim	6	8,5
Não	9	12,7
As vezes	56	78,9

FONTE: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 13 - Percentual do modo como os alunos fixaram o assunto probabilidade.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro de 2016)

Os dados nos mostram que apenas 8,5% dos alunos disseram que hoje resolvem questões com facilidade, 12,7% não tem facilidade e 78,9% somente às vezes resolvem questões com facilidade. Podemos relacionar as dificuldades dos alunos em resolver questões de probabilidade aos fatores referentes à metodologia utilizada nas aulas ser pouco atrativa para os alunos; ao pouco tempo de estudo além do horário escolar; bem como a carência do apoio familiar; levando os alunos a não adquirirem interesse e habilidades em resolver questões sobre probabilidades.

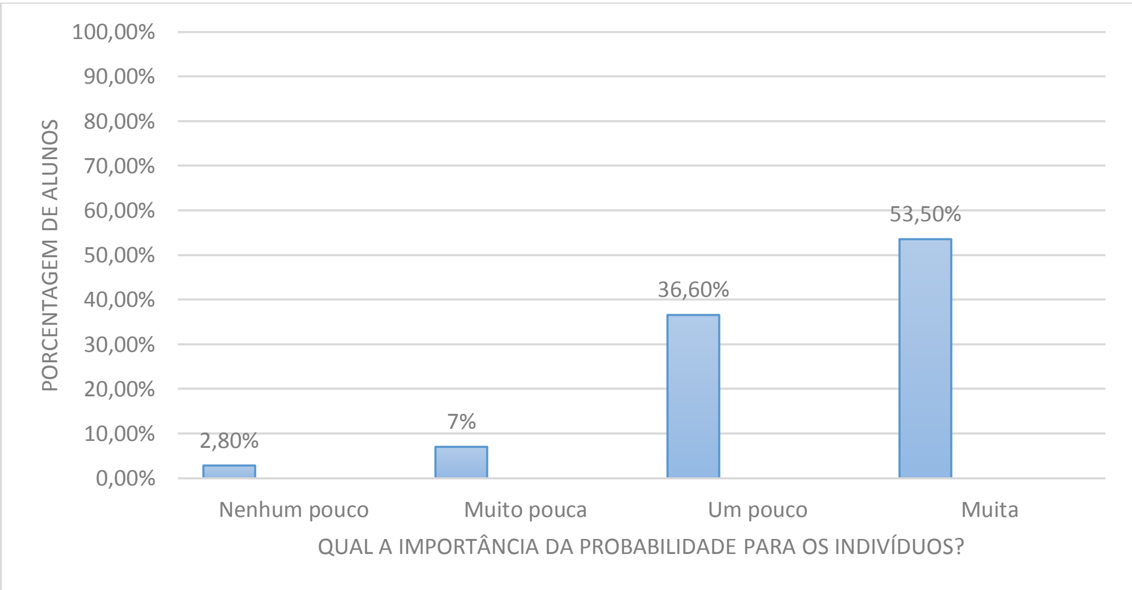
Quanto à importância dos conhecimentos de probabilidade:

Quadro 15 - Percentual da importância dada pelos alunos ao assunto probabilidade

Qual a importância da probabilidade para os indivíduos?	Número de alunos	%
Nenhum pouco	2	2,8
Muito pouca	5	7
Um pouco	26	36,6
Muita	38	53,5

Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Gráfico 14 – Percentual da importância dada pelos alunos ao assunto probabilidade.



Fonte: Pesquisa de campo (fevereiro/2016).

Os dados revelam que, a maioria dos alunos, 53,5% acha “Muito” importante para os indivíduos os conhecimentos de probabilidade, 36,6% “Um pouco” importante, 7% “Muito pouca” e 2,8% “Nenhum pouco” importante. Isso nos mostra que apesar das dificuldades apresentadas pelos discentes em resolver questões de probabilidade, estes reconhecem a importância do conteúdo para sua formação.

Quanto ao grau de dificuldade dos alunos a respeito dos conteúdos específicos de probabilidade:

Quadro 16: Grau de dificuldade apresentado segundo os alunos.

(Continua)

	Grau de dificuldade					
Assunto	**Muito Fácil**	**Fácil**	**Regular**	**Difícil**	**Muito Difícil**	**Não Lembro**
1-Experimentos determinísticos	0%	0%	4,2%	1,4%	0%	94,4%
2-Experimentos Aleatórios	0%	9,9%	22,5%	1,4	0%	66,2%
3-Espaço Amostral.	2,8%	16,9%	19,7%	2,8%	0%	57,7%
4-Número de elementos do espaço amostral.	4,2%	12,7%	23,9%	4,2%	0%	54,9%
5-Evento	1,4%	12,7%	21,1%	2,8%	0%	62%
6-Número de elementos de um evento.	2,8%	9,9%	19,7%	1,4%	0%	66,2%
7-Eventos simples (elementar).	2,8%	12,7%	18,3%	2,8%	1,4%	62%
8-Evento certo.	0%	2,8%	8,5%	2,8%	0%	85,9%
9-Eventos mutuamente exclusivos: $A \cap B = \emptyset$	0%	1,4%	7%	1,4%	0%	90,1%
10-Evento complementar A^c.	0%	1,4%	8,5%	2,8%	4,2%	83,1%
11-União de Eventos**:** AUB	0%	2,8%	12,7%	0%	1,4%	83,1%
12-Interseção de Eventos**:** $A \cap B$	0%	4,2%	8,5%	1,4%	1,4%	84,5%
13-Evento impossível.	0%	4,2%	21,1%	1,4%	2,8%	70,4%
14-Frequência relativa de um evento simples.	0%	7%	19,7%	2,8%	4,2%	66,2%
15-Definição de Probabilidade	2,8%	15,5%	35,2%	5,6%	0%	40,8%
16-Probabilidade em Espaço Amostral Equiprovável: $P(A) = \frac{N\ (A)}{\mathrm{N(S)}} = \frac{casos\ favoráveis}{\text{Casos possíveis}}$	2,8%	14,1%	28,2%	4,2%	4,2%	46,5%
17-Probabilidade do evento certo.	0%	9,9%	18,3%	2,8%	0%	69%

(Conclusão)

18-Probabilidade do evento impossível.	1,4%	12,7%	8,5%	5,6%	1,4%	70,4%
19-Probabilidade do evento complementar.	0%	5,6%	15,5%	5,6%	0%	73,2%
20-Probabilidade da união de dois eventos disjuntos: $P(AUB) = P(A) + P(B)$	0%	5,6%	16,9%	2,8%	4,2%	70,4%
21-Probabilidade da união de dois eventos: $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	0%	7%	11,3%	0%	1,4%	80,3%
22-Conceito de probabilidade Condicional.	0%	4,2%	18,3%	0%	2,8%	74,6%
23-Calculo de Probabilidade Condicional: $P(A/B) = \frac{P\ (A \cap B)}{P(B)}$	0%	8,5%	14,1%	2,8%	4,2%	70,4%
24-Multiplicação de probabilidades: $P\ (A \cap B) = P(A/B).P(B)$	2,8%	5,6%	16,9%	2,8%	5,6%	66,2%
25-Questões envolvendo Probabilidades Condicionais	0%	7%	11,3%	2,8%	0%	78,9%
26-Calcular probabilidades através do diagrama de árvores das possibilidades.	0%	5,6%	21,1%	1,4%	0%	71,8%
27-Questões envolvendo jogos.	4,2%	9,9%	14,1%	0%	0%	71,8%
28-Questões envolvendo probabilidade a outras áreas como: Genética, Política, meteorologia, estatística...	1,4%	5,6%	15,5%	1,4%	1,4%	74,6%
29-Questões envolvendo Probabilidade tendo como espaço amostral e eventos: retas, áreas, volumes.	4,2%	7%	19,7%	5,6%	4,2%	59,2%

Fonte: Pesquisa de campo (Janeiro de 2016)

A análise do quadro indica que os alunos inquiridos nesta pesquisa não lembram da maior parte dos tópicos referente aos conteúdos específicos de probabilidade, observou-se este fato, principalmente nos itens em que tratam dos conceitos iniciais probabilísticos para o ensino médio, como nos itens de 02 a 21, variando os graus de dificuldade e facilidade nestes tópicos.

Contudo, averiguamos, nesta amostra, que os itens 15 e 16 que tratam da definição de probabilidade e o cálculo de probabilidade em espaço amostral equiprovável, concepção clássica, são os que mais os alunos responderam lembrar-se de ter estudado, com graus de entendimento superando o grau de dificuldade.

Com uma variação do grau de dificuldades em diferentes itens do assunto, observamos a particularidade da ideia de eventos determinísticos não ter sido assimilada de forma significativa pelos alunos consultados nesta pesquisa, pois 94,4% dizem não se lembrar de ter estudado este conceito.

No caso dos tópicos referentes à probabilidade da união de dois eventos observamos no item 20 os alunos que se lembram de ter estudado, destes 5,6% consideraram fácil, 16,9% regular, 2,8% difícil e 4,2% muito difícil. Já no item 21, 7% consideraram fácil, 11,3% regular e 1,4% muito difícil.

No item 22 no conceito de probabilidade condicional, observamos que dos alunos pesquisados 4,2% responderam ter sido fácil, 18,3% regular e 2,8% difícil, enquanto no item 25 que aborda questões envolvendo probabilidade condicional 7% responderam ter sido fácil, 11,3% regular e 2,8% difícil.

Nos itens 24 e 26 sobre multiplicação de probabilidades, observamos que no item 24 dos alunos que se lembram de ter estudado 2,8% acharam muito fácil, 5,6% fácil, 16,9% regular, 2,8% difícil e 5,6% muito difícil, enquanto no item 26, observou-se que 5,6% acharam fácil, 21,1% regular, 1,4% difícil e 0% muito difícil.

No item 27 que aborda questões envolvendo jogos, observamos que 4,2% consideraram muito fácil, 9,9% fácil e 14,1% regular. No item 28 que indaga sobre questões de probabilidade em outras áreas de conhecimento, obtivemos 1,4% muito fácil, 5,6% fácil, 15,5% regular, 1.4% difícil e 1,4% muito difícil. Já o item 29 envolveu questões sobre probabilidade relacionada a retas, áreas e volumes, observou-se que 4% consideraram muito fácil, 7% fácil, 19,7% regular, 5,6% difícil e 4,2% muito difícil.

Para um diagnóstico mais preciso desta amostra os estudantes foram inquiridos a resolver oito questões referentes a alguns itens do quadro 16, o que consta nos resultados do quadro 17 a seguir:

Quadro 17: Percentual das respostas dos alunos.

Questões	Acertou	Acertou Parcialmente	Errou	Em Branco
Questão 01	38 %	0%	54,9%	7%
Questão 02	22,5%	0%	52,1%	25,4%
Questão 03	36,6%	15,5%	19,7%	28,2%
Questão 04	15,5%	0%	43,7%	40,8%
Questão 05	5,6%	0%	35,2%	59,2%
Questão 06	0%	0%	42,3%	57,7%
Questão 07	0%	0%	60,6%	39,4%
Questão 08	0%	0%	45,1%	54,9%

Fonte: Pesquisa de campo (janeiro de 2016)

As questões utilizadas no questionário sobre probabilidade foram:

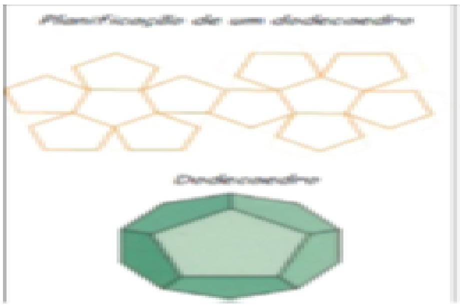
Questão 01: Ao lançarmos uma moeda, qual a probabilidade de obtermos cara?

Questão 02: Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é anotado**.** Qual a probabilidade de obtermos o número 7?

Questão 03 (Adaptado de Ribeiro(2012): Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

Questão 04: Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

Questão 05: Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?



Questão 06: Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

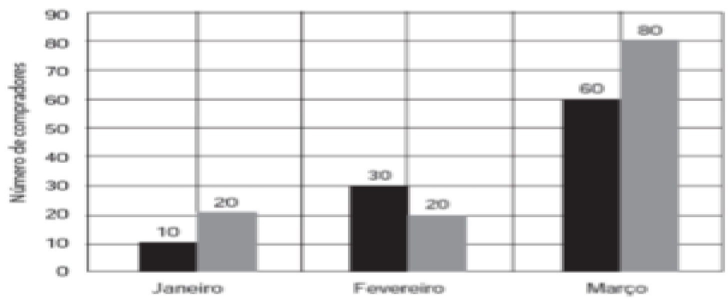
	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$ 50,00	34	25	40
Compras acima de R$ 50,00	10	28	43

Uma das compras efetuadas é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

Questão 07: Em um cesto de roupas há 10 meias, das quais três estão rasgadas. Retirando-se duas meias do cesto, sucessivamente, e sem reposição, qual é a probabilidade de que as duas meias retiradas não estejam rasgadas?

Questão 08: Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?



Na primeira questão pretendíamos observar a representação utilizada pelos alunos para indicar a probabilidade do resultado. Do total de alunos que participaram da pesquisa, 38% acertaram a questão utilizando como registro de estratégia porcentagem ou fração. A maioria das respostas foi dada com a expressão 50%.

Na segunda questão buscou-se verificar as intuições dos alunos em relação à probabilidade de um evento impossível por meio do lançamento de um dado, ocorrendo novamente o mesmo tipo de representação da resposta anterior, dos 22,5% dos alunos que acertaram a questão utilizaram como resposta a expressão 0% ou a probabilidade é zero.

Na terceira questão, os alunos deveriam concordar ou discordar da decisão do paciente em relação à realização de sua cirurgia, considerando a probabilidade de sucesso do procedimento cirúrgico. Buscou-se nesta questão analisar a percepção dos estudantes em relação à tomada de decisões relacionados aos objetivos referentes aos aspectos críticos e reflexivos dos conceitos probabilísticos. Obtivemos 52,1% de acertos entre os alunos pesquisados, mostrando que a maioria dos alunos justificou de forma aceitável suas respostas.

Na quarta questão, os aspectos críticos e reflexivos também foram explorados, nesta objetivou-se identificar as ideias dos alunos referentes à concepção clássica de probabilidade, na qual os estudantes deveriam identificar os casos favoráveis, as senhas numeradas de 1 até 20, e os casos possíveis, as senhas numeradas de 1 até 100, e estimar a probabilidade em um espaço amostral equiprovável. Obtivemos 15,5% de acertos, utilizando como representação de suas respostas a forma de fração ou porcentagem.

A partir da quinta questão, objetivou-se verificar os conhecimentos dos alunos referentes aos conceitos mais específicos e complexos de probabilidade, como da união de dois eventos, na questão seis da probabilidade condicional, na questão sete de multiplicação de probabilidade e na questão oito de eventos independentes. Nestas questões percebemos pouco aprendizado dos conhecimentos dos alunos referentes a estes tópicos, pois, somente 5,6% acertaram a questão 05, enquanto as questões 06, 07 e 08 não houve acertos.

2.5.2. Considerações Sobre o Diagnóstico

Após a sistematização e análise dos dados apresentados na pesquisa com os alunos cujo objetivo fora indagar o desempenho de alunos do Ensino Médio na resolução de questões envolvendo os conceitos básicos de probabilidade, constatamos que:

No tocante ao grau de dificuldade que os discentes desta amostra apresentaram para o aprendizado de probabilidade, acreditamos que apesar dos alunos lembrarem-se da maioria dos itens, os dados revelaram que existem alguns tópicos no conteúdo de probabilidade que precisam ser apreendidos de forma mais significativa, principalmente os conceitos de probabilidade da união de dois eventos, probabilidade condicional, multiplicação de probabilidade e eventos independentes.

Tendo em vista que 78% dos alunos responderam que hoje não resolvem questões de probabilidade com facilidade e dos mesmos não terem obtido acertos nas questões 06, 07 e 08, entendemos que os conceitos de probabilidades condicionais e probabilidade de eventos independentes devem ser trabalhados de forma mais detalha em outro estudo, contribuindo para a erradicação destas dificuldades apresentadas pelos discentes.

Pelos resultados obtidos nos itens gosto pela matemática em que 83,3% dos alunos disseram gostar um pouco, percebemos que os estudantes precisam ser estimulados para desenvolver sua capacidade de raciocínio e participação levando-os a compreender de forma mais efetiva as explicações dadas nas aulas de matemática, visto que somente 31% dos alunos responderam sempre entender as explicações dadas nas aulas.

Porém, para realizarmos um diagnóstico mais preciso sobre o desempenho dos alunos referentes ao aprendizado deste assunto, será necessário consultar os professores, o que pretendemos realizar em breve. É importante ressaltar, que no momento da aplicação da pesquisa os alunos estavam próximos de realizar as avaliações finais do ano letivo de 2015, o que pode ter influenciado no desempenho dos alunos na resolução das questões. Contudo, percebeu-se o interesse mostrado pelos estudantes em resolver as questões propostas.

Em suma, a maioria dos alunos inquiridos na amostra pesquisada, nos mostrou evidentes dificuldades na resolução das questões de probabilidade, implicando em um aprendizado não significativo dos conceitos probabilísticos. Constatou-se nesta amostra que o aprendizado se concentrou apenas nas definições iniciais, necessitando averiguar junto aos professores de forma mais específica este resultado. Contudo a partir de nossa prática docente, percebemos a necessidade de se trabalhar de formar mais abrangente, contemplando os conceitos iniciais e os mais complexos do assunto em questão.

3. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

3.1 Fundamentação Teórica

3.1.1 O Ensino de Matemática por Atividade

Com o objetivo de direcionar o discente ao aprendizado dos principais conceitos matemáticos envolvidos no conteúdo de probabilidade, desenvolvemos uma sequência de atividades baseado no ensino por atividade, pois segundo Mendes e Sá (2006, p. 13) a principal peculiaridade desta metodologia está no fato de que os conteúdos a serem apreendidos possam ser descobertos pelos próprios alunos durante o processo de ensino, até que sejam assimilados, tendo o professor como orientador.

O ensino por atividade pressupõe a possibilidade de conduzir o aluno ao aprendizado das noções matemáticas de forma gradual e constante, de maneira dinâmica, participativa e construtiva, desenvolvendo no educando descobertas cognitivas dos conteúdos matemáticos de acordo com os objetivos de cada atividade. Portanto, trata-se de uma metodologia de ensino que conduz o estudante a redescoberta dos objetivos propostos em cada atividade, elaborados de acordo com a especificidade do conteúdo em questão. De acordo com Sá (2009,p.24) “ [...] as atividades de redescoberta contribuem para a compreensão de propriedades, relações, regras e teoremas matemáticos, bem como a construção de conceitos [...]”.

A metodologia de ensino baseada em atividade infere a perspectiva de orientar o aprendiz a concepção da construção progressiva dos conhecimentos matemáticos contidos em cada atividade, culminando-se na elaboração de um produto capaz de subsidiar e direcionar o trabalho pedagógico docente.

Esta metodologia de ensino apresenta sugestões importantes que devem fazer parte da construção das atividades:

> - As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
> - Toda a atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fazes: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica noções construídas;
> - As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> - As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> - De acordo com o modelo proposto por Dockweiller(1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (SÀ, 2009, p.18).

Desta feita, elaboramos atividades que nortearam o processo de ensino e aprendizagem, com o intuito de dar suporte aos professores de matemática em resolver entraves em suas práticas em sala de aula de acordo com as características do conteúdo matemático e, principalmente contribuir para o desenvolvimento cognitivo do estudante, possibilitando-o o aprendizado significativo das noções matemáticas importantes para sua formação pessoal, acadêmica e profissional.

Nesse sentido, a partir das análises prévias realizadas, elaboramos a sequência didática composta por 12 atividades para trabalhar alguns conteúdos de Probabilidade no Ensino Médio seguidas de atividades de fixação, inicialmente, constituídas de tabelas com questões para que o aluno possa gradualmente construir os conceitos probabilísticos que são os objetivos de aprendizagem de cada atividade. Além disso, fizemos pré-teste, com a intenção de apurar o nível de conhecimento que os discentes participantes da fase de experimentação se encontram e o pós-teste, com as mesmas questões do pré-teste, para comparar os resultados dos mesmos estatisticamente com os resultados do pré-teste, utilizando tabelas, gráficos e o teste de hipótese. Abaixo apresentaremos a análise a priori de cada questão que constituíra o pré e pós-teste, assim como as análises a priori das atividades pertencentes a nossa sequência didática.

3.2. Análise a Priori do Pré-Teste e Pós-Teste

01) No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento "sair um número primo".

Análise a priori do pré-teste: Os alunos, em sua maioria, apresentarão dificuldades para resolver a questão, pois trata-se de uma questão envolvendo o conjunto do número de casos possíveis (total de possibilidades) e um subconjunto (evento) de elementos deste conjunto, mas com pouca complexidade. Contudo, acreditamos que alguns alunos resolverão pois já devem ter estudado em anos anteriores e também por terem tido contato direto ou indireto com dados de maneira intuitiva.

Análise a priori do pós-teste: os alunos resolverão esta questão com grande facilidade e compreenderão que o espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis no lançamento de um dado e que um evento é um subconjunto deste espaço amostral.

02) Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente.

Análise a priori do pré-teste: Os alunos, em sua maioria, apresentarão dificuldades para resolver a questão, pois trata-se de uma questão envolvendo o conjunto do número de casos possíveis e suas possibilidades de acontecimentos, por exigir um raciocínio combinatório de agrupamentos, além disso a expressão lançar três moedas os induzirá a somar(2+2+2) e responderem seis possibilidades, neste caso como uma falha de interpretação do princípio fundamental da contagem. Porém alguns alunos resolverão a questão pois podem ter estudado em aulas anteriores análise combinatória.

Análise a priori do pós-teste: A maioria dos alunos conseguirá resolver a questão por perceberem, na modelação, que se trata de uma questão envolvendo espaço amostral e que, portanto, podem recorrer a árvore de possibilidades, nomeando suas possibilidades, confirmando pelo princípio multiplicativo estas possibilidades.

03) Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número:

a) menor do que 21?

b) maior do 20?

Análise a priori do pré-teste: Nossa hipótese é de que os alunos não perceberão que a probabilidade é uma razão entre o número de possibilidades desejadas e o número de possibilidades possíveis em um evento, mas a maioria resolverá a questão pois perceberão no item ***a*** a certeza de se retirar um número menor do que 21 e no item b a impossibilidade de se retirar um número maior do que 20.

Análise a priori do pós-teste: A maioria dos alunos conseguirá resolver a questão por identificarem os eventos certo e impossível e a probabilidade como uma operação divisão entre dois números.

04) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

Análise a priori do pré-teste: Nossa hipótese é de que os alunos, em sua maioria, confundam a porcentagem ao completar cem cirurgias com a probabilidade da eficiência do procedimento cirúrgico realizado pelo médico.

Análise a priori do pós-teste: A maioria dos alunos responderá a questão de forma contrária da decisão do paciente, percebendo a probabilidade da eficiência do procedimento cirúrgico, resolvendo corretamente a questão.

05) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Umas das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

Análise a priori do pré-teste: Nossa hipótese é de que alguns alunos resolverão esta questão utilizando um raciocínio proporcional ou por terem estudado em anos anteriores, mas a maioria apresentará dificuldades por ainda não compreender a probabilidade como uma razão.

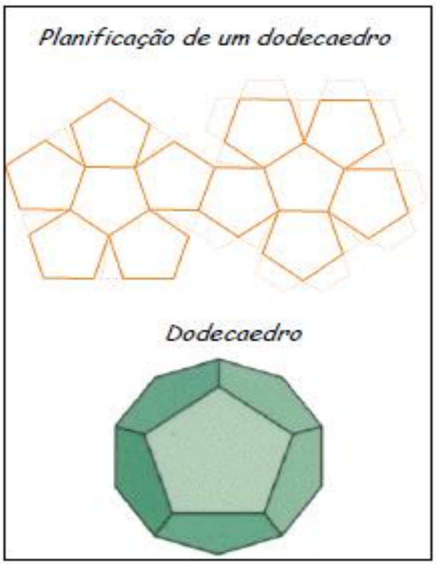
Análise a priori do pós-teste: Os alunos, em sua maioria, conseguirão resolver a questão por perceber na modelação que a probabilidade é uma razão entre o número de possibilidades de casos desejados e o número total de possibilidades.

06) Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

Análise a priori do pré-teste: Nossa hipótese é de que a maioria dos alunos não perceberão o evento, obter par ou número primo, como uma operação da união de conjuntos, por não perceber o fato do 2 ser número par e ser primo e ter de retirar um vez o número 2 da contagem do evento, extraindo-se assim o evento incorreto para o cálculo da probabilidade pedida.

Análise a priori do pós-teste: Os alunos, em sua maioria, conseguirão resolver a questão por já saberem como proceder em situações com este formato e faram uso das propriedades da união de conjuntos em probabilidades, resolvendo corretamente a questão.

07) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?



Análise a priori do pré-teste: Nossa hipótese é de que a maioria dos alunos não perceberão o evento obter múltiplo de 2 ou múltiplo de 3 como uma operação da união de conjuntos, por não perceber o fato do 6 e 12 serem múltiplos de 2 e de 3 simultaneamente e terem de retirar uma vez o número 6 e o número 12 da contagem do evento, extraindo-se assim o evento incorreto para o cálculo da probabilidade pedida.

Análise a priori do pós-teste: Os alunos, em sua maioria, conseguirão resolver a questão por já saber como proceder em situações com este formato e faram uso das propriedades da união de conjuntos em probabilidades, resolvendo corretamente a questão.

08) No lançamento simultâneo de dois dados, determine a probabilidade de não sair soma 4 nas faces voltadas para cima.

Análise a priori do pré-teste: Os alunos, em sua maioria, não resolverão esta questão por não determinar o espaço amostral para o lançamento de dois dados corretamente, dificultando assim a percepção de não sair soma 4 nas faces voltadas para cima.

Análise a priori do pós-teste: A maioria dos alunos compreenderá que se trata de uma questão de probabilidade de um evento complementar, resolvendo corretamente a questão.

09) Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de $1/5$. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

Análise a priori do pré-teste: Alguns alunos resolverão esta questão de forma intuitiva, conseguirão perceber que a probabilidade de não ganhar a corrida é $4/5$ utilizando de forma intuitiva a operação de soma ou de subtração de fração.

Análise a priori do pós-teste: A maioria dos alunos compreenderá que se trata de uma questão de probabilidade de um evento complementar, resolvendo corretamente a questão.

10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$ 50,00	34	25	40

Compras acima de R$ 50,00	10	28	43

Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

Análise a priori do pré-teste: Os alunos sentiram dificuldade em sistematizar as informações e resolver corretamente a questão, por se tratar de um problema de probabilidade condicional com certo grau de complexidade e por ter mais de uma maneira para se resolver.

Análise a priori do pós-teste: Os alunos, em sua maioria, resolverão corretamente a questão, apesar de ser uma questão complexa, não descartamos a hipótese de que ainda haja resultados incorretos, mas compreenderão que a probabilidade condicional depende de uma informação dada antecipadamente que pode facilitar o entendimento e a resolução correta da questão.

11) Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

Análise a priori do pré-teste: Os alunos sentirão dificuldade em sistematizar as informações e resolver corretamente a questão, por se tratar de um problema de probabilidade condicional com certo grau de complexidade e por ter mais de uma maneira para se resolver.

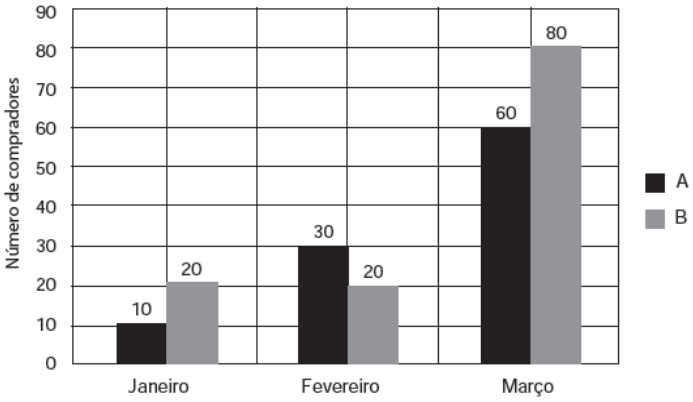
Análise a priori do pós-teste: Os alunos, em sua maioria, resolverão corretamente a questão, apesar de ser uma questão complexa, não descartamos a hipótese de que ainda haja resultados incorretos, mas compreenderão que a probabilidade condicional depende de uma informação dada antecipadamente que pode facilitar o entendimento e a resolução correta da questão.

12) Lançando dois dados comuns, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

Análise a priori do pré-teste: Os alunos sentirão dificuldade em sistematizar as informações e resolver corretamente a questão, por se tratar de um problema de probabilidade de eventos independentes, com certo grau de complexidade e por ter mais de uma maneira para se resolver.

Análise a priori do pós-teste: Os alunos, em sua maioria, resolverão corretamente a questão, apesar de ser uma questão complexa, não descartamos a hipótese de que ainda haja resultados incorretos, mas compreenderão que a probabilidade de dois eventos independentes acontecer simultaneamente é igual ao produto de suas probabilidade de acontecimentos separadamente e que depende de uma interpretação correta sobre a independência dos eventos para o entendimento e a resolução correta da questão.

13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

Análise a priori do pré-teste: Os alunos sentirão dificuldade em sistematizar as informações e resolver corretamente a questão, por se tratar de um problema de probabilidade de eventos independentes, com certo grau de complexidade e por ter mais de uma maneira para se resolver.

Análise a priori do pós-teste: Os alunos, em sua maioria, resolverão corretamente a questão, apesar de ser uma questão complexa, não descartamos a hipótese de que ainda haja resultados incorretos, mas compreenderão que a probabilidade de dois eventos independentes acontecer simultaneamente é igual ao produto de suas probabilidade de acontecimentos separadamente e que depende de uma interpretação correta sobre a independência dos eventos para o entendimento e a resolução correta da questão.

3.3. Apresentação e análise a priori das atividades para abordagem de conteúdos em Probabilidade

Neste momento do estudo, planejamos uma sequência didática baseada no ensino por atividades com o intuito de conduzir os estudantes do ensino médio para um aprendizado mais efetivo dos conceitos probabilísticos, por meio da percepção dos conceitos matemáticos presentes em cada atividade proposta. Posto que o ensino por atividade viabiliza um roteiro dinâmico de interação, participação e descobertas de conhecimentos de forma cognitiva.

Esta sequência didática está constituída por 12 atividades e questões de fixação propostas para cada uma das atividades explorando o conteúdo de probabilidade para o ensino médio.

As atividades propostas para compor a nossa sequência abordam os seguintes conteúdos:

- Experimentos Aleatórios e Determinísticos;
- Espaço Amostral;
- Eventos;
- Conceito Clássico de Probabilidade;
- Intervalo de Variação de Probabilidade;
- Probabilidade do Evento Complementar;
- Probabilidade de Eventos não Disjuntos;
- Probabilidade Condicional;
- Conceito de dois Eventos Independentes;
- Probabilidade de Eventos Independentes;

Em cada atividade serão apresentados o título, o objetivo, os materiais necessários e os procedimentos a serem realizados, solicitação de observações para que os alunos possam expor suas ideias acerca da atividade e o espaço para conclusão da atividade, para sistematizar os conhecimentos matemáticos adquiridos na atividade. Será solicitado o horário de início e fim de cada atividade, com a intenção de obter o tempo médio de realização das atividades para comparar com as informações dos docentes acerca do tempo de aula ao estudo da Probabilidade. A seguir apresentaremos essas atividades com suas respectivas análises a priori.

3.3.1 Atividade 1

Título: **Experimentos Aleatórios e Determinísticos**

Objetivo: Descobrir a diferença entre experimentos determinísticos e não-determinísticos.

Material: Caneta ou lápis e roteiro da atividade impressa

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

EVENTO(SITUAÇÃO)	**ANTES DE OCORRER É POSSÍVEL SABER O RESULTADO?**	
	SIM	**NÃO**
Da temperatura em que a água ferve(ebulição)?		
Ao lançarmos um dado uma única vez, qual a face que ficara voltada para cima(1,2,3,4,5,6)?		
De uma partida de futebol?		
Que ao Lançarmos uma moeda uma única vez, qual a face ficará voltada para cima (cara ou coroa)?		
Que acenda a luz ao apertar o interruptor?		
Que amanhã choverá em nossa cidade?		
Dê ao Lançarmos uma pedra ao rio, se ela vai ao fundo?		
Da cor de uma bola retirada de uma urna que só contém bolas pretas?		
Do efeito de um tratamento anticancerígeno em um paciente?		
Do gênero (masculino ou feminino) no nascimento de uma criança?		

Um evento em que é possível saber o resultado antes de ele ocorrer é denominado de evento **determinístico**.

De dois exemplos de eventos determinísticos:

Um evento em que não é possível saber o resultado antes de ele ocorrer é denominado de **evento aleatório**.

Dê dois exemplos de eventos aleatórios:

Análise a priori: Após o preenchimento do quadro, esperamos que os alunos se questionem sobre o acaso, ou seja a aleatoriedade presentes em seu cotidiano e com a resolução das questões eles percebam a diferença entre o experimento aleatório e o experimento determinístico e de maneira intuitiva, possam criar exemplos de experimentos aleatórios e determinísticos ao decorrer do tempo. Não descartamos a hipótese de que alguns alunos tenham dificuldades em estabelecer a diferença entre os experimentos. Pretendemos que esta dificuldade seja superada com a construção, preenchimento e leitura da tabela. A ideia central é que o aluno perceba a diferença entre experimentos determinísticos e não determinísticos.

Questões Propostas (Estas questões foram adaptadas do trabalho de Brito (2015).

Analise os experimentos seguintes e classifique-os em determinísticos ou aleatórios:

1. Determinar o tempo que uma pedra, largada de uma altura de 50 m, leva para atingir o solo.
2. Retirar uma carta de um baralho de 52 cartas e verificar seu naipe.
3. O espaço percorrido por um automóvel que se desloca a uma velocidade média de 80Km/h durante 2 h.
4. Sortear um número em uma rifa e verificar o número.

5) Dentro de certas condições, é possível prever a que temperatura o leite ferve.

6) O sorteio da quina da Loto.

7) O sorteio do primeiro prêmio da Loteria Federal.

8) De uma urna contendo 4 bolas brancas e 5 vermelhas, retirar 1 bola e observar sua cor.

9) Quanto tempo levará um carro para percorrer um trajeto de 200 km numa velocidade média de 100 km/h?

3.3.2. Atividade 2

Título: **Espaço Amostral**

Objetivo: Identificar o conjunto dos resultados possíveis num experimento aleatório.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Considere os seguintes experimentos:

EXPERIMENTO	**CONJUNTO DOS RESULTADOS POSSÍVEIS DO EXPERIMENTO**	**NÚMERO DE RESULTADOS POSSÍVEIS DO EXPERIMENTO**
A) Lançar uma moeda uma única vez e observar a face voltada para cima		
B) Lançar um dado uma única vez e observar a face que ficará voltada para cima.		
C) Lançar uma moeda duas vezes e observar a face voltada para cima.		
D) Retirar uma bola de uma urna com 10 bolas verdes e 6 bolas pretas, todas de mesmo tamanho e feitas de mesmo material.		
E) lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado).		
F) Lançar um dado duas vezes		
G) Uma letra é escolhia entre as letras da palavra PROBABILIDADE.		

H) Um casal planeja ter 3 filhos. Observa-se a sequência de sexos dos 3 filhos.		
I) Três pessoas A, B e C são colocadas numa fila e observa-se a disposição das mesmas.		

Ao conjunto dos resultados possíveis de um experimento aleatório chamamos de **Espaço Amostral.** Podemos representar o conjunto dos elementos de um espaço amostral por **S.**

O número de elementos de um espaço amostral $\boldsymbol{S}$ pode ser representado por $\boldsymbol{N}\ (\boldsymbol{S})$**.**

Análise à Priori: Após o preenchimento do quadro, esperamos que os alunos percebam a relação entre um experimento aleatório e seus possíveis resultados de acontecimentos. Com a experiência adquirida na atividade anterior, supomos que os alunos possam identificar o espaço amostral de um experimento aleatório. Aguardamos dificuldades, por se tratar de uma representação em forma de conjuntos de experimentos simples, compostos e consecutivos. Pretendemos superar essa dificuldade com auxílio do registro de valores na tabela, além da orientação individual para se estabelecer o conjunto de todos os resultados possíveis, que será construído e preenchido pelos alunos.

Questões Propostas.

Qual é o espaço amostral e o número de elementos deste espaço dos seguintes experimentos?

01) Lançar um dado duas vezes e observar o número da face de cima.

02) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), extrair uma bola e observar sua cor.

03) Lançar uma moeda três vezes e observar as sequências de caras e coroas.

04) Um lote tem 20 peças. Uma a uma, elas são ensaiadas e observa-se o número de defeituosas.

05) Uma moeda é lançada até que o resultado cara (C) ocorra pela primeira vez. Observa-se em qual lançamento esse fato ocorre.

3.3.3. Atividade 3

Título: **Eventos**

Objetivo: Identificar e representar subconjuntos.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Considere os seguintes experimentos:

EXPERIMENTOS	ESPAÇO AMOSTRAL (RESULTADOS POSSÍVEIS DO EXPERIMENTO)	SUBCONJUNTOS DO EXPERIMENTO	POSSIBILIDADES DOS SUBCONJUNTOS.	NÚMERO DE ELEMENTOS DOS SUBCONJUN TOS.
A) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima	S =	A = “Sair cara”	A =	N (A) =
		B = “Sair coroa”	B =	N (B) =
		C = “Sair cara ou coroa”	C =	N (C) =
B) Lançar um dado uma única vez e observar a face que ficará voltada para cima.	S =	A = “Obter número par”	A =	N (A) =
		B = “Obter número ímpar”	B =	N (B) =
		C = “Obter número maior que 6”	C =	N (C) =

C) Lançar uma moeda duas vezes e observar a face voltada para cima.	S =	A = “Sair duas Caras”	A =	N (A) =
		B = “Sair pelo menos uma cara”	B =	N (B) =
		C = “Sair exatamente duas Coroas.”	C =	N (C) =
D) Retirar uma bola de uma urna com 10 bolas verdes e 6 bolas pretas, todas de mesmo tamanho e feitas de mesmo material.	S =	A = “Sair Bola Verde”	A =	N (A) =
		B = “Sair Bola Preta”	B =	N (B) =
		C = “Retirar bola verde e Preta.”	C =	N (C) =
E) lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado).	S =	A = “Sair cara na moeda.”	A =	N (A) =
		B = “Sair par no dado”	B =	N (B) =
		C = “Sair número primo ou coroa”	C =	N (C) =
F) Lançar um dado duas vezes	S =	A = “Obter soma 5”	A =	N (A) =
		B = “Obter resultados iguais”	B =	N (B) =
		C = “Obter soma 13”	C =	N (C) =

A qualquer subconjunto de um espaço amostral de um experimento aleatório denominamos de **Evento**

Análise a Priori: Após o preenchimento do quadro, esperamos que os alunos se questionem sobre o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento e percebam a relação entre conjuntos e subconjuntos, possibilidades dos subconjuntos e números de elementos dos subconjuntos. Com referência as atividades realizadas anteriormente, esperamos que os alunos associem, o termo "subconjuntos do experimento" com o termo "eventos". Na hipótese dos alunos apresentarem dificuldades para construir o espaço amostral (resultados possíveis) e os eventos (subconjuntos), pretendemos superar estas dificuldades com o auxílio da tabela, que será construída pelos alunos, buscando a relação entre as variáveis através dos registros, além de orientações individuais, caso necessário. A ideia central é que o aluno perceba a relação entre o espaço amostral e seus eventos que são seus subconjuntos. Reforçando a ideia já apresentada na primeira e segunda atividades, denotando a necessidade de participar de maneira contínua das atividades apresentadas.

Questões Propostas

Quais são os eventos dos seguintes espaços amostrais?

01) Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima:

a) Ocorrência de um número menor que 3.

b) Ocorrência de um número menor que 7.

c) Ocorrência de um número maior ou igual a 7.

02) Uma moeda é lançada 3 vezes e observa-se o número de caras e coroas nas faces voltadas para cima. Descreva os eventos:

a) Ocorrência de Cara (C) no primeiro lançamento.

b) Ocorrência de exatamente uma coroa.

c) Ocorrência de no máximo duas coroas.

03) Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha é escolhida e observado o seu número. Seja S = { 1,2,3,4...,29,30}. Descreva os eventos:

a) O número obtido é par

b) O número obtido é ímpar

c) O número obtido é primo

d) O número obtido é maior que 16

e) O número é múltiplo de 2 e de 5

f) O número não é múltiplo de 6

04) A família Silva gosta de jogar bingo em casa, sorteando ao acaso números de 1 a 90. Considerando que o número sorteado na primeira seja um múltiplo de 5, escreva o espaço amostral e o evento representativo da situação.

05) Se no início de uma rodada de bingo da família Silva alguém disser “vai sair um número maior que 3", a chance de acerto é maior que a de erro: sair um número maior que 3 é, nesse caso, um acontecimento(evento) **muito provável**(não ocorre sempre, mas ocorre com frequência). Determine quantos elementos tem esse evento e o espaço amostral.

06) Ainda considerando a situação da família Silva, se alguém disser “vai sair um número maior que 90”, não existe chance de acerto, pois o acontecimento(evento) é **impossível.** Elabore enunciados para: um evento impossível e um evento certo.

07) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados

simultaneamente. José acredita que, após seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Pedro acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a) Antônio, já que sua soma é maior de todas as escolhas.

b) José a Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já eu há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é menor de todas.

3.3.4. Atividade 4

Título: **Probabilidade Clássica**

Objetivo: Conceituar probabilidade de um evento.

Material: Caneta ou lápis e roteiro da atividade impressa

Procedimento: Responda as questões:

01) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez, e observarmos a face que ficará voltada para cima: Quantas possibilidades de resultado par existem? Qual é o total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair par e o total de possibilidades?
02) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez: Quantas possibilidades de resultado ímpar existem? Qual é o total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair ímpar e o número total de possibilidades?
03) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima: Quantas possibilidades de resultado sair o número 3 existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair o número 3 e o número total de possibilidades?
04) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima: Quantas possibilidades de sair um número maior que 4 existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair um número maior que 4 e o número total de possibilidades?
05) Ao lançarmos um dado normal de seis faces, uma única vez e observarmos a face que ficará voltada para cima: Quantas possibilidades de sair um número menor que 3 existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados?

Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair um número menor que 3 e o número total de possibilidades?
06) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso: Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor branca existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor branca e o número total de possibilidades?
07) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso: Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor amarela existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor amarela e o número total de possibilidades?
08) Em uma urna com 10 bolas brancas, 6 pretas e 4 amarelas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material, ao retirarmos uma bola ao acaso: Quantas possibilidades de retirarmos uma bola da cor preta existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades da bola retirada ser da cor preta e o número total de possibilidades?
09) Ao lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado). Quantas possibilidades de sair cara na moeda existem? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de sair cara na moeda e o número total de possibilidades?
10) Ao Lançarmos um dado normal duas vezes e observamos a face que ficará voltada para cima. Quantas possibilidade de obter soma 5 nas faces voltadas para cima? Qual é o número total de possibilidades de resultados? Qual é a razão entre o número de possibilidades de obter soma 5 e o número total de possibilidades?

A razão entre o número de possiblidades desejadas em um evento e o número total de possibilidades do evento é denominada de **probabilidade** do evento desejado, ou seja:

$$\text{Probabilidade de um evento ocorrer} = \frac{\text{Número de possibilidades desejadas do evento}}{\text{Número total de possibilidades do evento}}$$

E pode ser representado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Análise a Priori: Ao lerem as questões os alunos deverão perceber a relação entre o número de possibilidades desejadas e o número total de possibilidades em um experimento aleatório. Os alunos a partir das questões, das tabelas, pela experiência nas atividades anteriores, devem perceber que a relação é uma razão, o que implica na associação com a segunda e terceira atividades. Acreditarmos que os alunos apresentarão dificuldades nas representações da probabilidade em forma de fração, número decimal e porcentagem. Pretendemos superar estas dificuldades, utilizando valores como: $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ e 1, transformando-os em porcentagens como 0%, 25%, 50%, 75% 100% por serem mais acessíveis, além do auxílio individual e a resolução, no quadro, de exemplos vinculados aos quocientes apresentados. Fazendo com que os alunos percebam a regularidade desta operação, e generalizem nas próximas questões na forma de fração, número decimal e porcentagem. A ideia central é que o aluno perceba a relação da razão entre casos desejados e casos possíveis, que será formalizada com a leitura da definição clássica de probabilidade.

Questões Propostas

01) Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Qual a probabilidade de esse número ser:

a) menor que 3?

b) maior ou igual a 3?

02) Escreva o espaço amostral do lançamento sucessivo de duas moedas preenchendo a tabela de dupla entrada abaixo:

Lançamento de duas moedas	Cara (C)	Coroa (K)
Cara (C)		
Coroa (K)		

a) Qual a probabilidade de sair duas caras?

b) Qual a probabilidade de sair duas coroas?

c) Qual a probabilidade de sair pelo menos uma cara?

03) Uma moeda é lançada três vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos:

a) Exatamente uma cara?

b) No máximo duas caras?

04) André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecem duas coroas, André lavará a louça; se aparecem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

a) 25% b) 27,5% c) 30% d) 33,3% e) 50%

05) Ao lançar dois dados clássicos, A e B, a probabilidade de que o número que aparece na face superior do dado A seja divisor do número que aparece na face superior do dado B é de:

a) 1/6 b) 7/9 c) 7/12 d) 7/17 e) 1/3

06) A delegação esportiva de um certo país participou de uma festa e, involuntariamente, quatro jogadores do time de basquetebol, cinco do time de voleibol e nove do time de futebol ingeriram uma substancia proibida pelo comitê

antidoping. Um jogador de cada time será sorteado para passar por um exame desse comitê. Considerando-se que o time de basquetebol tem 10 jogadores, o de voleibol 12, e o de futebol 22, e ordenando-se os times pela ordem crescente da probabilidade de ser "pego" um jogador que tenha ingerido a substancia proibida, tem-se:

a) basquetebol, futebol, voleibol

b) basquetebol, voleibol, futebol

c) futebol, voleibol, basquetebol

d) futebol, basquetebol, voleibol

e) Voleibol, futebol, basquetebol

07) Em uma urna há 10 cartões, cada qual marcado com apenas um dos números: 2,5,6,7,13,14,19,21 e 24. Para compor uma potência, devem ser sorteados sucessivamente e sem reposição dois cartões: no primeiro número assinalado deverá corresponder a base da potência e no segundo, ao expoente. Assim, a probabilidade de que a potência obtida seja equivalente a um número par é de:

a) 45%

b) 40%

c) 35%

d) 30%

e) 25%

3.3.5. Atividade 5

Título: **Variação de Probabilidade**

Objetivo: Descobrir o intervalo de variação da probabilidade de um evento.

Material: Roteiro da atividade, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Consideremos o seguinte experimentos:

		EVENTOS				**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**				**PROBABILIDADES DO EVENTOS**			
Experimento	Espaço Amostral	Evento A	Evento B	Evento C	Evento D	A	B	C	D	P(A)	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$
A) Lançar uma moeda uma única vez e observar a face voltada para cima	{Cara, Coroa}	Sair Cara e Coroa.	Sair Cara	Sair Coroa.	Sair Cara ou Coroa								
B) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima	1,2,3,4,5, 6	Sair o número zero.	Sair o número 2.	Sair número par.	Sair número entre zero(0) e sete(7).								

C) Colocamos uma bola verde e uma Azul num saco, extraímos uma aleatoriamente e observamos sua cor.	{Verde, Azul}	Sair bola Branca.	Sair bola Verde.	Sair bola Azul.	Sair bola verde ou azul.								
D) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima	1,2,3,4,5, 6	Obter número 0.	Obter número par.	Obter número ímpar.	Obter número entre 0 e 7.								
E) Em uma urna há 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 7 bolas vermelhas. Retirando uma bola ao acaso;	Sair bola vermelha **e** branca;	Sair bola branca;	Sair bola preta;	Sair bola branca **ou** preta **ou** vermelha									

F) Em uma urna há 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 7 bolas vermelhas. Retirando uma bola ao acaso;	Sair bola vermelha **e** preta	Sair bola branca **ou** preta	Sair bola branca **ou** vermelha	Sair bola branca **ou** preta **ou** vermelha									

Observação:____

Conclusão:____

Análise à priori: Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda o intervalo de variação da probabilidade de um evento. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de um evento impossível, eventos elementares e do evento certo. Esta atividade foi construída para funcionar como uma introdução à construção do registro de somas de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de somas de probabilidades, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade.

Questões Propostas

01) Um dado é lançado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima. Qual a probabilidade de esse número ser:

a) maior que 6?

b) menor que 3?

c) maior ou igual a 3?

d) maior que zero(0) e menor 7?

e) o número 1? O número 2? O número 3? O número 4? O número 5? O número 6?

e) Qual é o valor da soma $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$?

02) Uma moeda é viciada, de modo que as caras são três vezes mais prováveis de sair do que as coroas. Determine a probabilidade de em um lançamento sair coroa.

03) Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. Os estudantes A e B têm a mesma probabilidade de vencer e cada um tem o dobro da probabilidade de vencer que o estudante C. Qual a probabilidade de A ou C vencer?

04) Um torneio é disputado por 4 times A, B, C e D. É 3 vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e é 3 vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de ganhar para cada um dos times?

05) Um dado de 6 faces apresenta a seguinte irregularidade: a probabilidade de sair a face dois é o dobro da probabilidade de sair a face um. As probabilidades de saírem as demais faces são iguais a $\frac{1}{6}$. Então:

a) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{1}{3}$

b) a probabilidade de sair a face dois é igual a 2

c) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{1}{9}$

d) a probabilidade de sair a face dois é igual a $\frac{2}{12}$

e) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{2}{9}$

3.3.6. Atividade 06

Título: **Eventos complementares**

Objetivo: Conceituar eventos complementares

Material: Folha de atividade, lápis, caneta

Procedimento: Preencha o quadro a seguir:

	ELEMENTOS DOS EVENTOS				**PROBABILIDADE DOS EVENTOS**	
Experimento	$Evento\ A$	$Evento\ B$	$Evento\ A \cap B$	$Evento\ A \cup B$	$P(A)$	$P(B)$
A) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Sair número primo	Sair número composto				
B) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Obter múltiplo de 3	Não obter múltiplo de 3				
C) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Sair a face Cara	Sair a face Coroa				
D) Numa urna com 10 bolas verdes e 6 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso	Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta				

uma única vez e observamos a cor.						
E) Numa urna com 5 bolas verdes e 5 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor.	Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta				
F) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	Sair uma ficha par	Sair uma ficha múltiplo de 3				
G) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	Sair uma ficha impar	Sair uma ficha múltiplo de 3.				
H) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha par.	Sair uma ficha múltiplo de 3.				
I) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha ímpar.	Sair uma ficha múltiplo de 3.				
J) Uma caixa contém 20 fichas	Sair uma ficha divisor de 20.	Sair uma ficha múltiplo de 2.				

numeradas de 1 a 20.						

Quando a intersecção de dois eventos é **vazia** e a união deles é o **espaço amostral** do experimento, dizemos que os eventos são complementares.

Quais dos pares de eventos do quadro são complementares?

Quais dos pares de eventos do quadro não são complementares?

Análise a priori: Ao visualizar a tabela e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor de todos os eventos propostos e suas probabilidades. A ideia central é que o aluno compreenda que dois eventos são complementares quando a interseção entre eles for vazia e a união entre eles for igual ao espaço amostral do experimento.

3.3.7. Atividade 07

Título: **Eventos complementares**

Objetivo: Descobrir uma expressão para a probabilidade de dois eventos complementares

Material: Folha de atividade, lápis, caneta

Procedimento: Preencha o quadro a seguir:

	ELEMENTOS DOS EVENTOS				**OS EVENTOS A E B SÃO COMPLEMENTARES?**		**PROBABILIDADE DOS EVENTOS**	
Experimento	$Evento\ A$	$Evento\ B$	$Evento\ A \cap B$	$Evento\ A \cup B$	SIM	NÃO	P(A)	P(B)
A) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Sair número primo	Sair número composto						
B) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Obter múltiplo de 3	Não obter múltiplo de 3						
C) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima.	Sair a face Cara	Sair a face Coroa						
D) Numa urna com 10 bolas	Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta						

verdes e 6 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor.								
E) Numa urna com 5 bolas verdes e 5 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor.	Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta						
F) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	Sair uma ficha par	Sair uma ficha múltiplo de 3						
G) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	Sair uma ficha impar	Sair uma ficha múltiplo de 3.						
H) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha par.	Sair uma ficha múltiplo de 3.						
I) Uma caixa contém 20 fichas	Sair uma ficha ímpar.	Sair uma ficha múltiplo de 3.						

numeradas de 1 a 20.								
J) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	Sair uma ficha divisor de 20.	Sair uma ficha múltiplo de 2.						

Observação:____

Conclusão: Quando A e B são dois eventos complementares**,** $\boldsymbol{P(A) = 1 - P(B)}$

Análise a priori: Ao visualizar a tabela e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor de todos os eventos propostos e verificar se são ou não complementares, em seguida calcular as probabilidades dos dois eventos complementares. A ideia central é que o aluno compreenda que, quando dois eventos são complementares a probabilidade de um deles igual a um menos a probabilidade do outro evento.

Questões Propostas

01) Em certa cidade, de cada 10 rapazes, 4 em média, tem olhos verdes. Sorteando-se ao acaso um rapaz dessa cidade, qual é a probabilidade de ele não ter olhos verdes?

02) Sejam $A\ e\ B$ eventos de um mesmo espaço amostral, com $P(A\ B) = 0{,}75$. Em cada caso, calcule $P(B)$, admitindo que $P(A) = 0{,}35$ e $A\ e\ B$ são mutuamente exclusivos.

03) Ao atirar num alvo, a probabilidade de uma pessoa acertá-lo é $\frac{3}{5}$. Qual é a probabilidade de ela errar?

04) A probabilidade de um piloto vencer uma corrida é o triplo da probabilidade de perder. Qual é a probabilidade de que esse piloto vença a corrida, se não pode haver empate?

05) Em uma eleição em que não pode haver empate, a probabilidade de um candidato vencer é $\frac{X+3}{4}$ e a de perder é $\frac{X}{6}$. Essa informação permite concluir que a probabilidade de esse candidato vencer a eleição é:

a) 20% b) 50 % c) 10% d) 15 % e) 90%

3.3.8. Atividade 08

Título: **Probabilidade do Evento complementar**

Objetivo: Descobrir uma expressão para calcular a probabilidade da união de dois eventos complementares

Material: Roteiro de atividade, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Consideremos o seguinte experimentos:

		Eventos				Possibilidades dos Eventos				Probabilidades do Eventos			
Experimento	Possibilidades do experimento	Evento A	Evento B	Evento $A \cap B$	Evento $A \cup B$	A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	P(A)	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
A) Lançar um dado uma única vez e o observar a face voltada para cima		Sair número primo	Sair número composto	Sair número primo e composto	Sair número primo ou composto								
B) Lançar um dado uma única vez e o observar a		Obter múltiplo de 3	Não obter múltiplo de 3	Obter múltiplo de 3 e não obter	Obter múltiplo de 3 ou não obter								

face voltada para cima				múltiplo de 3	múltiplo de 3								
C) Lançar uma moeda uma única vez e o observar a face voltada para cima		Sair a face Cara	Sair a face Coroa	Sair a face Cara e a face Coroa	Sair a face Cara ou a face Coroa								
D) Numa urna com 10 bolas verdes e 6 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor:		Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta	Sair uma bola de cor Verde e Preta	Sair uma bola da cor Verde ou Preta								
E) Numa urna com 5 bolas verdes e 5 pretas, ao retiramos uma bola ao acaso uma única vez e observamos a cor:		Sair uma bola da cor Verde	Sair uma bola da cor Preta	Sair uma bola de cor Verde e Preta	Sair uma bola da cor Verde ou da cor Preta								

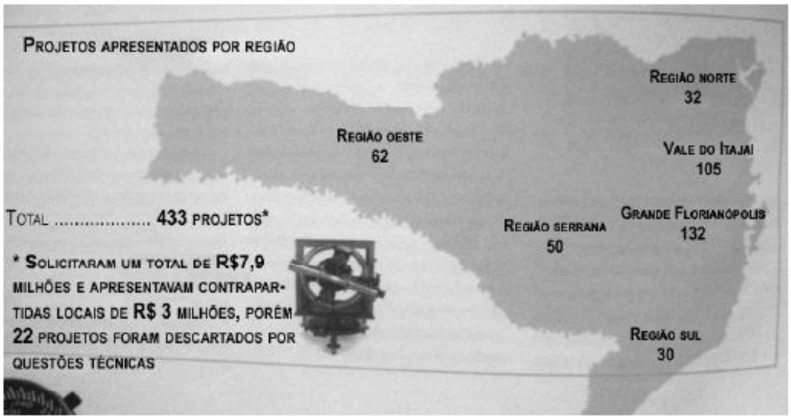
Observação:____

Conclusão: Quando A e B são dois eventos complementares $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Análise à priori: Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que a probabilidade da união de dois eventos complementares é igual a soma das probabilidades de cada um destes eventos, e que a interseção destes eventos é vazia. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de que os eventos são complementares. Esta atividade foi construída para funcionar como construção do registro de somas de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de somas de probabilidades e união de conjuntos, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola.

Questões propostas

01) A economia do estado de Santa Catarina esteve, em 2002, fortemente voltada para a exportação de manufaturados com maior valor agregado. Isso exigiu, na época, maior empenho de pesquisadores de diversas áreas das esferas municipal, estadual, federal e privada. A tarefa da *funcitec* é financiar Ciência & Tecnologia por meio da abertura frequente de editais abertos e com referências competitivas claras. A figura abaixo apresenta alguns dados que ilustram a busca para financiamento de pesquisas de um desses editais promovidos pela *funcitec.*

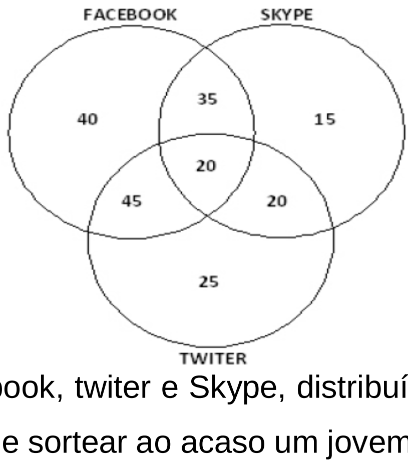


Fonte: NEXUS, Ciência & Tecnologia, Nº 2 , ANO II de

Nessas condições, afirma-se que a probabilidade de um projeto escolhido aleatoriamente, dentre o total dos projetos apresentados, não ser da região sul é de:

$a)\ 233/433$ $b)\ 403/433$ $c)\ 517/433$ $d)\ 530/433$

2) Uma pesquisa num grupo de jovens revelou que os meios de comunicação



mais utilizados são facebook, twiter e Skype, distribuídos conforme o diagrama abaixo. A probabilidade de sortear ao acaso um jovem que **NÃO** utiliza Skype é:

$a)\ 92{,}5\ \%$ $b)\ 65\ \%$ $c)\ 55\ \%$ $d)\ 45\ \%$ $e)\ 35\%$

03) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T; V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00. A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a:

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

04) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$400;00 é Igual a:

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

05) Suponha que, dos imigrantes que chegaram aos Estados Unidos, 120 mil fossem brasileiros. Um dos 15 milhões de imigrantes teve sorte grande naquele país: ficou rico. A probabilidade de que esse imigrante NÂO seja brasileiro é de:

a) 0,80% b) 9,92% c) 80,00% d) 99,20% e) 97,20%

3.3.9. Atividade 09

Título: **Probabilidade de eventos não disjuntos (Não complementares)**

Objetivo: Descobri uma expressão para a probabilidade de dois eventos não disjuntos.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Consideremos os seguintes experimentos:

		EVENTOS				POSSIBILIDADES DOS EVENTOS				PROBABILIDADES DO EVENTOS			
Experimento	Possibilidades do experimento	Evento A	Evento B	Evento $A \cap B$	Evento $A \cup B$	A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	P(A)	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
A) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	S = {1,2, 3...,9,10}	Sair uma ficha par	Sair uma ficha múltiplo de 3	Sair uma ficha par e múltiplo de 3.	Sair uma ficha par ou múltiplo de 3								
B) Uma caixa contém 10 fichas numeradas de 1 a 10.	S = {1,2, 3...,9,10}	Sair uma ficha impar	Sair uma ficha múltiplo de 3.	Sair uma ficha ímpar e múltiplo de 3.	Sair uma ficha ímpar ou múltiplo de 3.								
C) Uma caixa contém 20 fichas	S = {1,2, 3...,19,20}	Sair uma ficha par.	Sair uma ficha múltiplo de 3.	Sair uma ficha par e múltiplo de 3.	Sair uma ficha par ou								

numeradas de 1 a 20.					múltiplo de 3.								
D) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	S = {1,2, 3...,19,20}	Sair uma ficha ímpar.	Sair uma ficha múltiplo de 3.	Sair uma ficha ímpar e múltiplo de 3.	Sair uma ficha ímpar ou múltiplo de 3.								
E) Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20.	S = {1,2, 3...,19,20}	Sair uma ficha divisor de 20.	Sair uma ficha múltiplo de 2.	Sair uma ficha divisor de 20 e múltiplo de 2.	Sair uma ficha divisor de 20 ou múltiplo de 2.								

Observação:____

Conclusão:____

Análise à priori: Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que a probabilidade da união de dois eventos não complementares é igual a soma das probabilidades de cada um destes eventos menos a probabilidade da ocorrência conjunta destes eventos, e que a interseção destes não é vazia. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de que os eventos não são complementares. Esta atividade foi construída para funcionar como construção do registro de soma e subtração de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de soma e subtração de probabilidades, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola.

Questões Propostas

01) Na lista de chamada de uma classe, os alunos são numerados de 1 a 30. Para uma chamada oral, o professor sorteou um desses números. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja par ou múltiplo de 6?

02) Em uma urna serão colocadas 4 bolas azuis, numeradas de 1 a 4, e 5 bolas amarelas, numeradas de 1 a 5. Sorteando uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de ela ser azul ou ter número ímpar?

03) Os cursos ofertados pela UEPA no PROSEL e PRISE, no município de IGARAPÉ AÇU, com as respectivas vagas, constam na tabela abaixo:

CURSO OFERTADO	PROSEL	PRISE
Licenciatura em Letras	20	20
Licenciatura em Matemática	20	20

Supondo que todas as vagas serão preenchidas, qual é a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um aluno do Curso de Licenciatura em Matemática ou um aluno aprovado no PRISE?

04) O professor Francisco de Assis realizou uma pesquisa em uma de suas turmas de 2ª série do ensino médio para saber a preferência dos alunos a respeito do tema a ser escolhido para a feira cultural da escola. Assim, apresentou aos alunos dois temas: Cidadania e Meio Ambiente, obtendo os seguintes resultados:

40 alunos escolheram Cidadania

25 alunos escolheram Meio Ambiente

10 alunos escolheram ambos os temas

5 alunos não escolheram nenhum dos dois temas:

Desta forma, selecionando um aluno da sala, qual é a probabilidade dele ter escolhido apenas Meio Ambiente como tema?

05) Uma pesquisa com três marcas concorrentes de refrigerantes, A; B e C, mostrou que 60% das pessoas entrevistadas gostam de A, 50% gostam de B, 57% gostam de C, 35% gostam de A e C, 18% gostam de A e B, 24% gostam de B e C, 2% gostam das três marcas e o restante das pessoas não gosta de nenhuma das três. Sorteando-se aleatoriamente uma dessas pessoas entrevistadas, qual é a probabilidade de que ela goste de uma única marca de refrigerante ou não goste de marca alguma?

06) Em um colégio foi realizada uma pesquisa sobre as atividades extracurriculares de seus alunos. Dos 500 alunos entrevistados, 240 praticavam um tipo de esporte, 180 frequentavam um curso de idiomas e 120 realizavam estas duas atividades, ou seja, praticavam um tipo de esporte e frequentavam um curso de idiomas. Se, nesse grupo de 500 estudantes um é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de que ele realize pelo menos uma dessas duas atividades, isto é, pratique um tipo de esporte ou frequente um curso de idiomas?

3.3.10. Atividade 10

Título: **Probabilidade Condicional**

Objetivo: Descobrir uma expressão para o cálculo de probabilidades de ocorrer um evento, sabendo da ocorrência de um outro.

Material: Folha de atividades impressa, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Considere os seguintes eventos:

	EVENTOS			**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**			**PROBABILIDADES DOS EVENTOS**		**PROBABILIDADE DO EVENTO B TENDO OCORRIDO O EVENTO A.**
Experimento	$Evento\ A$	$Evento\ B$	$Evento\ A \cap B$	A	B	$A \cap B$	P(A)	$P(A \cap B)$	$P(B/A)$
A) Consideremos uma urna com 12 bolas, numeradas de 1 a 12. Sorteia-se uma bola e observa-se o número: Se a bola sorteada foi par, qual a probabilidade dela ser maior que 6?	A bola sorteada foi par.	A bola sorteada é maior de 6	A bola sorteada é par e maior que 6						
B) Se a bola sorteada foi ímpar, qual a probabilidade dela ser maior que 6?	A bola sorteada foi ímpar.	A bola sorteada é maior de 6	A bola sorteada é ímpar e maior que 6						

C) Se a bola sorteada foi ímpar, qual a probabilidade dela ser menor que 6?	A bola sorteada foi ímpar.	A bola sorteada é menor de 6	A bola sorteada é ímpar e menor do que 6						
D) Se a bola sorteada foi par, qual a probabilidade dela ser menor que 10?	A bola sorteada foi par.	A bola sorteada é menor de 10.	A bola sorteada é par e menor que 10.						
E) Se a bola sorteada foi par, qual a probabilidade dela ser divisor de 12?	A bola sorteada foi par.	A bola sorteada é divisor de 12.	A bola sorteada é par e divisor que 12.						
F) Em uma turma temos 25 meninas e 20 meninos. Na disciplina língua estrangeira, todos tem a opção de escolher inglês ou espanhol, 10 meninas escolhem espanhol e 12 meninos fazem a mesma opção. Um aluno vai ser sorteado ao acaso: Sabendo-se que o aluno escolhido foi menina, qual a probabilidade dela ter escolhido inglês?	O aluno escolhido foi menina.	O aluno escolhe inglês.	O aluno escolhido foi menina e escolheu inglês.						

Observação:____

Conclusão:____

Análise à priori: Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que a probabilidade condicional é igual ao quociente das probabilidades da ocorrência conjunta destes eventos pela probabilidade do evento que já ocorreu, ou seja, a probabilidade da interseção destes eventos dividido pela probabilidade do evento que já ocorreu. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de que a probabilidade do evento desejado faz parte de um "novo" espaço amostral dado pela informação da ocorrência a priori de um evento. Esta atividade foi construída para funcionar como construção do registro de divisão de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de divisão de probabilidades e probabilidades condicionais, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola e a construção da árvore das probabilidades para facilitar o aprendizado e a visualização das probabilidades condicionais.

Questões propostas

01) Um dado é lançado e o número da face de cima é observado.

a) Se o resultado obtido for par, qual a probabilidade de ele ser maior ou igual a 5?

b) Se o resultado obtido for maior ou igual a 5, qual a probabilidade de ele ser par?

c) Se o resultado obtido for ímpar, qual a probabilidade de ele ser menor que 3?

d) Se o resultado obtido for menor que 3, qual a probabilidade de ele ser ímpar?

02) Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100.

a) Qual a probabilidade de o número ser par?

b) Qual a probabilidade de o número ser par, sabendo que ele é menor que 50?

c) Qual a probabilidade de o número ser divisível por 5, sabendo que é par?

03) Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50. Se o número é primo, qual é a probabilidade de que seja ímpar?

04) Jogue um dado duas vezes. Calcule a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7.

05) Numa cidade, 400 pessoas foram classificadas, segundo sexo e estado civil, de acordo com a tabela:

	Solteiro (S)	Casado (C)	Desquitado (D)	Viúvo (V)	
Masculino(M)	50	60	40	30	180
Feminino(F)	150	40	10	20	220
	200	100	50	50	

a) Uma pessoa é escolhida ao acaso, sabendo que a pessoa é do sexo masculino, qual a probabilidade de a pessoa ser solteira?

b) Uma pessoa é escolhida ao acaso, sabendo que a pessoa é desquitada, qual a probabilidade de a pessoa ser do sexo feminino?

06) Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A?

3.3.11. Atividade 11

Título: **Conceituar eventos independentes**

Objetivo: Descobrir quando dois eventos são independentes.

Material: Roteiro de atividade, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

	EVENTOS		**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**		**PROBABILIDADE DOS EVENTOS**			
Experimento	$Evento\ A$	$Evento\ B$	A	B	$P(B)$	$P(B/A)$	$P(A)$	$P(A/B)$
A) O lançamento de um dado, uma única vez.	O resultado é par.	O resultado é maior do que 4.						
B) Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.	O resultado do primeiro lançamento é par.	o resultado do segundo lançamento é par.						

C) Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.	O resultado do primeiro lançamento é par.	A soma dos resultados é par.						
E) Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.	O resultado do segundo lançamento é par.	A soma dos resultados é par.						
F) Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.	O primeiro dado mostra um número par	O segundo dado mostra um 5 ou um 6.						

Observação:____

Conclusão:____

Dizemos que $A\ e\ B$ são **eventos independentes** se a ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro, isto é, se , $P(A) = P(A|B)$ e $P(B) = P(B|A)$. Assim, para a ocorrência simultânea de dois eventos independentes, temos:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Quais dos experimentos acima tem pares de eventos independentes?

Análise à Priori: Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que dois eventos $A\ e\ B$ são independentes quando a probabilidade de ocorrência do evento A não se modifica mesmo quando o evento B tenha ocorrido, ou seja, $P(A) = P(A|B)$, ou vice-versa, $P(B) = P(B|A)$, isto é A é independente de B se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratar de eventos independentes pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola e a construção e utilização da árvore das probabilidades.

Questões propostas

01) Uma moeda é lançada três vezes. Sejam os eventos:

A: Ocorrem pelo menos duas caras.

B: Ocorrem resultados iguais nos três lançamentos.

Os eventos $A\ e\ B$ são independentes?

02) Numa sala existem 4 homens e 6 mulheres. Uma mosca entra na sala e pousa numa pessoa, ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que ela pouse num homem (P(H))?

b) Qual a probabilidade de que ela pouse numa mulher (P(M))?

c) Os eventos H e M são independentes? Justifique.

03) Dois eventos $A\ e\ B$ são independentes, por definição, quando $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. Três eventos A, B e C são independentes, por definição, quando $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, $P(B \cap C) = P(B).P(C)$, $P(A \cap C) = P(A).P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$. Jogue um dado duas vezes. Considere os eventos A = { o resultado do primeiro lançamento é par}, B= {o resultado do segundo lançamento é par} e C= { a soma dos resultados é par}.

a) A e B são independentes?

b) A e C são independentes?

c) B e C são independentes?

d) A, B e C são independentes?

3.3.12. Atividade 12

Título: **Probabilidade de eventos independentes**

Objetivo: Descobrir uma expressão para a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos.

Material: Roteiro de atividade, dados, moedas, lápis

Procedimento: Preencha o quadro a seguir

01) Considere os seguintes experimentos:

		EVENTOS			**POSSIBILIDADES DOS EVENTOS**			**PROBABILIDADE DOS EVENTOS NA FORMA DE FRAÇÃO IRREDUTÍVEL.**		
Experimento	Espaço amostral do experimento	Evento A	Evento B	Evento $A \cap B$	A	B	$A \cap B$	P(A)	$P(B)$	$P(A \cap B)$
A) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer coroa e número primo?		Ocorrer Coroa.	Ocorrer número primo.	Sair coroa e número primo.						
B) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer coroa e número maior que 4?		Ocorrer Coroa.	Ocorrer número maior que 4.	Ocorrer coroa e número maior que 4.						

C) Uma moeda é lançada 3 vezes.		Ocorrem pelo menos duas caras.	Ocorrem resultados iguais nos três lançamentos.	Ocorrem pelo menos duas caras e resultados iguais nos três lançamentos						
D) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer Cara e o número 1?		Ocorrer Cara.	Ocorrer o número 1.	Ocorrer cara e o número 1.						
E) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de ocorrer Cara e o número 1?		Ocorrer Cara.	Ocorrer o número 1.	Ocorrer cara e o número 1.						
F) Consideremos o experimento que consiste no lançamento simultâneo de duas moedas normais. Qual a probabilidade de sair face cara na primeira e na segunda moeda?		Ocorrer Cara na primeira.	Ocorrer cara na segunda.	Ocorrer cara na primeira e na segunda.						

Observação:____

Conclusão:____

Análise à Priori: Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que a probabilidade de dois ou mais eventos independentes ocorrerem de forma conjunta é igual ao produto das probabilidades da ocorrência de cada um dos eventos de forma separadamente. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de que ocorrência de um evento não interfere na probabilidade de ocorrência de outro por eles serem eventos independentes. Esta atividade foi construída para funcionar como construção do registro de multiplicação de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de multiplicação de probabilidades e a interpretação de eventos independentes, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola e a construção e utilização da árvore das probabilidades.

Questões propostas

01) Dos 30 funcionários de uma empresa, 10 são canhotos e 25 vão de ônibus para o trabalho. Escolhendo ao acaso um desses funcionários, qual a probabilidade de que ele seja canhoto e vá de ônibus para o trabalho?

02) Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observamos cara nos 10 lançamentos?

03) Um dado é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de que a face “2” apareça pelo menos uma vez nos 5 lançamentos?

04) Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade de a primeira pessoa atingir o alvo é $P(A) = \frac{1}{3}$ e a probabilidade de a segunda pessoa atingir o alvo é $P(B) = \frac{2}{3}$. Admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

a) ambos atingirem o alvo?

b) Ao menos um atingir o alvo?

05) As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são: $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{3}{5}$. Qual a probabilidade de que:

a) Ambos resolvam o problema?

b) Ao menos um resolva o problema?

c) nenhum resolva o problema?

06) A probabilidade de um certo homem sobreviver mais 10 anos, a partir de uma certa data, é de 0,4, e de que sua esposa sobreviva mais 10 anos a partir da mesma data é 0,5. Qual a probabilidade de:

a) ambos sobreviverem mais 10 anos a partir daquela data?

b) ao menos um deles sobreviver mais 10 anos a partir daquela data?

07) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R não ser escalado é 0,2 e a probabilidade de o jogador S ser escalado é 0,7. Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:

a) 0,72 b) 0,56 c) 0,24 d) 0,16 e) 0,14

08) No Estado do Pará, 94% dos estudantes do Ensino Médio estão matriculados em escolas públicas. Se a probabilidade de esses estudantes serem negros (pretos + pardos) é de 75% então a probabilidade de o estudante do Ensino Médio estar matriculado em escola pública e ser negro é:

a) 23,5% b) 55,5% c) 70,5% d) 45,5% e) 67,5%

09) Em um supermercado, a probabilidade de que um produto da marca A e um produto da marca B estejam a dez dias, ou mais, do vencimento do prazo de validade é de 95% e 98%, respectivamente. Um consumidor escolhe, aleatoriamente, dois produtos, um produto da marca A e outro da marca B. Admitindo eventos independentes, a probabilidade de ambos os produtos escolhidos estejam a menos de dez dias do vencimento do prazo de validade é:
a) 0,001% b) 0,01% c) 0,1% d) 1% e) 10%

10) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1000}$, eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos. O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P > \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P > \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P > \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P > \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \geq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como:
a) excelente b) bom c) regular d) ruim e) péssimo

11) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas

cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,2. A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a) 0,02048 b) 0,08192 c) 0,24000 d) 0,40960 e) 0,49152

12) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos. A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7% b) 30,0% c) 44,1% d) 65,7% e) 90,0%

4. EXPERIMENTAÇÃO

Nesta seção temos como objetivo apresentar o desenvolvimento da etapa da experimentação. Nela trazemos a descrição de como executamos esta etapa com base no material descrito na seção anterior. A experimentação foi desenvolvida em uma escola pública federal de Abaetetuba/PA, a qual atende desde o curso técnico integrado ao ensino médio até o nível superior com o curso de licenciatura em biologia. A opção por esta escola justifica-se por ser uma das escolas do município onde atuamos como professor substituto, portanto, temos facilidade de acesso e por ser uma instituição cuja equipe pedagógica anseia constantemente por novas metodologias para o ensino de Matemática.

Escolhemos o segundo ano do Ensino Médio por ser este o momento de consolidação do ensino de probabilidade. A turma selecionada para a representação da população da pesquisa pertencia ao turno da manhã e possuía vinte e 28 alunos regularmente matriculados, dos quais apenas vinte participaram do experimento, pois, foram os que estiveram presentes tanto no momento do pré-teste, quanto no pós-teste.

Nesta instituição cada professor assume uma turma no início do ano e nela permanece durante todo o ano letivo se a turma for de Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio, ministrando a disciplina específica de sua formação do currículo da referida série. Procuramos o professor de matemática do turno da manhã que disponibilizou suas três aulas de Matemática semanalmente para realização da pesquisa, cada hora-aula para as disciplinas têm duração de 50 minutos.

A instituição, também oferece uma ótima infraestrutura aos alunos e professores, desde de salas de aulas bem organizadas com aparatos tecnológicos como Datashow, tevês, quadro magnético, boa iluminação e bem climatizadas, bem como transporte escolar gratuito aos alunos, material escolar, uniformes, internet, biblioteca, laboratórios de informática dentre outros, como suportes para o ensino, pesquisa e extensão.

A etapa da experimentação foi distribuída em nove encontros que nomeamos de seções de ensino. Vejamos a descrição de cada seção de ensino com suas respectivas datas no quadro a seguir.

Quadro 18: Atividades desenvolvidas

DATA	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS
08/04/2017	Questionário socioeconômico. Pré-teste. Atividade 1: Experimentos aleatórios e determinísticos. Questões propostas.
10/04/2017	Atividade 2: Espaço amostral. Questões de fixação.
17/04/2017	Atividade 3: Eventos. Questões propostas.
24/04/ 2017	Atividade 4: Probabilidade clássica. Atividade 5: Intervalo de variação da probabilidade. Questões propostas.
08/ 05/ 2017	Atividade 6: Eventos complementares. Atividade 7: Eventos complementares. Atividade 8: Probabilidade do evento complementar. Questões propostas.
15/ 05/ 2017	Atividade 9: Probabilidade de eventos não disjuntos (não complementares. Questões propostas.
22/ 05/ 2017	Atividade 10: Probabilidade condicional. Questões propostas.
25/ 05/ 2017	Atividade 11: Conceituar eventos independentes. Atividade 12: Probabilidade de eventos independentes. Questões propostas.
29/ 05/ 2017	Pós-teste

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

4.1 Primeira seção de ensino

A primeira seção de ensino ocorreu no dia 08 de abril de 2017. Neste dia o professor nos apresentou aos alunos, justificou o motivo de nosso trabalho com a turma e informou que se tratava da realização de uma pesquisa sobre o ensino de Matemática. Aproveitou para avisar que nos dias destinados a essa atividade ele não estaria presente nas aulas e que os resultados obtidos na pesquisa seriam usados para somar com a nota da 4ª avaliação na disciplina Matemática.

Após esta conversa inicial, ele nos concedeu a fala. Procedemos, então, a nossa apresentação, destacando o nome da instituição a qual estamos vinculados; o local do curso e a finalidade da pesquisa com o ensino de Matemática. Pontuamos ainda a importância e a seriedade da mesma e, principalmente, de cada um dos presentes naquela sala para que sua concretização tivesse sucesso. Perguntamos se podiam colaborar conosco e todos se mostraram interessados e se dispuseram a contribuir.

Explicamos aos alunos que neste dia eles responderiam a dois questionários: sendo o primeiro, de cunho sócio econômico, relacionado a aspectos da vida escolar; sua relação com a matemática; formação escolar de seus familiares; hábitos de estudos e das atividades econômicas. Já para o segundo, sendo um teste para avaliar seus conhecimentos sobre o assunto abordado, pedindo que resolvessem as questões do jeito que julgassem correto, mas sem o uso da calculadora ou outro recurso didático. O primeiro questionário foi efetivado de 8h05min às 8h17min, pois no horário de 7h20min às 8h03min foi realizada a apresentação da proposta aos alunos. E o pré-teste, no horário de 8h18min às 9h12min (Vale ressaltar que todos os alunos tentaram com muito empenho resolver as questões do pré-teste). Ambos os questionários tiveram participação de vinte alunos.

A seguir apresentaremos o resultado do questionário socioeconômico sobre o perfil dos discentes participantes do experimento.

4.1.1 Perfil dos Alunos

A fim da composição do perfil socioeconômico dos alunos e diagnosticar suas impressões acerca da resolução de questões envolvendo probabilidade, aplicamos um questionário à turma em seus 20 (vinte) alunos presentes. O instrumento estava dividido em duas partes. A primeira continha questões referentes a seu perfil social, econômico, familiar e estudantil. A segunda pretendia analisar a relação do aluno com a matemática e o assunto abordado.

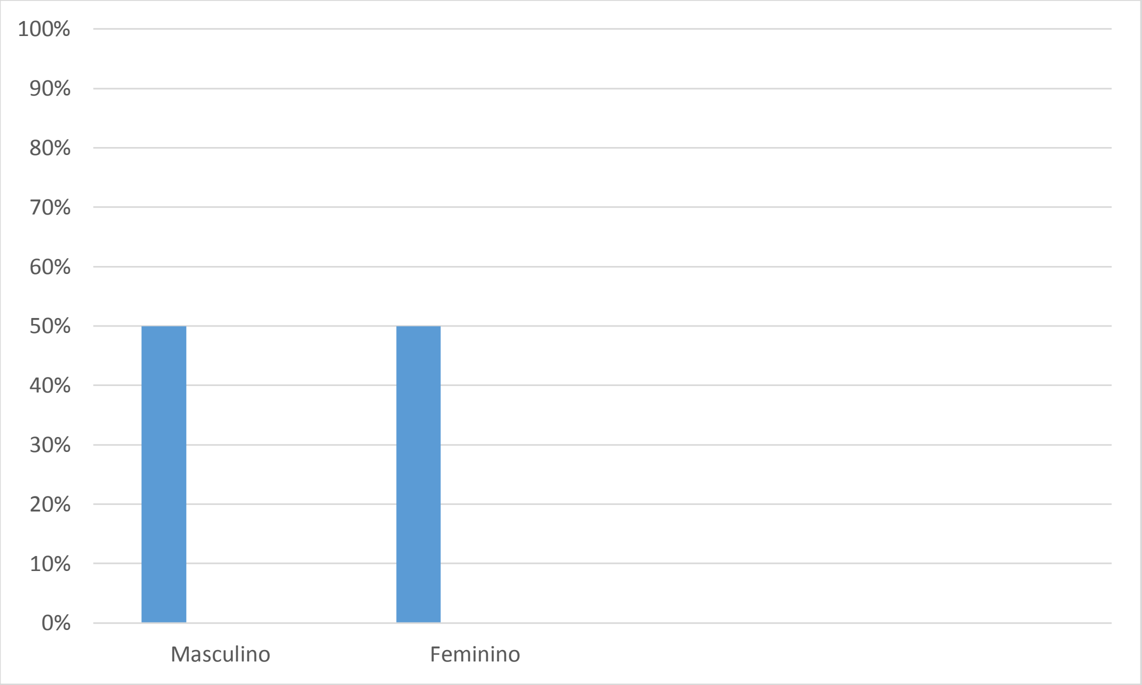
A seguir, apresentamos as informações coletadas neste questionário.

Quadro 19: Distribuição dos alunos por gênero

GÊNERO	NÚMERO DE ALUNOS	(%)
Masculino	10	50
Feminino	10	50

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Gráfico 15: Distribuição dos alunos por gênero



Fonte: pesquisa de campo (2017)

Não há diferença entre o número de alunos por gênero, pois, 50% dos alunos são do sexo masculino e 50% do sexo feminino. Na pesquisa de Corrêa (2016), a pesquisadora obteve sobre o perfil dos alunos do 2º ano do ensino médio de sua amostra que 53% (9 alunos) eram meninos e 47% (8 alunos) eram meninas. Sobre o gênero dos alunos do 1º ano do ensino médio participantes da amostra da pesquisa de Silva(2014) percebemos que a maioria dos alunos é do gênero feminino, representando 55%(11 alunos) e 45% (9 alunos eram do gênero masculino.

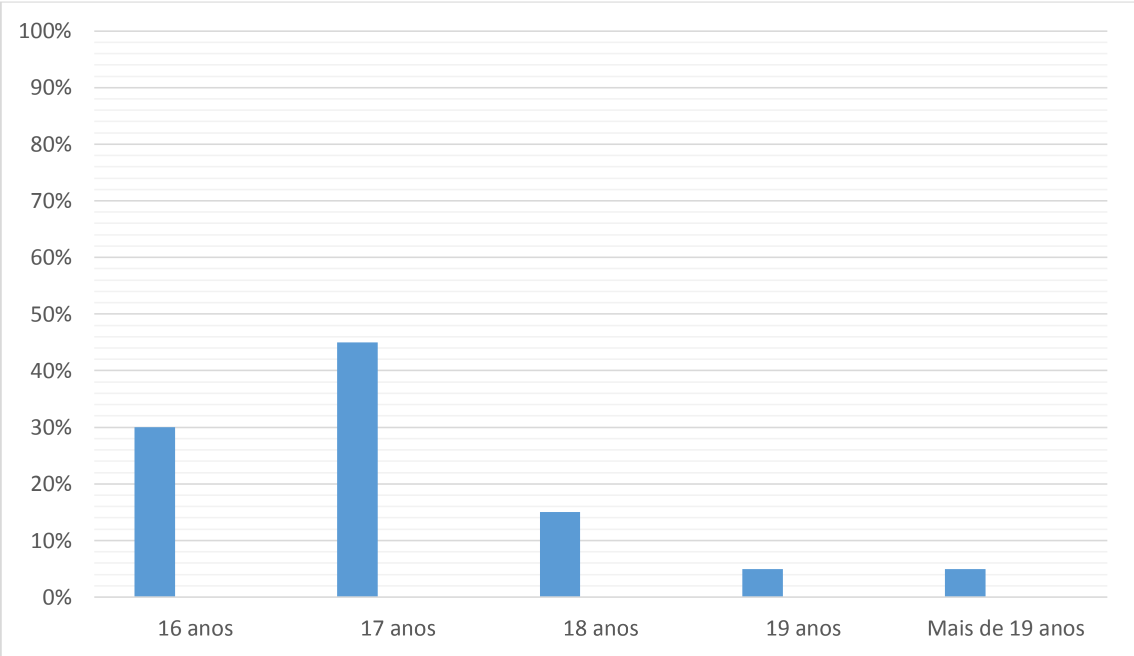
A seguir, veremos as idades desses alunos.

Quadro 20 - Distribuição dos alunos por idade

FAIXA ETÁRIA	NÚMERO DE ALUNOS	(%)
16 anos	06	30
17 anos	09	45
18 anos	03	15
19 anos	01	5
Mais de 19 anos	01	5

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Gráfico 16 - Distribuição dos alunos por idade



Fonte: pesquisa de campo (2017)

Em relação à faixa etária dos alunos, percebemos que, 30% possui 16 anos, seguido de 45% com 17 anos e 15% com 18 anos, ou seja, a maioria encontra-se dentro dos padrões de idade ideal recomendados pelo MEC para cursar o 2º ano do ensino médio (de 16 a 17 anos) como mostram a tabela e o gráfico acima. Em Corrêa (2016), em relação a idade dos alunos do 2º ano:

> [...] percebemos que a maioria, 41% possui 16 anos, seguido de 35% com 18 anos e 24% com 17 anos, ou seja, a maioria encontra-se dentro dos padrões de idade ideal recomendada pelo MEC para cursar o 2º ano do ensino médio (de 16 a 17 anos) [...]. (CORRÊA, 2016, p. 182).

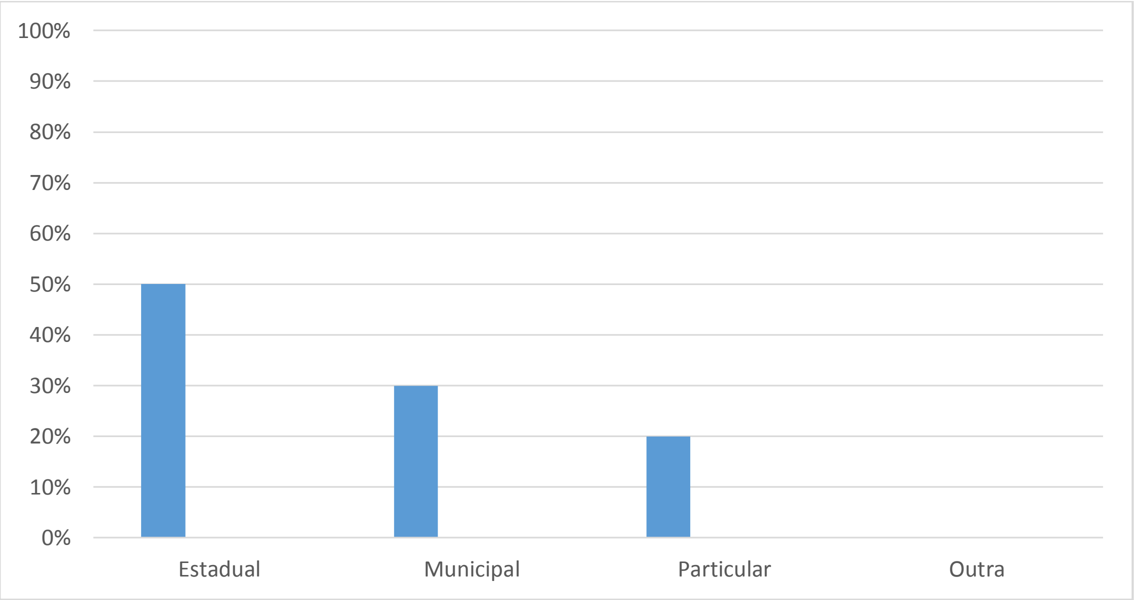
A seguir, veremos em que tipo de escola esses alunos estudaram.

Quadro 21:Tipo de escola que estudou o Ensino Fundamental

VOCÊ ESTUDOU O ENSINO FUNDAMENTAL EM QUE TIPO DE ESCOLA?	NÚMERO DE ALUNOS	PORCENTAGEM (%)
Estadual	10	50
Municipal	06	30
Particular	04	20
Outra. Qual?	0	0

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Gráfico 17 - Tipo de escola que estudou o Ensino Fundamental



Fonte: pesquisa de campo (2017)

Sobre o tipo de escola, 80% dos participantes da pesquisa informaram ter estudado e continuam estudando em escola pública e 20% em escola particular. Na pesquisa de Silva(2014), a maioria dos alunos de sua amostra, 80%(16 alunos) estudaram o seu ensino fundamental em escola pública estadual e 20 %(4 alunos) estudaram em escola pública municipal.

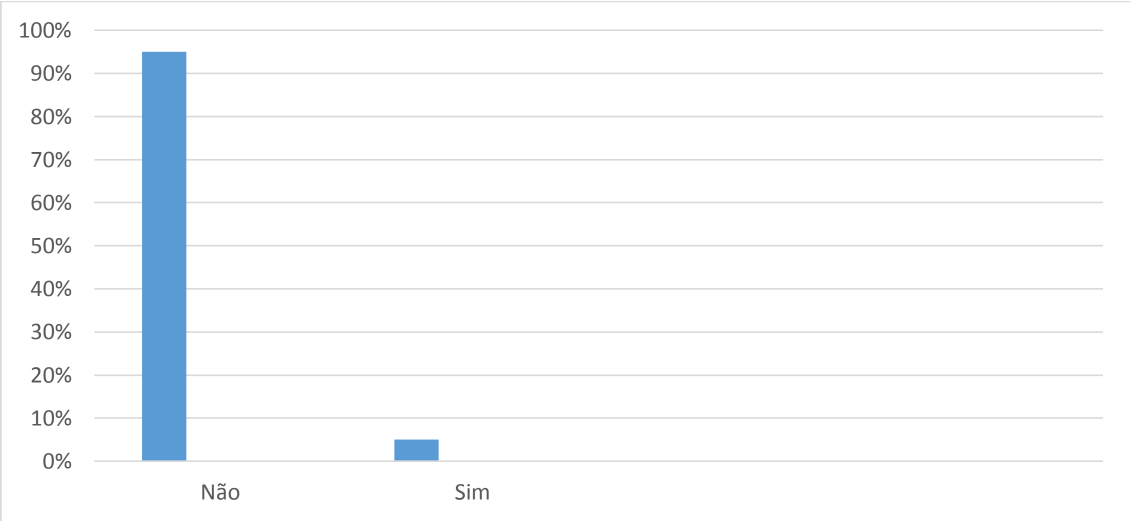
A seguir, o índice de repetência e dependência no 2º ano.

Quadro 22: Índice de repetência no 2º ano

VOCÊ É DEPENDENTE OU REPETENTE DESTA SÉRIE?	NÚMERO DE ALUNOS	PORCENTAGEM (%)
Não	19	95
Sim	01	5

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Gráfico 18 - Índice de repetência e dependência no 2º ano



Fonte: pesquisa de campo (2017)

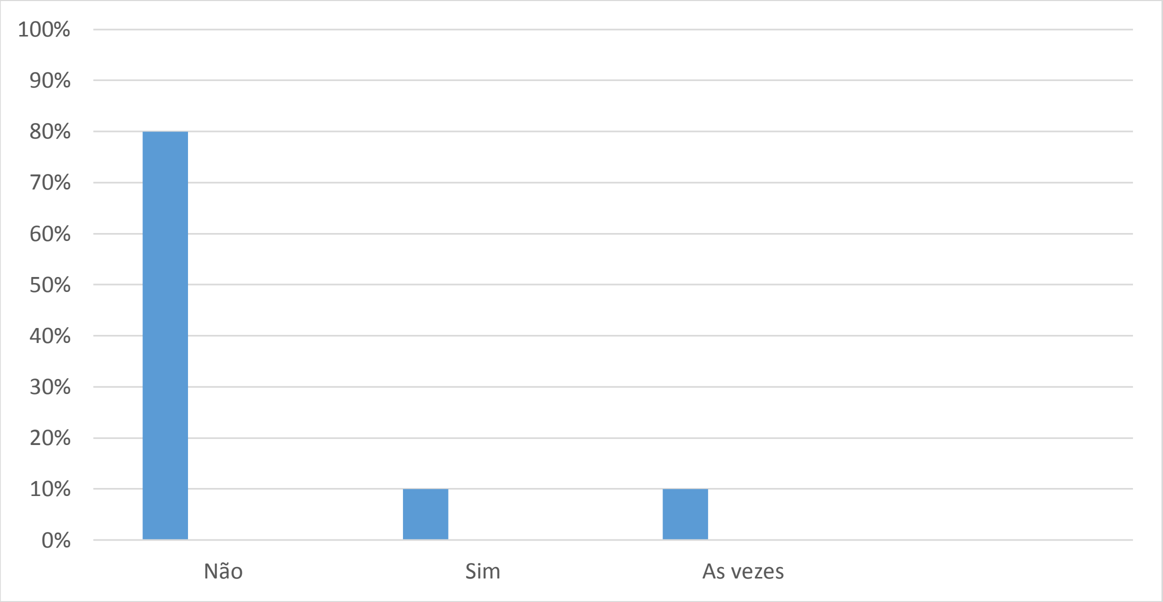
Pelas informações anteriores, constatamos que 5% dos alunos são repetentes ou dependentes do 2º ano, o que indica um número bem pequeno de alunos que não tiveram êxito nesta série em anos anteriores. Na pesquisa de Corrêa (2016), com alunos do 2º ano do ensino médio, 100%(17 alunos) estavam cursando a disciplina em situação normal. Investigamos também se os alunos trabalhavam de forma remunerada, os dados estão na tabela a seguir.

Quadro 23: Alunos que trabalham de forma remunerada

VOCÊ TRABALHA DE FORMA REMUNERADA?	NÚMERO DE ALUNOS	PORCENTAGEM (%)
Não	16	80
Sim	02	10
As vezes	02	10

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Gráfico 19 - Índice de alunos que trabalham de forma remunerada



Fonte: pesquisa de campo (2017)

Ao perguntarmos para os alunos, se os mesmos exerciam alguma atividade remunerada, percebemos que a maioria possui tempo reservado apenas para os estudos, pois 80% responderam não, 10% disseram às vezes e 10% afirmaram que trabalham. Na pesquisa de Corrêa (2016) sobre o exercício da atividade remunerada a pesquisadora detectou que:

> Ao perguntarmos para os alunos, se os mesmos exerciam alguma atividade remunerada, percebemos que a maioria possui tempo reservado apenas para os estudos, pois 59% responderam não, 29% disseram as vezes e 12% afirmaram que trabalham. (CORRÊA, 2016, p. 184)

Sobre as práticas remuneradas a pesquisa de Silva 2014) discorre, com base em seus dados, que: “a maioria dos alunos não exerce atividade remunerada, 60%, 20% exercem atividade remunerada e 20% as vezes exerce atividade remunerada”. (SILVA, 2014, p.130)

O resultado obtido em nossa pesquisa está de acordo com os resultados obtidos pela amostra da pesquisa de Corrêa (2016) e Silva (2014) que indicam que tanto os alunos do 2º ano quanto os do 1º ano do ensino médio participantes das pesquisas, em sua maioria, não exercem nenhuma atividade remunerada.

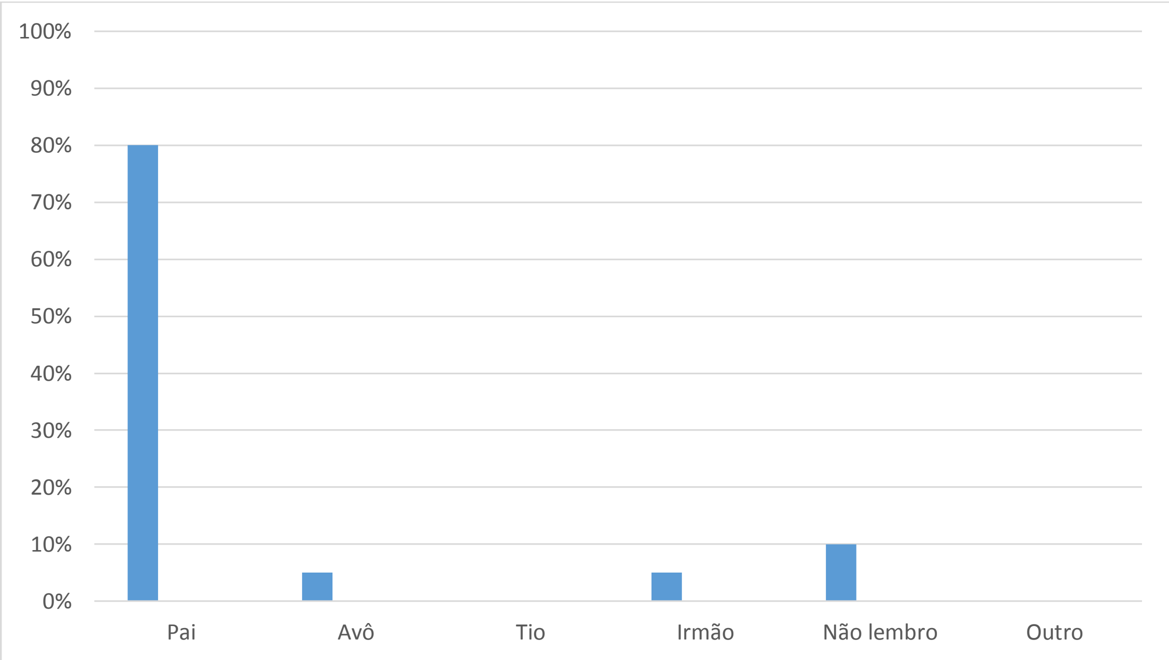
Indagamos aos discentes quem é seu responsável masculino, como mostram a tabela e o gráfico abaixo:

Quadro 24: Responsável masculino dos alunos

QUEM É O SEU RESPONSÁVEL MASCULINO?	NÚMERO DE ALUNOS	PORCENTAGEM (%)
Pai	16	80
Avô	01	5
Tio	0	0
Irmão	01	5
Não tenho	02	10
Outro	0	0

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Gráfico 20- Responsável masculino do aluno.



Fonte: pesquisa de campo (2017)

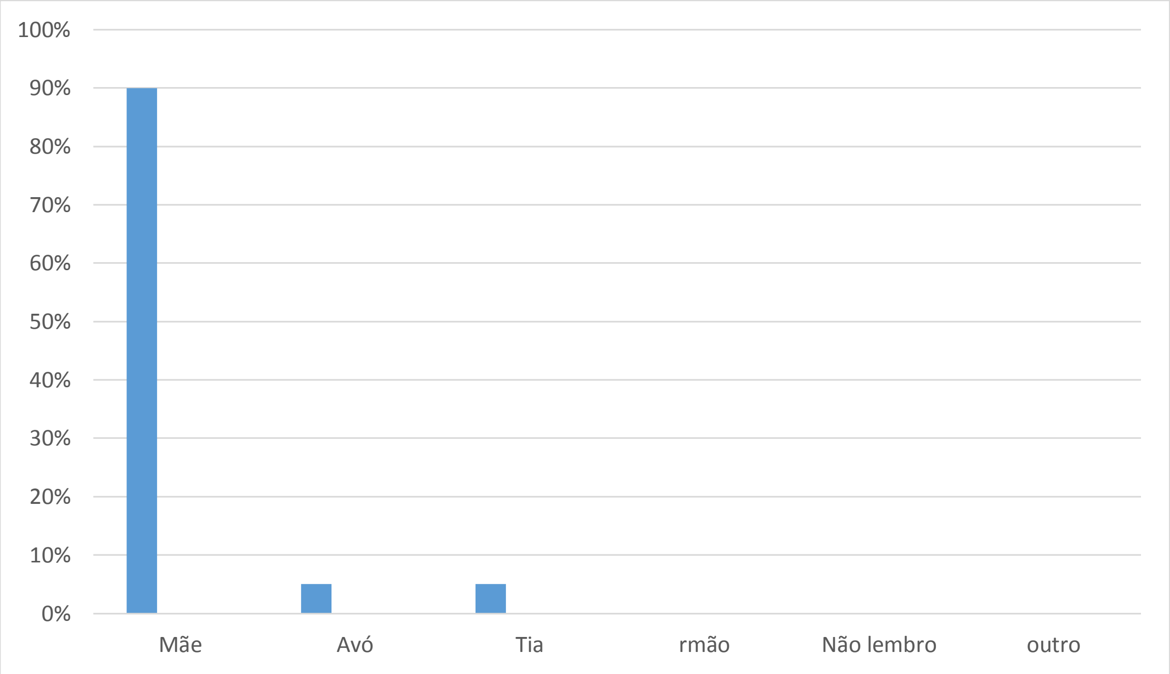
Com relação ao responsável masculino dos alunos, o pai possui papel fundamental, pois a maioria deles, 80% responderam pai e 5% disseram que é o avô, 5% o irmão e 10% disseram que não lembravam. De acordo com a pesquisa de Corrêa (2016), 88% responderam ser o pai e 6% disseram que é o padrasto e 6% disseram não ter responsável masculino. Quanto ao responsável feminino dos alunos:

Quadro 25- Responsável feminino do aluno

QUEM É O SEU RESPONSÁVEL FEMININO?	NÚMERO DE ALUNOS	PORCENTAGEM (%)
Mãe	18	90
Avó	01	5
Tia	01	5
Irmão	0	0
Não tenho	0	0
Outro	0	0

Fonte: pesquisa de campo (2017)

Gráfico 21- Responsável feminino do aluno



Fonte: pesquisa de campo (2017)

Quanto ao responsável feminino dos alunos, 90% responderam que é a mãe que exercem essa responsabilidade, ou seja, a mãe assume papel fundamental na educação dos filhos,5% a avó e 5% responderam a tia. Na pesquisa de Corrêa (2016), 100% (17alunos) responderam que é a mãe que exerce essa responsabilidade, convergindo com o resultado obtido em nossa pesquisa, como podemos perceber na Tabela 7 e no Gráfico 7 acima.

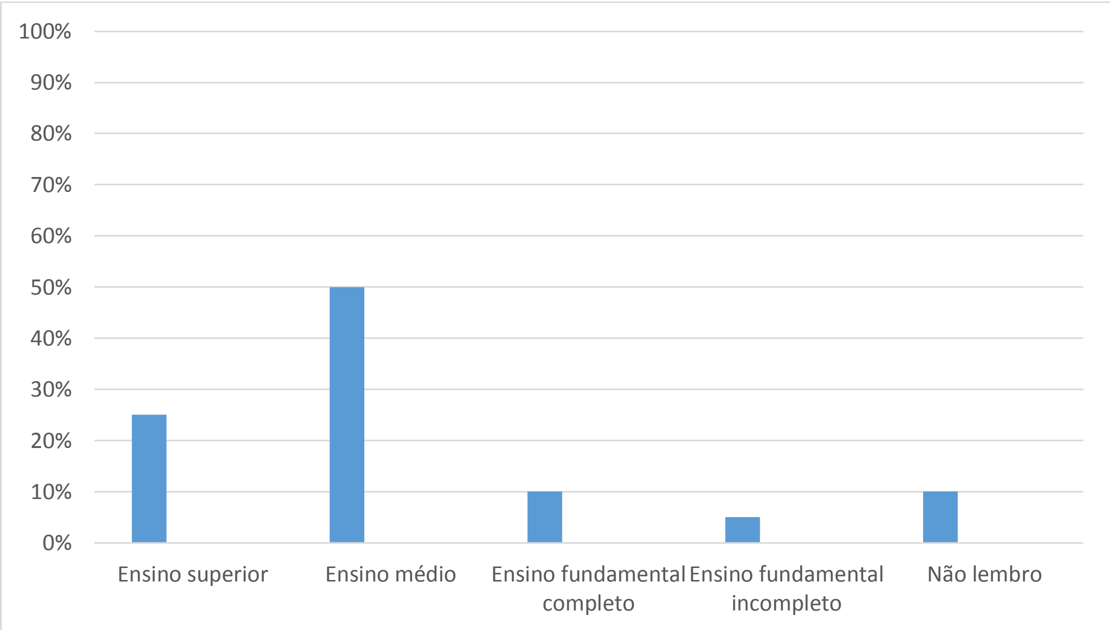
Quanto a escolaridade de seu responsável masculino, temos:

Quadro 26- Escolaridade do responsável masculino do aluno.

Qual a escolaridade de seu responsável masculino?	Número de Alunos	(%)
Ensino superior	05	25
Ensino médio	10	50
Ensino fundamental completo	02	10
Ensino fundamental incompleto	01	5
Não lembro	02	10

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 22- Escolaridade do responsável masculino do aluno.



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quando perguntamos sobre o grau de escolaridade do responsável masculino, percebemos que os responsáveis possuem ensino superior, metade deles possui ensino médio, pois 25% dos alunos responderam Ensino superior, 50% Ensino médio, 10% Ensino Fundamental Completo, 5% têm o Ensino Fundamental incompleto e 10% disseram que não lembravam da escolaridade de seu responsável masculino. Em Corrêa (2016), encontramos resultados não condizentes com os de nossa pesquisa, em relação ao grau de escolaridade do responsável masculino, pois:

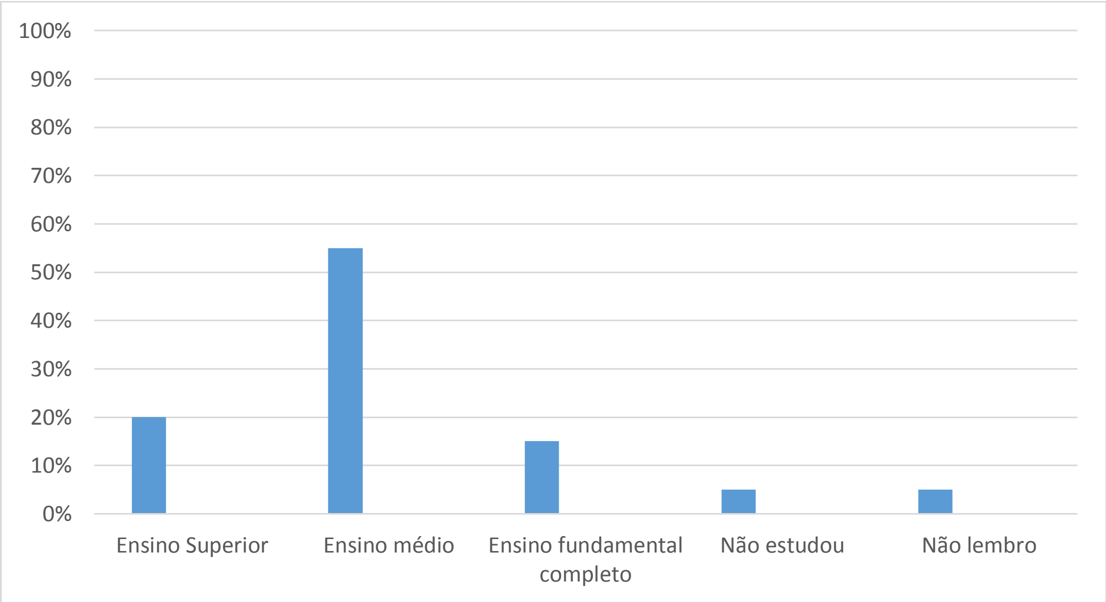
> [...] 29% dos alunos responderam Ensino Fundamental Maior Incompleto, 24% Ensino Fundamental Menor Incompleto ou o Ensino Fundamental Menor Completo, 11% têm o Ensino Fundamental Maior Completo e 6% disseram que não estudou ou concluíram o Ensino Médio. (CORREA, 2016, p.185-186)

Quadro 27- Escolaridade do responsável feminino do aluno.

QUAL A ESCOLARIDADE DE SEU RESPONSÁVEL FEMININO?	NÚMERO DE ALUNOS	(%)
Ensino Superior	04	20
Ensino médio	11	55
Ensino fundamental completo	03	15
Não estudou	01	5
Não lembro	01	5

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 23: Escolaridade do responsável feminino do aluno



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quanto à escolaridade do responsável feminino, mais da metade possui ensino médio, o que mostra que apesar da responsabilidade exercida tem interesse por uma formação, pois 55% afirmaram que concluíram o Ensino

Médio, 20% possuem Ensino Superior. Além disso, verificamos que 15% concluíram o Ensino Fundamental, 5% disseram que sua responsável não estudou e 5% opinaram por não lembrarem. Na pesquisa de Corrêa (2016), quanto à escolaridade do responsável feminino, têm-se que:

> [...] ao contrário do masculino, uma parcela possui ensino médio, o mostra que apesar da responsabilidade exercida tem interesse por uma formação, pois 29% afirmaram que concluíram o Ensino Médio. Além disso, verificamos que 23% não concluíram o Ensino Fundamental Maior, 18% disseram que possuem o Ensino Fundamental maior Completo ou o Ensino Fundamental Menor Completo e 6% opinaram por não estudou ou não concluiu o Ensino Fundamental Menor. (CORRÊA, 2016, p. 186)

.

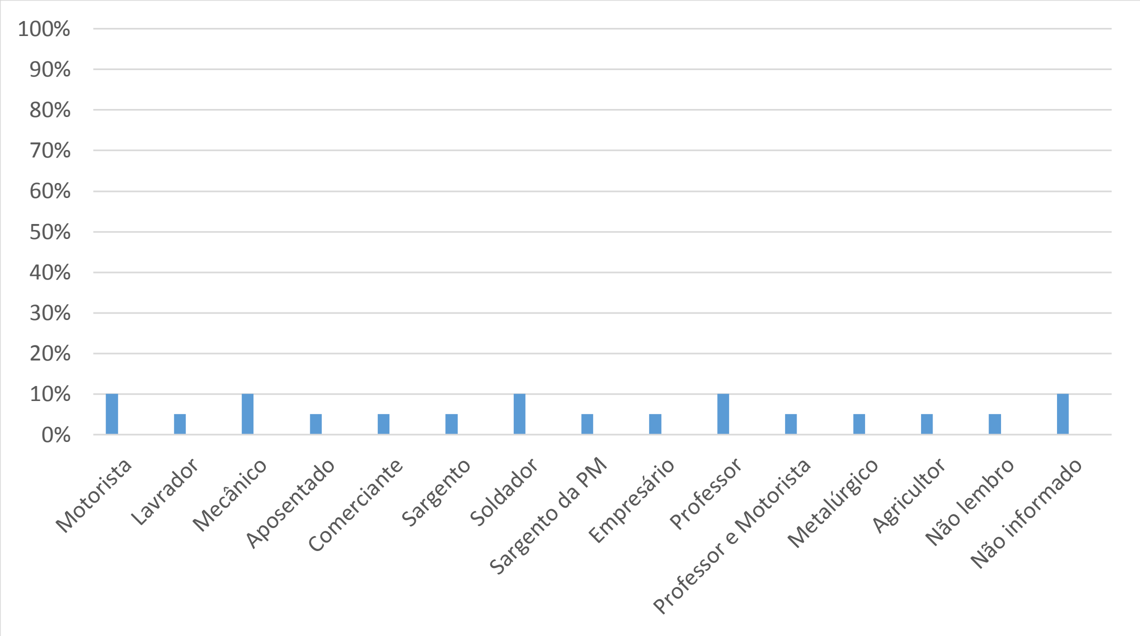
Quanto a profissão de seus responsáveis masculinos, como mostram a tabela e o gráfico abaixo:

Quadro 28- Profissão do responsável masculino.

QUAL A PROFISSÃO DE SEU RESPONSÁVEL MASCULINO?	NÚMERO DE ALUNOS	PORCENTAGEM (%)
Motorista	02	10
Lavrador	01	5
Mecânico	02	10
Aposentado	01	5
Comerciante	01	5
Sargento	01	5
Soldador	02	10
Sargento da PM	01	5
Empresário	01	5
Professor	02	10
Professor e Motorista	01	5
Metalúrgico	01	5
Agricultor	01	5
Não lembro	01	5
Não informado	02	10

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 24: Profissão do responsável masculino.



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Ao perguntarmos aos alunos se o seu responsável masculino exercia alguma profissão, analisamos que a grande maioria assume atividades econômicas diversificadas refletido em seus vários níveis de escolaridade, como mostram o quadro e o gráfico acima. Sobre a profissão dos responsáveis masculinos dos alunos do 2º ano da pesquisa de Corrêa (2016), a autora que utilizou os mesmos instrumentos metodológicos, temos:

> [...] analisamos que a grande maioria assume atividades por conta própria, o que pode está relacionado à formação que possuem, 28% responderam pescador, 18% peixeiro ou autônomo, 36% afirmaram assumir atividades diversas: carregador, montador de andaime, flanelinha, pedreiro e manipulador de alimentos (ambos com um percentual de 6% cada). (CORRÊA, 2016, p. 187)

Quanto a profissão do responsável feminino, temos:

Quadro 29- Profissão do responsável feminino.

(Continua)

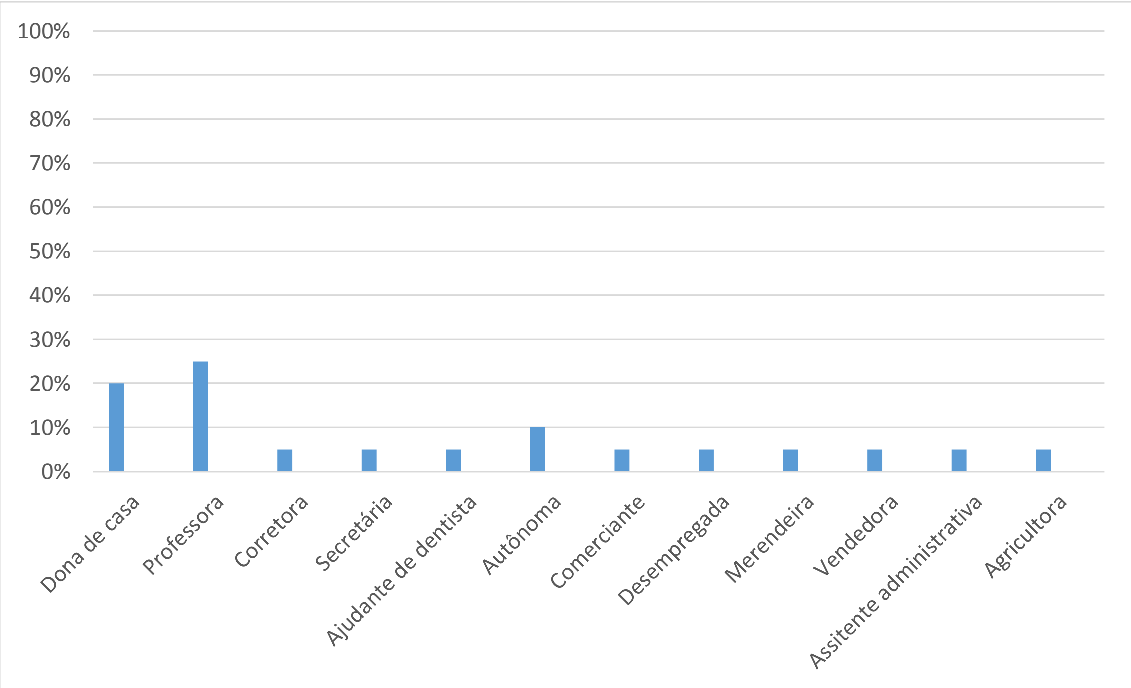
Qual a profissão de seu responsável feminino?	Número de Alunos	(%)
Dona de casa	04	20
Professora	05	25
Corretora	01	5
Secretária	01	5

(Conclusão)

Ajudante de dentista	01	5
Autônoma	02	10
Comerciante	01	5
Desempregada	01	5
Merendeira	01	5
Vendedora	01	5
Assistente administrativa	01	5
Agricultora	01	5

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 25: Profissão do responsável feminino



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Ao perguntarmos aos alunos se o seu responsável feminino exercia alguma profissão, analisamos que 20% são donas de casa, 25% são professoras e 55% assumem atividades econômicas diversificadas, como: corretora, secretária, ajudante de dentista, autônoma, comerciante, desempregada, merendeira, vendedora, assistente administrativa e agricultora. Na pesquisa de Corrêa (2016), temos que:

> [...] analisamos que mais da metade da parcela de mães dedica-se ao lar, cuidam da casa e da família, pois 53% dos alunos responderam doméstica, 17% empregada doméstica e 30% disseram que assumem atividades diversas: vendedora, serviços gerais, pescadora, professora

e autônoma (ambas com um percentual de 6% cada). (CORRÊA, 2016, p. 188)

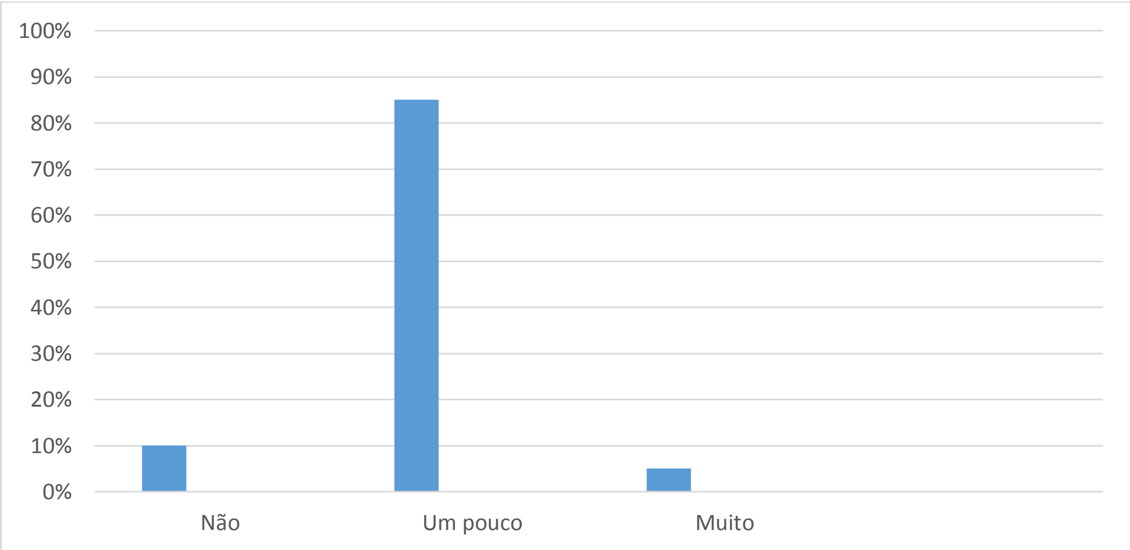
Quanto a dificuldade em aprender matemática, temos:

Quadro 30- Dificuldade em aprender matemática.

Você tem dificuldade em aprender matemática?	Número de Alunos	(%)
Não	02	10
Um pouco	17	85
Muito	01	5

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 26: Dificuldade em aprender matemática.



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quanto à disciplina matemática, a maioria dos alunos, 85% afirmaram que possuem um pouco de dificuldade em aprender os conteúdos matemáticos, 5% disseram apresentar muita dificuldade e 10% disseram que não a consideram difícil, ou seja, analisamos que grande percentual de alunos possuem alguma dificuldade em relação a aprendizagem matemática e que é preciso realizar um trabalho comprometido em mudar essa realidade, com novas metodologias de ensino. Na pesquisa de Silva (2014, p. 133), 55%(11 alunos) responderam ter um pouco de dificuldade, 20% (4 alunos) responderam muita dificuldade e 25%(5 alunos) disseram não ter dificuldade com a disciplina.

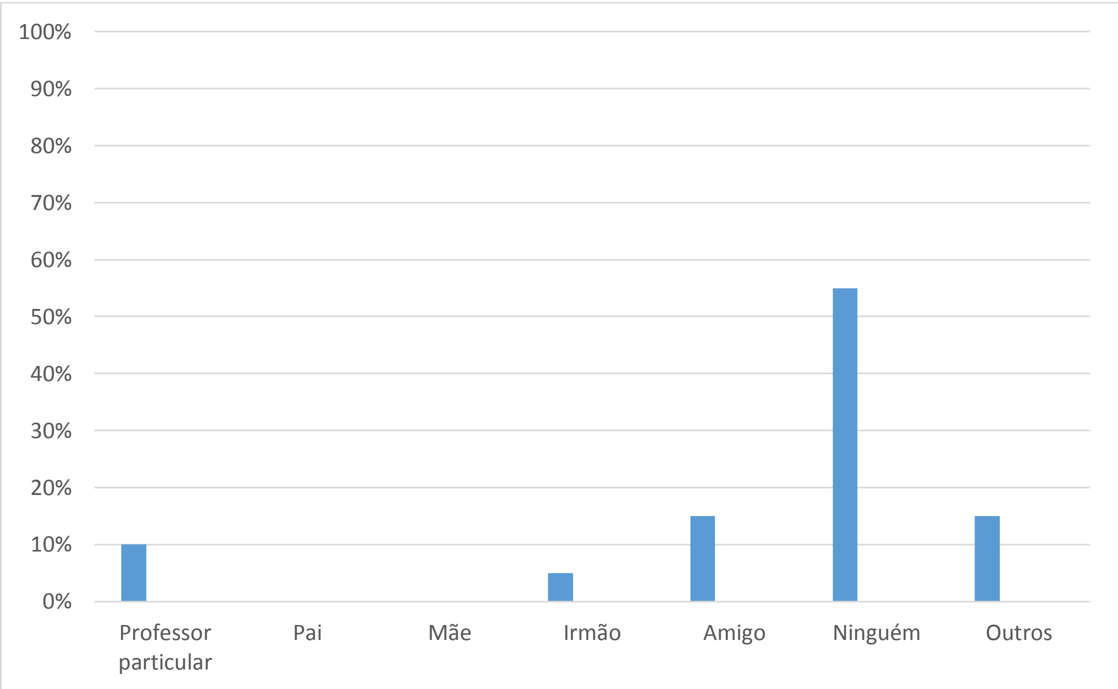
Perguntamos aos alunos quem os auxilia nas tarefas extraclasse de matemática, como mostram o quadro e gráfico abaixo:

Quadro 31- Quem ajuda o aluno em casa nas tarefas de matemática.

Quem o auxilia nas tarefas extraclasse de matemática?	Número de Alunos	(%)
Professor particular	02	10
Pai	0	0
Mãe	0	0
Irmão	01	5
Amigo(a)	03	15
Ninguém	11	55
Outros	03	15

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 27: Quem ajuda o aluno em casa nas tarefas de matemática.



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

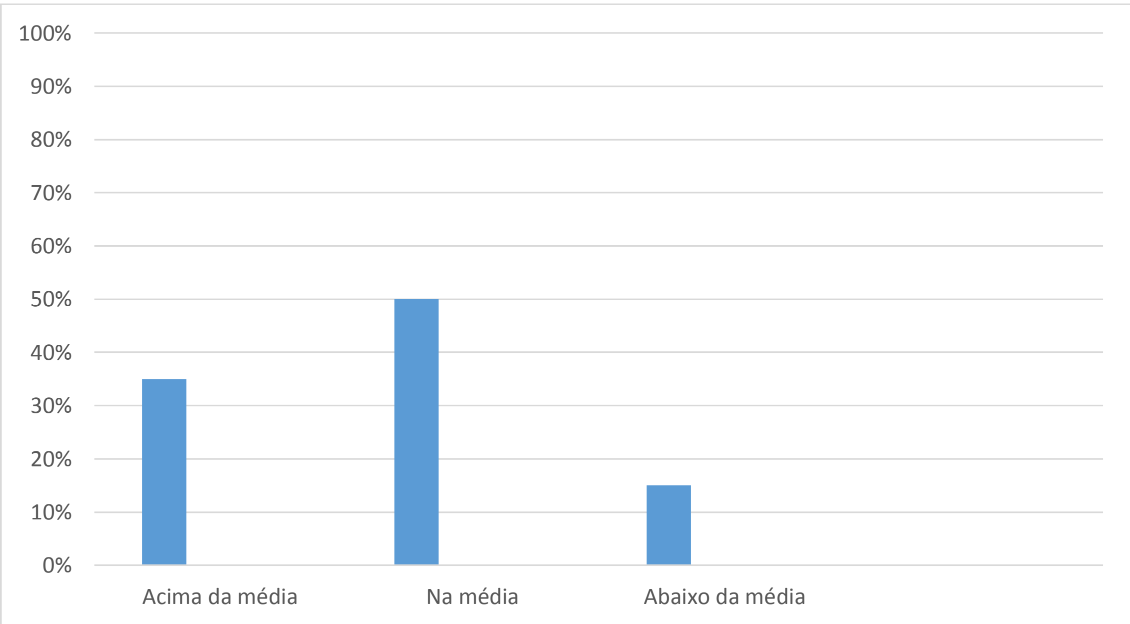
Ao perguntarmos quem ajuda o aluno nas tarefas de casa de matemática, obtivemos os seguintes percentuais: 55% afirmaram que ninguém ajuda, 15% responderam ser ajudados por amigos, 10% que quem ajuda é professor particular, 5% por irmão(a) e 15% opinaram por outros. Refletimos com isso que a maioria dos alunos pouco recebe incentivo para estudar em casa, o que pode ser um fator relevante em relação à aprendizagem matemática, de forma a ocasionar o baixo rendimento escolar. Na pesquisa de Silva (2014, p.134), 80%(14 alunos) responderam que não recebem auxílio nas tarefas extraclasse de matemática, e apenas 5%(1 aluno) respondeu receber auxílio de professor particular e 15%(3 alunos) eram auxiliados por irmão. Indagamos em relação as suas notas na disciplina matemática, como mostram a tabela e o gráfico abaixo:

Quadro 32- Nota do aluno em matemática.

Suas notas em matemática são?	Número de Alunos	Porcentagem (%)
Acima da média	07	35
Na média	10	50
Abaixo da média	03	15

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 28: Nota do aluno em matemática.



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Em relação à nota dos alunos na disciplina matemática, 35% afirmaram que geralmente tiram acima de 7,0, 50% igual a 7,0 e 15% abaixo de 7,0, ou seja, analisamos que há um número significativo de alunos que recebem em matemática uma boa pontuação nas provas, o que é um fator positivo que pode levar à aprovação da maioria dos alunos, no 2º ano do Ensino Médio. Em Corrêa (2016), com a amostra dos alunos do 2º ano que participaram de sua pesquisa obteve os seguintes resultados:

> Em relação à nota dos alunos na disciplina matemática, 53% afirmaram que geralmente tiram acima de 5,0, 35% igual a 5,0 e 12% abaixo de 5,0, ou seja, analisamos que não há um número significativo de alunos que recebem em matemática uma boa pontuação nas provas, o que é um fator preocupante que pode levar a reprovação de, no mínimo, metade dos alunos, no 2º ano do Ensino Médio. (CORREA, 2016, p. 194)

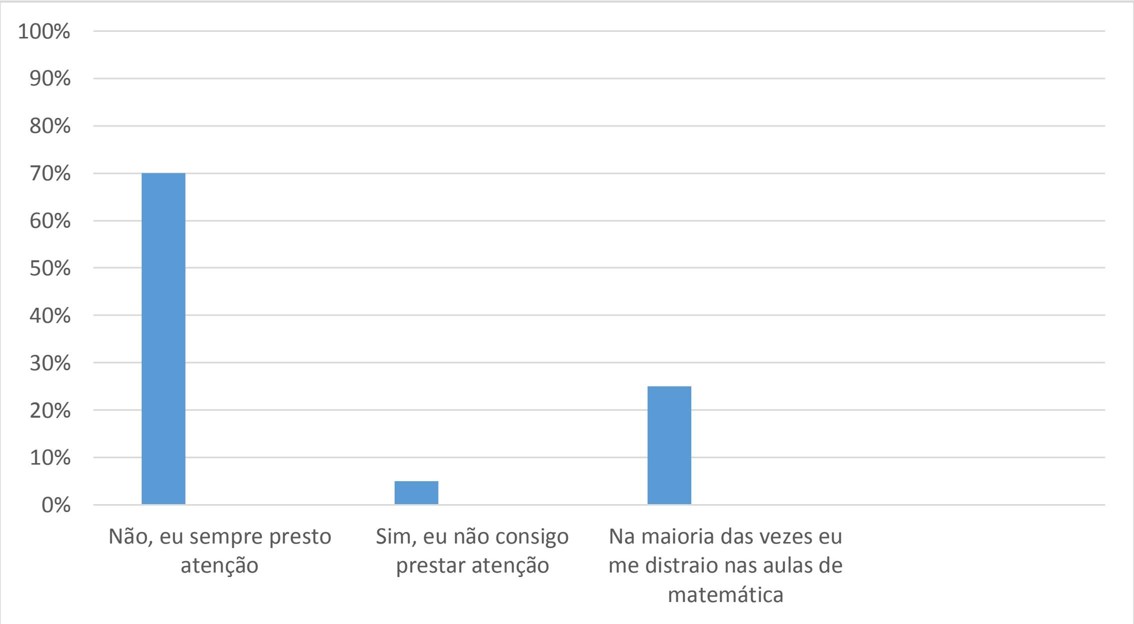
Quanto ao fator distração nas aulas de matemática, como mostram ao tabela e o gráfico abaixo:

Quadro 33- Distração nas aulas de matemática.

Você se distrai nas aulas de matemática?	Número de Alunos	(%)
Não, eu sempre presto atenção	14	70
Sim, eu não consigo prestar atenção	01	5
Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática	05	25

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 29: Distração nas aulas de matemática.



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quanto à pergunta “Você se distrai nas aulas de matemática?” 25% dos alunos afirmaram que se distraem na maioria das vezes, 5% disseram que sim e 70%, que não, ou seja, a maioria dos alunos dá total atenção ao ensino oferecido em sala de aula. Segundo Corrêa (2016), “70% dos alunos afirmaram que se distraem as vezes, 18% disseram que sim e apenas 12%, que não, ou seja, a maioria não dá total atenção ao ensino oferecido em sala de aula”. (COORÊA 2016, p.193)

Quanto a frequência extraclasse dada pelos discentes na disciplina matemática, como mostram ao tabela e o gráfico abaixo:

Quadro 34: Frequência extraclasse com que o aluno se dedica em matemática.

Você costuma estudar matemática fora da escola?	Número de Alunos	Porcentagem (%)
Só no período de prova	03	15
Só na véspera da prova	01	5
Só nos fins de semana	00	0
Todo dia	01	5
Alguns dias da semana	15	75

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 30: Frequência extraclasse com que o aluno se dedica em matemática

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Sobre a frequência com que o aluno se dedica aos estudos fora da sala de aula, 15% responderam só no período de prova, 5% afirmaram que estudam só na véspera da prova, 5% responderam que estudam todo dia, e a maioria, um percentual de 75%, disseram que estudam alguns dias da semana. Estes percentuais demonstram que uma boa parte dos alunos se dedica aos estudos dos conteúdos matemáticos fora da sala de aula, o que a nosso ver é necessário para alcançar uma aprendizagem satisfatória e alcançar boas notas em matemática.

4.1.2 Sobre a aplicação do pré-teste

No mesmo dia em que aplicamos o questionário socioeconômico, após os 20 alunos presentes responderem às perguntas do mesmo, demos continuidade com a aplicação do pré-teste.

Então, pedimos para fazerem a leitura de treze questões sobre probabilidade e se possível realizassem suas resoluções. Observamos que os alunos ficaram apreensivos, pois muitos diziam que não sabiam resolver as questões propostas, então dissemos que ficassem calmos e que se não soubessem realizar os cálculos poderiam deixar em branco, mas que primeiro deveriam tentar resolver.

Ao final do tempo proposto para resolver as questões sobre probabilidade, quando todos haviam concluído, encaminhamos uma autorização explicando aos mesmos que deveriam levar para seus pais assinarem um Termo de Consentimento Livro e Esclarecido(TCLE)

O pré-teste foi realizado em um tempo de 54 min e os dados obtidos serão apresentados e analisados na sessão 5 que consta da análise a posteriori e validação.

4.1.3 Aplicação da 1ª atividade de aprendizagem

A aplicação da 1º atividade de aprendizagem; teve duração de 52 minutos, de 9h18min às 9h50min, e participação de 20 (vinte) alunos. O objetivo desta atividade foi levar os alunos a descobrirem a diferença entre experimentos determinísticos e não-determinísticos.

Esta atividade era constituída de 10 (dez) questões, com situações envolvendo conceitos da física, envolvendo jogos (dados, baralhos, moedas, o resultado de uma partida de futebol), do efeito de um tratamento anticancerígeno, do gênero no nascimento de uma criança, da cor de uma bola retirada de uma urna, da previsão do tempo, etc. Constituída pelo conceito do determinismo de um evento, ou seja, em que é possível saber o resultado antes de ele ocorrer e, da aleatoriedade de um evento em que não é possível saber o resultado antes de ele ocorrer.

Os alunos deveriam responder sim ou não a cada uma das perguntas contidas na atividade. O objetivo dessa organização era levar os alunos a identificarem/perceberem a diferença existente de quando se trata de um evento aleatório e de um evento não aleatório para em seguida sistematizar estes conceitos.

Inicialmente entregamos uma cópia da atividade a cada aluno e orientamos para que fizessem uma leitura no título, no objetivo e no procedimento para preenchimento da tabela. Então, a sala ficou um pouco tumultuada, porque os alunos questionaram entre si alguns fatos do seu cotidiano, se esses fatos eram determinísticos ou aleatórios, um aluno teve dúvidas quanto ao naipe de um baralho, outro colocou como determinístico o fato de haver aula toda segunda-feira. Na questão envolvendo a previsão do tempo em nossa cidade, um aluno questionou que se for inverno as chances são maiores. As 9h50min o último aluno entregou a atividade.

O preenchimento da tabela foi um momento muito produtivo, porque a maioria dos alunos perceberam a diferença existente entre um evento aleatório e um evento determinístico, isto é, um evento em que é possível saber o resultado antes de ele ocorrer é denominado de evento determinístico e quando não é possível saber o resultado antes de ele ocorrer é denominado de evento aleatório.

4.2 Segunda seção de ensino

A segunda seção de ensino ocorreu no dia 10 de abril de 2017 com a aplicação da segunda atividade de aprendizagem; teve duração de uma hora e 45 minutos, de 8h05min às 9h50min, e participação de 25 (vinte e cinco) alunos. O objetivo desta aula foi levar os alunos a identificarem o conjunto dos resultados possíveis num experimento aleatório com situações envolvendo lançamentos de moedas, dados, retirada de bolas de uma urna, o gênero no nascimento de uma criança, e outros.

Esta atividade era constituída de 09 (nove) questões, com situações envolvendo lançamento de uma moeda, um dado, duas moedas, dois dados, um dado e uma moeda, retirada de uma bola de uma urna com 10 bolas verdes e 6 bolas pretas, a escolha de uma letra da palavra probabilidade, a sequência do gênero masculino ou feminino do nascimento de três crianças e a disposição de três pessoas que são colocadas em uma fila. Nesta atividade também estava contido as 05(cinco) questões propostas para que o estudante pudesse fixar o conceito de espaço amostral trabalhado inicialmente na atividade.

A maioria dos alunos interagiram, tentando fazer a atividade, perceberam logo o espaço amostral "cara" ou "coroa" do lançamento de uma moeda, {1,2,3,4,5,6} de um dado, mas tiveram dificuldades no espaço amostral do lançamento de duas moedas, de dois dados e também no lançamento de uma moeda e em seguida um dado, os alunos não perceberam o resultado como um par (moeda, dado). Para o lançamento de dois dados foi necessário criar uma tabela de dupla entrada no quadro para que os alunos pudessem "enxergar" os resultados possíveis, mas apenas montamos a tabela e os alunos preencheram em seguida. Foi mostrado que também é possível encontrar o conjunto dos resultados possíveis utilizando um diagrama de possibilidades.

De um modo geral, essa atividade foi muito produtiva, porque, além de ter possibilitado aos alunos construírem os espaços amostrais de variados experimentos os discentes puderam estender sua compreensão para além das situações contidas na primeira atividade. E a dificuldade surgida nas questões supracitadas certamente aumentou seu repertório de compreensão e resolução.

4.3 Terceira seção de ensino

A terceira seção de ensino do experimento ocorreu no dia 17 de abril de 2017 com o emprego da 3º atividade de aprendizagem contendo seis questões envolvendo situações de lançamentos de moedas, dados, retirada de uma bola de uma urna, lançamentos sucessivos de duas moedas, de dois dados, lançamento de uma moeda e um dado. A atividade teve duração de uma hora e trinta e cinco minutos, de 8h25min às 10h, e participação de 20 (vinte) alunos e seguiu o modelo da atividade anterior. O objetivo desta atividade foi identificar e representar subconjuntos.

Inicialmente orientamos os alunos para que lessem o objetivo da atividade. Dissemos, então, que procedessem conforme resolução da atividade anterior, para encontrar uma forma de identificar o evento desejado. Depois das primeiras resoluções perceberam as mesmas situações descobertas na atividade 2 e assim poucos alunos tiveram dificuldades em encontrar o espaço amostral. Enquanto aos subconjuntos só foi observado dificuldades nos alunos que não escreveram inicialmente o espaço amostral, aproveitamos a ocasião para ressaltar a importância de se identificar o espaço amostral como mecanismo facilitador na retirada dos eventos.

Uma questão dessa atividade chamou a atenção na resolução. Foi a questão do item “E” com enunciado —Lançar uma moeda normal e anotar o resultado, lançando em seguida um dado normal e anotar o resultado como um par (moeda, dado). Ela causou certa confusão por possuir falta de informação (anotar o resultado como um par ordenado (dado, moeda). Neste caso, alguns alunos acreditavam que era para achar os resultados que fossem par, levando-os a errarem a questão.

Motivamos os alunos a atentarem para a leitura cuidadosa do enunciado, pois se a questão estava falando de um lançamento de uma moeda e em seguida um dado o espaço amostral não poderia ser separado e sim um par ordenado. Usamos o diagrama de possibilidade para ilustrar o espaço amostral da questão, porém muitos alunos identificaram o espaço amostral sem o uso do diagrama.

De um modo geral, essa atividade foi muito produtiva, porque, além de ter possibilitado aos alunos o contato com situações abordadas em atividades anteriores, puderam estender sua compreensão sobre espaço amostral e compreenderem que a qualquer subconjunto de um espaço amostral de um experimento aleatório denominamos de evento.

4.4 Quarta seção de ensino

A quarta seção de ensino ocorreu no dia 24 de abril de 2017 com a aplicação da 4º atividade e 5ª atividade de aprendizagem; teve duração de duas horas e 52 minutos.

De 8h00min às 9h 37min aconteceu a atividade 4, intitulada Probabilidade Clássica que teve como objetivo conceituar a probabilidade de um evento. Fizemos uma síntese sobre os conceitos de espaço amostral e eventos estudados nas atividades anteriores que seriam utilizados na atividade 4 para calcular a probabilidade de um evento. Em seguida entregamos a folha de atividade para os alunos e pedimos para que os mesmos lessem com atenção e preenchessem o quadro com as perguntas.

A atividade era composta por 10 questões envolvendo variadas situações como: lançamento de um dado uma única vez, a retirada de bolas de uma urna com bolas brancas, pretas e amarelas, o lançamento de uma moeda e um dado e o lançamento de um dado duas vezes. As questões trabalhavam com o total de possibilidades e com as possibilidades de acontecimentos de um determinado evento ocorrer em seguida perguntava qual a razão entre o número de possibilidades do evento ocorrer pelo número total de possibilidades do evento.

De forma geral, os alunos conseguiram perceber sem dificuldades a probabilidade como uma razão entre os casos favoráveis para o acontecimento de um evento pelos casos possíveis deste evento. Contudo alguns alunos ainda mostraram dúvidas quanto ao termo par ordenado na construção do espaço amostral do lançamento sucessivo de um dado e uma moeda. Após as 10 questões da atividade explanamos junto com a turma a definição de probabilidade clássica.

Após a conceituação da probabilidade os alunos começaram a resolver 07 questões propostas a fim de fixarem o conceito de probabilidade, calculando probabilidade em várias questões do livro didático e também questões do Enem. Os alunos começaram a entregar as atividades as 9h10min. Alguns alunos tiveram dificuldades em efetuar as divisões e escrever na forma de números decimais. Encerramos a atividade 4 às 9h37min.

De 10h05min às 11h20min realizamos a 5ª atividade que se tratava do intervalo de variação da probabilidade. Teve a participação de 24 discentes, pedimos que fizessem a leitura do título e do objetivo da atividade e preenchessem o quadro que continham 06 questões em que os valores das probabilidades variavam de zero(0) até um(1). A finalidade desta atividade foi levar os alunos a percepção do intervalo de variação da probabilidade. No final da atividade os discentes deveriam registrar suas observações e conclusões a respeito da variação da probabilidade.

Desta forma, apresentamos a seguir algumas observações e conclusões dos alunos, desenvolvidas na atividade 5 sobre “Variação de probabilidade”.

ALUNOS	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ÁNALISE
A2 e A3, A10 e A14	Observação: A VARIAÇÃO Conclusão: É QUE A PROBABILIDADE DE UM EVENTO SEMPRE VARIA INTERVALO DE 0 ATÉ 1	Observação e conclusão válidas sobre a variação da probabilidade
A5 e A11	Observação: Os valores da probabilidade variam de 0 à 1 Conclusão: A probabilidade tende a aumentar em cada caso (de 0 à 1)	Observação e conclusão válidas sobre a variação da probabilidade
A6 e A8	Observação: A probabilidade variã. Conclusão: A probabilidade varia de 0 a 1.	Observação e conclusão válidas sobre a variação da probabilidade

A1 e A7	Observação: Observei que a ~~números~~ probabilidade estaS variando 0 a 1. NãS apresentando número negativo. Conclusão: Conclui que a probabilidade nãS fica ~~menor~~ menor que 0 e maior que 1.	Observação e conclusão válidas sobre a variação da probabilidade
A13, A15 e A16	Observação: Conclusão: A probabilidade de um evento sempre varia o no intervalo de 0 a 1	Conclusão válida sobre a variação da probabilidade
A17	Observação: OS RESULTADOS ESTÃO VARIANDO Conclusão:	Observação válida sobre a variação da probabilidade.
A4, A12, A18, A19 e A20	Observação: O resultado não vai ser menor que 0 e nem maior que 1 Conclusão: A probabilidade varia de 0 a 1	Observação e conclusão válida sobre a variação da probabilidade.

Quadro 35: Percentual das conclusões sobre o intervalo de variação da probabilidade

Conclusões	Número de alunos	%
Válidas	18	90
Inválidas	1	5
Ausentes	1	5

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Como podemos observar nas anotações dos alunos durante a Atividade 5, os mesmos conseguiram calcular os valores das probabilidades do evento impossível e do evento certo, o que possibilitou construírem conclusões válidas do intervalo de variação da probabilidade, de forma geral podemos afirmar que a atividade surtiu efeitos positivos na aprendizagem, que neste caso, objetivou definir o intervalo de variação da probabilidade, pois dos alunos participantes, apenas um aluno esteve ausente nesta atividade e somente o aluno A17 não construiu uma conclusão para o intervalo de variação da probabilidade. Como podemos observar no quadro síntese das conclusões acima 90% dos participantes registram conclusões válidas referente ao intervalo de variação da probabilidade.

4.5 Quinta seção de ensino

No dia 08/ 05/ 2017 realizamos o 5º dia do experimento, além das aulas de matemática, aproveitamos os três últimos horários pois os alunos estavam em fase de transição de professor de uma disciplina técnica e neste dia a manhã toda estava liberada para as nossas atividades.

Neste dia, por volta as 8h05min, com 25 alunos presentes, iniciamos a 6ª atividade, intitulada “Eventos complementares”, que teve como objetivo, levar os alunos a relacionarem o conceito de eventos complementares com a união e a interseção de dois eventos. A finalidade da atividade foi trabalhar o conceito de eventos complementares.

A atividade era composta por 10 questões, sendo 5 de eventos complementares e 05 de eventos não complementares e no final da atividade estava contida a definição: quando dois eventos são complementares a interseção entre eles é vazia e a união deles é o espaço amostral. Para finalizar a atividade perguntávamos quais os pares de eventos das questões do quadro eram complementares. Apesar de alguns alunos apresentarem dúvidas quanto as propriedades da união e da interseção de conjuntos e suas simbologias, eles conseguiram perceber no quadro os pares de eventos complementares, o que mostrou um bom entendimento por parte dos discentes quanto a finalidade da atividade. As 8h35min alguns discentes já haviam terminado a atividade, sendo que às 9h05min concluímos a atividade 6.

A 7ª atividade iniciou às 9h08min, com o título “Eventos complementares”, com o objetivo de descobrir uma expressão para a probabilidade de dois eventos complementares, de imediato os alunos perceberam que os eventos eram os mesmos da atividade 6, a maioria dos alunos já conseguia diferenciar os eventos complementares dos eventos não complementares.

De acordo com as anotações dos alunos durante a Atividade 7, os mesmos conseguiram calcular os valores das probabilidades do evento impossível e do evento certo, o que possibilitou construírem conclusões válidas da expressão para se calcular a probabilidade de dois eventos complementares, de forma geral podemos afirmar que a atividade surtiu efeitos positivos na aprendizagem, que neste caso, objetivou descobrir a expressão matemática $P(A) + P(B) = 1$ para a probabilidade de dois eventos complementares, pois dos 20 alunos participantes, apenas os alunos A1, A11 e A8 não registraram a observação e conclusão sobre os eventos complementares e nem a expressão matemática em questão.

Alguns alunos começaram a entregar a atividade 7 às 9h30min, porém somente as 9h45min encerramos a atividade quando todos haviam concluído. Houve um intervalo de 20 min e ás 10h20min os discentes começaram a resolver 05 questões propostas para fixarem os conceitos estudados nas atividades 6 e 7, houveram bastante dificuldades quanto a resolução das questões, mas aos poucos elas foram sendo superadas com a dedicação dos estudantes e nossas orientações quanto ao uso dos conceito e da expressão para calcular a probabilidade de eventos complementares. A atividade 7 encerrou às 11h25min.

As 11h35min iniciamos a 8ª atividade, com o título “Probabilidade do evento complementar”, com o objetivo de descobrir uma expressão para calcular a probabilidade da união de dois evento complementares. Nesta atividade utilizamos somente 05 questões para que os discentes preenchessem o quadro com suas respectivas probabilidades dos eventos desejados.

Ao observarmos os dados preenchidos pelos alunos, verificamos que o cálculo das probabilidades dos eventos A e B foram efetuados pelos mesmos de forma correta. Ao final, os discentes anotaram suas observações e conclusões sobre a atividade realizada, vale ressaltar que todos os alunos estavam se esforçando para fazer as atividades. Notamos que conceitos referentes as atividades anteriores já estavam sendo tratados sem dificuldades pelos discentes como: espaço amostral, eventos e cálculo de probabilidades, ou seja, os conceitos iniciais de probabilidade. Vejamos suas observações e conclusões.

ALUNO	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ÁNALISE
A1, A4, A19	Observação: Todos os eventos são complementares pois o conjunto A e B e igual a 1 Conclusão: B conjunto e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$	Conclusão válida sobre a expressão matemática.
A15, A20 e A11	Observação: Todos os eventos são complementares Conclusão: Pode-se concluir que $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$	Observação e conclusão válidas sobre os eventos complementares.
A16 e A18	Observação: todos os eventos são Complementares Conclusão: Podemos concluir que para Calcular a probabilidade de união dos dois eventos usa-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$	Observação e conclusão válidas sobre os eventos complementares.
A12	Observação: Tanto a união quanto a soma do conjunto A com o conjunto B é igual a um, ~~[illegible]~~ pois esses eventos são complementares. Conclusão: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	Conclusão válida sobre a expressão matemática.
A10	Observação: Porque todos os eventos são complementares. Conclusão: Para achar o evento temos que fazer a soma das probabilidades.	Observação e conclusão válidas para a probabilidade da união de dois eventos complementares.

A17 e A14	Observação: Todos são Complementares Conclusão: Portanto a soma da probabilidade de A mais a probabilidade de B é igual ao valor da união	Observação e conclusão válidas para a probabilidade da união de dois eventos complementares.
A2 e A9	Observação: Observei que tos os espaços amostrais ~~eventos~~ são complementares. Conclusão: ~~Eu~~ concluí que para chegar ao resultado da união dos eventos, devemos somar as suas probabilidades, que vai da um	Observação e conclusão válidas para a probabilidade da união de dois eventos complementares.
A6 e A7	Observação: Conclusão: O resultado da união dos eventos sempre será 1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$	Conclusão válida para a probabilidade da união de dois eventos complementares. Não registrou observação
A8	Observação: A união dos eventos sempre dá 1. Conclusão:	Observação inválida os eventos complementares. Não registrou conclusão.

A13	Observação: São todos complementares Conclusão: A soma da probabilidade A + B = união	Conclusão inválida sobre a probabilidade da união de dois eventos complementares.

Quadro 36: Percentual das conclusões sobre a probabilidade da união de dois eventos complementares

Conclusões	Número de alunos	%
Válidas	16	80
Inválidas	2	10
Ausentes	2	10

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Dos participantes presentes nesta atividade, apenas os alunos A8, e A13 não concluíram de forma válida a expressão para a probabilidade da união de dois eventos complementares, o que nos leva a inferir que a partir da atividade proposta, conseguimos fazer com que os alunos compreendessem o conteúdo da aula, observamos que os alunos apresentavam suas observações e conclusões de forma satisfatória, pois notamos que estavam compreendendo o objetivo da atividade, a partir de suas anotações no roteiro da atividade. Como podemos observar no quadro síntese das conclusões acima 80% dos participantes registraram conclusões válidas sobre a probabilidade da união de dois eventos complementares.

Às 11h52min alguns alunos começaram a entregar as atividades e logo em seguida começaram a resolver as questões propostas, sem grandes dificuldades. Os primeiros alunos começaram a entregar as questões propostas as 12h15min. Os discentes concluíram ás questões as 12h35min.

Finalizamos a Atividade 8 gradecendo a turma o empenho e a participação nas realizações das atividades realizadas naquela manhã e nas anteriores e ressaltamos que nosso objetivo era sempre buscar melhores “caminhos” para o aprendizado deles em probabilidade.

4.6 Sexta seção de ensino

O 6º dia de experimento didático ocorreu em 15/ 05/ 2017, onde neste dia apresentamos a 9ª atividade, intitulada “Probabilidade de eventos não disjuntos (não complementares)”, com o objetivo de descobrir uma expressão para a probabilidade da união de dois eventos não disjuntos. Esta aula teve início às 8:10h e finalizou às 9:47h, inicialmente os alunos foram orientados para a leitura e o preenchimento da atividade e em seguida para resolução de 07 questões propostas retiradas de livros didáticos e provas do Enem.

Alguns alunos tiveram dificuldades em perceber a expressão para o cálculo da probabilidade da união de dois eventos não complementares. Porém, às 8h50min começaram a entregar as atividades preenchidas. Após todos terem concluído a atividade 9, mostramos a diferença entre a probabilidade de eventos complementares e de eventos não complementares.

Às 9h00min os discentes começaram a fazer as questões propostas, surgiram algumas dúvidas como a de escolher os números pares e os números múltiplos e na retirada dos elementos comuns para o cálculo da probabilidade dos eventos não complementares, assim como na resolução de questões que envolviam operações de união e interseção de dois ou três conjuntos. Os alunos começaram a entregar as questões propostas as 9h47min, sendo que às 10h00min concluíram a atividade 9.

Ao observarmos os dados preenchidos pelos alunos, verificamos que o cálculo das probabilidades do eventos A, do evento B, $A \cap B$ e AUB foram efetuados pelos mesmos de forma correta. Ao final, os discentes anotaram suas observações e conclusões sobre a atividade realizada, como podemos averiguar seguir:

ALUNO	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ÁNALISE
A5, A11, A13 e A20	Observação: Nos eventos não complementares a união não vai dar um, e a interseção não vai dar 0 Conclusão: $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$	Observação e conclusão válidas sobre os eventos não complementares
A6 e A17	Observação: OS EVENTOS NÃO SÃO COMPLEMENTARES Conclusão: $P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A\cup B$	Observação e conclusão válidas sobre os eventos não complementares
A15 e A9	Observação: Estes eventos não são complementares, pois $(A\cap B)$ não é igual a zero e $A\cup B$ não é o espaço amostral Conclusão: A soma de A e B = [illegible] em todos os eventos não complementares.	Conclusão inválida sobre a probabilidade da união de dois eventos não complementares.
A10	Observação: Que a sua intersesão não vai ser igual a zero e sua união não é o espaço amostral Conclusão: A soma da probabilidade de A mais a probabilidade de B menos a interceção de A com B é igual a união de A com B.	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade da união de dois eventos não complementares.

A16, A19 e A14	Observação: Que quando a interceção não é vazia eles não são dijuntos Conclusão: Portanto a expreção que melhor expressa é $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade da união de dois eventos não complementares.
A1 e A18	Observação: Os eventos não são complementares, pois não contém eventos vazios Conclusão: $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$	Conclusão válida sobre a probabilidade da união de dois eventos não complementares.
A12	Observação: A soma das probabilidades de dois eventos, menos sua interseção, é igual à sua união. Conclusão: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade de dois eventos não complementares.
A3	Observação: Os eventos não são complementares e a união do $A \cup B$ e vazia Conclusão: Concluimos que para encontrar $P(A \cup B)$ tem que ser a soma de $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Observação inválida sobre os eventos não complementares. Conclusão válida.
A2	Observação: Para cada união a um resultado Conclusão: Para cada evento do espaço amostral temos um resultad	Observação e conclusão inválidas sobre dos eventos não complementares.

Quadro 37: Percentual das conclusões sobre a probabilidade da união de dois eventos não complementares

Conclusões	Número de alunos	%
Válidas	14	70
Inválidas	3	15
Não registraram	2	10
Ausentes	1	5

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Dos participantes presentes, os alunos A15, A9 e A2 não concluíram de forma válida a expressão, além dos alunos A1 e A18 e A3 não registraram suas observações satisfatórias sobre o conceito de dois eventos não complementares e, ainda, os alunos A4 e A8 não apresentaram nenhum registro em suas atividades, que nos leva a inferir que a partir da atividade proposta, conseguimos fazer com que a maioria dos alunos compreendessem o conteúdo da aula. Como podemos observar no quadro acima, 70% dos participantes registraram conclusões válidas sobre a probabilidade da união de dois eventos não complementares.

4.7 Sétima seção de ensino

O 7º dia do experimento foi 22/ 05/ 2017, em que desenvolvemos a 10ª atividade, intitulada "Probabilidade condicional", iniciamos a mesma as 8h09min. Esta aula teve como finalidade descobrir uma expressão para o cálculo de probabilidade de ocorrer um evento, sabendo da ocorrência de um outro evento antecipadamente, para tanto utilizamos como materiais o roteiro da atividade composta por 06 questões para que os discentes pudessem perceber do que se tratava a probabilidade condicional e como poderia se calcular esta probabilidade e deduzir sua expressão matemática.

Primeiramente, os alunos, de posse do quadro com as questões e tendo por base os valores das probabilidades do evento A, do evento B e do evento $A \cap B$, deveriam calcular $P(B/A)$, ou seja a probabilidade condicional de *A* tendo ocorrido o evento B, relacionando o valor da $P(B/A)$ obtido pela divisão da interseção de *A* com *B (A∩B)* com o evento A.

De maneira geral, observamos que os discentes compreenderam a probabilidade condicional como o quociente desejado e, que entenderam que na probabilidade condicional o espaço amostral depende da ocorrência antecipada de um dos ventos. Percebemos as dificuldades dos alunos em preencher a primeira questão da atividade, então para sanar esta dificuldade, preenchemos junto com os alunos no quadro esta questão e, em seguida, os discentes deram continuidade pois haviam entendido o procedimento.

As 8h43min os estudantes começaram a entregar as atividades e às 9h10min finalizou-se a atividade 10. Neste momento fizemos junto com os discentes a conclusão da atividade, na qual explicamos que na probabilidade condicional a probabilidade do evento desejado depende da informação dada a priori e, que pode-se calcular a probabilidade tanto pela fórmula quanto pela “redução” do espaço amostral. Vejamos a seguir, suas observações e conclusões:

ALUNO	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ÁNALISE
A1, A3, A8, A9 A12 e A18	Observação: Que a probabilidade do evento B tendo ocorrido o evento A, é igual a ~~intersecção~~ interseção sobre o evento A. Conclusão: $P(B/A) = P(A \cap B)/P(A)$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade condicional.
A11 e A13	Observação: A probabilidade do espaço condicional é dividida por B Conclusão: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ou $P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$	Observação inválida sobre a probabilidade condicional. Conclusão válida.
A20	Observação: O espaço amostral da probabilidade condicional é a possibilidade de A ou a de B. Conclusão: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ou $P(A/B) - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade condicional.
A4, A6 e A17	Observação: observamos que o evento P(B/A) e o probabilidade do evento B ocorrer dentro de A. Conclusão: Concluimos que o evento $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade condicional.
A10	Observação: Que a probabilidade condicional de A/B é igual a soma dos eventos A e B. Conclusão: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	Observação inválida sobre probabilidade condicional. Conclusão válida.

A14, A15 e A19	Observação: Depende de uma informação Conclusão: Portanto a expressão é $P(B/A) = P(A \cap B) \div P(A)$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade condicional.
A2	Observação: Probabilidade de s é igual a probabilidade de B sabendo que ocorreu as duas probabilidade de A = B Conclusão: temos um novo espaço amostral $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $P(A \cap B) \leq P(A)$ $P(A \cap B) \leq P(B)$	Observação inválida sobre a probabilidade condicional. Conclusão válida.
A5	Observação: A probabilidade $p(B/A)$ é o resultado do evento B tendo ocorrido ao mesmo tempo o evento A.	Observação inválida sobre a probabilidade condicional, não registrou conclusão.
A16	Observação: ~~Probabilidade e condicionado ao evento~~ Probabilidade do evento B e condicionada ao evento A Conclusão: $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade condicional.
A7	Conclusão: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	Conclusão válida sobre a probabilidade condicional, não registrou observação.

Quadro 38: Percentual das conclusões sobre a probabilidade condicional

Conclusões	Número de alunos	%
Válidas	19	95
Inválidas	1	5
Ausentes	0	0

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Como podemos averiguar nas observações e conclusões elaboradas pelos participantes, 95% registraram conclusões válidas sobre a expressão para se calcular a probabilidade condicional, apenas o aluno A5 não registrou observação e nem conclusão satisfatória sobre a probabilidade condicional.

Às 9h12min os alunos começaram a resolver as questões propostas, num total de 06 questões. As soluções apresentadas foram no geral, por meio da “redução” do espaço amostral determinado pelos alunos interpretando o comando da questão, geralmente apresentado por frases do tipo: “sabendo que ocorreu”, “dado que ocorreu”, “se o resultado obtido for” contidos nas questões. Mostrando-nos que os estudantes entenderam que a probabilidade condicional de B, dado que ocorreu o evento A, é influenciado pelo resultado do evento que ocorreu antecipadamente.

Os discentes sentiram, inicialmente, bastante dificuldade em identificar o espaço amostral reduzido para calcular a probabilidade condicional, mas conseguiram resolver as questões de forma satisfatória. Somente uma aluna não conseguiu resolver todas as questões. Contudo, na última questão os participantes apresentaram dificuldade na interpretação do enunciado de uma questão retirada de uma prova do Enem sobre peças defeituosas e não defeituosas, esta, utilizava um termo não usual nos livros didáticos “constata-se que é defeituosa” o que pode ter levado os alunos a uma interpretação incorreta da questão. Às 9h37min começaram a entregar as atividades propostas. A atividade terminou ás 9h55min.

4.8 Oitava seção de ensino

O 8º dia do experimento foi 25/ 05/ 2017, em que desenvolvemos a 11ª atividade, intitulada “Conceituar eventos independentes”. Iniciamos a mesma as 8h10min. Esta aula teve como finalidade descobrir quando dois eventos são independentes, tendo por base a probabilidade condicional estudada anteriormente, levando os alunos a perceberem que dois eventos são independentes quando o acontecimento antecipado de um deles não modificar a probabilidade do outro evento, para tanto utilizamos como materiais o roteiro da atividade composta por 05 questões para que os discentes pudessem perceber que a probabilidade P(B) e a P(B/A) são iguais e também que a probabilidade P(A) é igual a probabilidade P(A/B) e concluírem que os eventos são independentes.

Acreditamos que nesta atividade fomos infelizes nas elaborações das situações envolvidas em cada uma das questões, pois envolviam um espaço amostral muito grande para que os discentes pudessem retirar os eventos desejados e suas probabilidades. Com isso a atividade ficou muito dispendiosa e cansativa, contudo a maioria dos estudantes compreenderam quando dois eventos são independentes.

De maneira geral, os discentes preencheram corretamente as atividades, mas apresentaram dificuldades para escrever suas observações e consequentemente as conclusões, como veremos abaixo:

ALUNO	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ÁNALISE
A2	Observação: os resultados são quaser iguais Conclusão: $P(B) = P(B\|A)$ $P(A) = P(A\|B)$ os dois eventos são independente	Conclusão válida sobre o conceito eventos independentes
A10	Observação: Conclusão: Se $P(B)=P(B/A)$ não interferi no evento $P(A)=P(A/B)$ eles eventos são intependentes.	Conclusão válida sobre o conceito eventos independentes
A7	Observação: $P(B) = (P(B/A)$ Conclusão: Um não interferi o outro, pois são independentes.	Observação e conclusão válidas sobre o conceito de eventos independentes
A1 e A18	Observação: Quando eles sõ independentes a probabilidade de A sõ diferentes Conclusão: Quando eles sõ independentes o resulltado de A e igual de B	Observação e conclusão inválida sobre o conceito de eventos independentes
A6	Observação: Quando dois eventos são independetes. Conclusão: são independtes	Observação e conclusão inválidas sobre o conceito de eventos independentes

A17	Observação: O EVENTO É INDEPENDENTE QUANDO A PROPABILIDA DE DELE É IGUAL A CONDICIONAL Conclusão: P(A) = P(B)	Observação e conclusão inválidas sobre o conceito de eventos independentes
A8, A12, A14 e A16	Observação: A P(B) é igual a P(B/A) e vise versa Conclusão: Portanto eles são independentes	Observação e conclusão válidas sobre o conceito de eventos independentes
A3	Observação: eles são independentes quando o resultado de probabilidade de A não interfere no Resultado de B Conclusão: Quando eles são independentes o resultado de A é igual a B	Conclusão e observação inválida sobre o conceito de eventos independentes
A5, A15 e A19	Observação: A probabilidade de B é igual a probabilidade de B/A e a probabilidade de A é igual a probabilidade de A/B Conclusão: Quando isso ocorre os eventos são independentes.	Observação e conclusão válidas sobre o conceito de eventos independentes
A13 e A20	Observação: Que o a probabilidade vai ser igual nos pares. Conclusão: A probabilidade de A vai ser igual a P(A/B), assim como a P(B) vai ser igual a P(B/A).	Observação e conclusão válidas sobre o conceito de eventos independentes

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quadro 39: Percentual das conclusões sobre o conceito de dois eventos independentes

Conclusões	Número de alunos	%
Válidas	12	60
Inválidas	5	25
Não registraram	3	15
Ausentes	0	

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Como podemos observar no quadro acima, 60% dos participantes registraram conclusões válidas sobre o conceito de dois eventos independentes, 25% registraram conclusões inválidas e 15% não registraram observação e nem conclusão nesta atividade

A atividade foi encerrada com a explicação e apresentação da definição de dois eventos independentes para que os alunos pudessem entender quando dois eventos são independentes: Dados dois eventos A e B de um espaço amostral S, diremos que A é independente de B se P(A/B) = P(A), isto é, A é independente de B se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A. (HAZZAN, 2004, p.133).

As 8h50min os alunos começaram a entregar as atividades e, as 9h10min os restantes dos alunos, finalizando assim a atividade 11.

A 12ª atividade, intitulada “Probabilidade de eventos independentes”. Teve início às 9h20min. Esta Atividade teve como finalidade descobrir uma expressão para a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos. Tendo por base o conceito de eventos independentes, estudado anteriormente, levando os alunos a perceberem que a probabilidade de dois eventos independentes ocorrerem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades deles ocorrerem separadamente. Para tanto, utilizamos como materiais o roteiro da atividade composta por 05 questões para que os discentes pudessem calcular e observar a probabilidade P(A), a probabilidade de P(B) e a probabilidade de A com interseção a B, ou seja, PA∩B), e concluírem que a probabilidade de dois eventos independentes ocorrerem simultaneamente e dado pela multiplicação de suas probabilidades. Como podemos averiguar nas observações e conclusões apresentadas pelos participantes presentes.

ALUNO	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	ÁNALISE
A5, A15, A17, A19 e A20	Observação: Quando dois eventos são independentes, a multiplicação de suas ~~probab~~ probabilidades é igual a probabilidade de sua interseção. Conclusão: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade de eventos independentes
A13	Observação: Quando multiplicamos a prob A e B dá resultados independentes Conclusão:	Observação inválidas sobre a probabilidade de eventos independentes. Não registrou conclusão.
A3, A15 e A18	Observação: Quando os evento são idependentes a interseção A e B é igual a mltiplicação dos eventos Conclusão: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade de eventos independentes
A6	Observação: Probabilidade da ocorrência simtânea de dois eventos Conclusão: Probabilidade de eventos independentes.	Observação e conclusão inválidas sobre a probabilidade de eventos independentes

A1, A14 e A16	Observação: Conclumos que multiplicando PA x PB chegamos ao resultado Conclusão: $P(A \cap B) = PA \times PB$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade de eventos independentes
A2, A7 e A10	Observação: Os eventos AB são multiplicados Conclusão: $P(A \cap B) = PA \times PB$	Observação e conclusão válidas sobre a probabilidade de eventos independentes

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quadro 40: Percentual das conclusões sobre a probabilidade de dois eventos não independentes

Conclusões	Número de alunos	%
Válidas	14	70
Inválidas	2	10
Não registraram	4	20
Ausentes	0	0

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Como podemos observar nas observações e conclusões, 70% registraram de forma válida suas conclusões sobre a expressão para o cálculo da probabilidade de dois eventos independentes, os alunos A6 e A13 apresentaram seus registros de forma inválida para descobrir a expressão e, dos participantes presentes, os aluno A4, A8, A9 e A11 não apresentaram registros em sua atividade.

O primeiro aluno entregou a atividade 12 às 9h40min e o último às 10h16min. Neste momento uma aluna reclamou da quantidade das atividades, achando que seria muito, porém explicamos a ela que o objetivo era de trabalhar o conteúdo de probabilidade de forma que contemplasse o campo conceitual destinado para o ensino médio e, também, de maneira bem detalhada, para que os alunos pudessem apreender de fato o assunto em questão e isso requeria tempo e esforço de todos nós.

Em seguida, demos continuidade com as questões propostas, no total foram 14 questões, destas, 02 eram para verificar se os eventos envolvidos nas questões eram independentes, 12 questões envolviam probabilidades de eventos independentes e também a probabilidade da união de dois eventos complementares e não complementares. Questões retiradas de provas do Enem que requeriam uma boa interpretação para que pudessem ser resolvidas.

De maneira geral, os estudantes conseguiram resolver as questões, percebendo que envolvia a multiplicação de probabilidades, apesar de alguns alunos apresentarem dificuldades para resolverem as questões do Enem, assim como na utilização da expressão da probabilidade da união de dois eventos. Acreditamos que a atividade foi bastante proveitosa e que surtiu efeitos positivos para o aprendizado dos alunos, mostrando-lhes questões complexas de probabilidades em diversas situações.

4.9 Nona seção de ensino

O 9º dia do experimento foi 29/ 05/ 2017, em que desenvolvemos a Aplicação do Pós-Teste. Com o objetivo de avaliarmos o desempenho dos discentes nas atividades e consequentemente nas questões trabalhadas inicialmente.

Ao entrar na sala, alguns alunos já se encontravam e estavam com uma expressão de preocupação, perguntaram sobre o nível de dificuldades das questões, o que ia “cair” na prova se estava difícil ou não, disse a eles que procurassem se acalmar pois as questões contemplavam todas as atividades que havíamos estudado no decorrer dos encontros, e que portanto, eles iriam conseguir resolver pois eles haviam adquirido conhecimentos para resolver as questões.

Iniciamos com 15 questões do tipo verdadeiro ou falso, afim de verificar o aprendizado dos conceitos e também como uma forma de revisar os assuntos estudos anteriormente, durou cerca de 10 minutos a aplicação destas questões.

Então, iniciamos o Pós-teste às 8h25min, ocorreu deforma tranquila, assim como no Pré-teste todos os alunos tentaram fazer com bastante empenho as questões, o último aluno entregou o Pós-teste às 10h20min.

5. ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Nesta seção nosso objetivo é apresentar os resultados da análise a *posteriori* e validação da sequência didática. Neste sentido, as informações produzidas no pré-teste, na experimentação, no pós-teste, nos registros do diário de atividades e nas anotações dos alunos, serão tomadas para análise a fim de elucidar conclusões acerca da experimentação, com base no objetivo traçado para nossa pesquisa: avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de Probabilidade por meio de Atividades sobre os aspectos conceituais, que trabalhou inicialmente a diferença entre eventos aleatórios e determinísticos e em seguida os conceitos de espaço amostral, eventos, intervalo de variação da probabilidade, o conceito clássico de probabilidade, eventos complementares, bem como os conceitos envolvendo a união e a interseção de eventos, probabilidades condicionais e de eventos independentes, bem como o desempenho na resolução de questões envolvendo probabilidade e alguns erros cometidos pelos alunos no pós-teste.

Por meio do levantamento presente nas análises prévias, constatamos que as dificuldades dos alunos estavam muito ligadas aos conceitos iniciais de probabilidade, na identificação dos espaços de probabilidade, eventos e principalmente na resolução de questões sobre os conceitos mais complexos. Além disso, identificamos que as questões sobre probabilidade da união de dois eventos, probabilidades condicionais e probabilidades de eventos independentes foram apresentadas como as mais complexas para serem entendidas e resolvidas pelos discentes, principalmente por estarem relacionados às operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de probabilidade.

Com base nessas constatações, elaboramos nossa sequência de atividades, desenvolvida ao longo de nove encontros, a fim de trabalhar os aspectos pontuados como obstáculos ao desenvolvimento dos alunos e assim amenizar ou, quem sabe, sanar tais dificuldades.

Com base nas respostas do pós-teste, analisamos, também, os erros cometidos pelos discentes nas resoluções das questões, aferimos as dificuldades encontradas na utilização dos conceitos probabilísticos envolvidos em cada uma das questões dos testes, bem como os erros cometidos no uso das expressões matemáticas para o cálculo de probabilidade, assim como a linguagem matemática sobre o conteúdo em questão, com o objetivo de encontrar ou não conhecimentos demonstrados pelos alunos no aprendizado de cada conceito envolvido em nossa sequência didática.

Após sistematizarmos os resultados e organizá-los por meio de quadros, tabelas e gráficos de acordo com o desempenho nos testes considerando o percentual de acertos, erros e questões em branco com o intuito de comparar as informações do pré-teste com a do pós-teste e identificar diferenças qualitativas e quantitativas percebidas antes, durante e após o experimento, utilizaremos o teste de hipótese e a correlação, a fim de impetrar conclusões do ponto de vista estatístico sobre os resultados dos testes. Serão consideradas as resoluções de 20 alunos, pois, embora tenham participado 25 no pós-teste, no pré-teste só estavam presentes 20, então, desconsideraremos o teste final dos alunos que estavam presente neste dia.

Também realizamos o confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades aplicadas nas sessões de ensino-aprendizagem. As análises realizadas bem como o confronto entre as mesmas possibilitam a validação de nossa sequência de ensino, de forma a avaliar a viabilidade da sequência didática aplicada para o ensino de probabilidade.

Desta forma, a seguir exporemos nossas análises a posteriori.

5.1 Análise a posteriori das atividades propostas nas sessões de ensino-aprendizagem

As sessões de ensino-aprendizagem foram compostas de nove encontros, onde cada um destes possui um tema referente a um conteúdo matemático e seu respectivo objetivo.

Na primeira seção de ensino apresentamos a atividade intitulada “Experimentos Aleatórios e determinísticos”. Com esta aula tínhamos o objetivo de levar o aluno a descobrir a diferença entre um evento aleatório e um determinístico a partir de situações que abordavam eventos certos e eventos aleatórios. Os alunos preencheram o quadro com as situações e conseguiram perceber a diferença entre os eventos.

A segunda seção de ensino, sobre “Espaço amostral” com o objetivo de identificar o conjunto dos resultados possíveis num experimento aleatório. Os alunos identificaram o espaço amostral em vários experimentos. Apresentaram dificuldades nos experimentos compostos, mas a partir de nossas intervenções puderam concluir de forma satisfatória esta atividade.

Na terceira seção de ensino, intitulada “Eventos” com o objetivo de Identificar e representar subconjuntos. Nesta atividade apenas os alunos que apresentaram dificuldades para identificar o espaço amostral, tiveram dificuldades em representar os subconjuntos. Ao final preencheram a tabela de eventos corretamente, bem como o número de elementos destes subconjuntos.

A quarta seção de ensino, com o título “Probabilidade clássica”, possui o objetivo de conceituar a probabilidade de um evento. Com esta aula os alunos puderam definir facilmente a probabilidade de um evento desejado a partir de uma razão entre o número de possibilidades desejadas do evento e o número total de possibilidades do evento. No entanto, apresentaram dificuldades para construção de espaços amostrais compostos.

A quarta seção de ensino, também constou da aula sobre “Variação de probabilidade”. Com esta aula obtivamos levar o aluno a descobrir o intervalo de variação da probabilidade de um evento. A maioria dos alunos conseguiu chegar ao intervalo de variação da probabilidade de um evento $(0 \leq P(A) \geq 1)$.

A quinta seção de ensino “Eventos complementares”, que objetivou conceituar eventos complementares. Nesta aula os alunos não tiveram dificuldade de encontrar no quadro da atividade os pares de eventos complementares. Apesar de apresentarem dificuldades sobre união e interseção de conjuntos e suas notações.

A quinta seção de ensino, também constou da aula sobre “Eventos complementares” que objetivou descobrir uma expressão para a probabilidade de dois eventos complementares. Nesta aula, os alunos perceberam de imediato as diferenças dos eventos complementares dos não complementares, o que possibilitou construírem observações e conclusões válidas sobre a expressão $P(A) + P(B) = 1$.

A quinta seção de ensino, também constou da aula sobre “Probabilidade do evento complementar” que objetivou descobrir uma expressão para calcular a probabilidade da união de dois eventos complementares. Nesta aula, os alunos efetuaram corretamente o cálculo das probabilidades dos eventos desejados o que possibilitou construírem observações e conclusões válidas para a expressão $P(AUB) = P(A) + P(B)$.

A sexta seção de ensino, com a atividade intitulada “Probabilidade de eventos não disjuntos” que objetivou descobrir uma expressão para a probabilidade de dois eventos não disjuntos. Nesta aula, alguns alunos tiveram dificuldades para descobrir a expressão $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Mas, a maioria dos alunos, conseguiram registrar observações e conclusões válidas sobre a expressão.

A sétima seção de ensino, com a atividade “Probabilidade condicional” objetivou descobrir uma expressão para o cálculo da probabilidade de ocorrer um evento, sabendo da ocorrência de um outro evento antecipadamente. Nesta aula, os alunos compreenderam a probabilidade condicional como o quociente dado pela expressão $P\,(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Inicialmente, alguns tiveram dificuldades, mas construíram observações e conclusões válidas para a expressão.

A oitava seção de ensino, com a atividade intitulada “Conceituar eventos independentes” que objetivou descobrir quando dois eventos são independentes. Nesta seção, alguns alunos apresentaram dificuldades em registra suas observações e conclusões sobre os eventos independentes, mas preencheram o quadro de atividades de forma satisfatória, pois calcularam suas probabilidade de forma correta.

A oitava seção de ensino, também constou da atividade “Probabilidade de eventos independentes” que objetivou descobrir uma expressão para a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos. Nesta aula, a maioria dos alunos registraram observações e conclusões válidas para a expressão $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

A seguir faremos o confronto entre as análises a priori e a posteriori das aulas que propomos na sequência didática na fase da experimentação.

5.2 Confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades propostas na sequência didática

A seguir apresentamos um quadro demonstrativo do confronto entre as análises a priori e a posteriori das aulas propostas, o qual possibilitará a validação de nossa sequência didática.

Quadro 41: Confronto entre as análises a priori e a posteriori das atividades

Continua

ATIVIDADES	ANÁLISE A PRIORI	ANÁLISE A POSTERIORI	VALIDAÇÃO
1	Após o preenchimento do quadro, esperamos que os alunos se questionem sobre o acaso, ou seja a aleatoriedade presentes em seu cotidiano e com a resolução das questões eles percebam a diferença entre o experimento aleatório e o experimento determinístico e de maneira intuitiva,	Com esta aula tínhamos o objetivo de levar o aluno a descobrir a diferença entre um evento aleatório e um determinístico a partir de situações que abordavam eventos certos e eventos aleatórios. Os alunos preencheram o quadro	POSITIVA

Continua

	possam criar exemplos de experimentos aleatórios e determinísticos ao decorrer do tempo. Não descartamos a hipótese de que alguns alunos tenham dificuldades em estabelecer a diferença entre os experimentos. Pretendemos que está dificuldade seja superada com a construção, preenchimento e leitura da tabela. A ideia central é que o aluno perceba a diferença entre experimentos determinísticos e não determinísticos.	com as situações e conseguiram perceber a diferença entre os eventos.	
2	Após o preenchimento do quadro, esperamos que os alunos percebam a relação entre um experimento aleatório e seus possíveis resultados de acontecimentos. Com a experiência adquirida na atividade anterior, supomos que os alunos possam identificar o espaço amostral de um experimento aleatório. Aguardamos dificuldades, por se tratar de uma representação em forma de conjuntos de	Com o objetivo de identificar o conjunto dos resultados possíveis num experimento aleatório. Os alunos identificaram o espaço amostral em vários experimentos. Apresentaram dificuldades nos experimentos compostos, mas a partir de nossas intervenções puderam concluir de forma satisfatória esta atividade.	POSITIVA

Continua

	experimentos simples, compostos e consecutivos. Pretendemos superar essa dificuldade com auxílio do registro de valores na tabela, além da orientação individual para se estabelecer o conjunto de todos os resultados possíveis, que será construído e preenchido pelos alunos.		
3	Após o preenchimento do quadro, esperamos que os alunos se questionem sobre o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento e percebam a relação entre conjuntos e subconjuntos, possibilidades dos subconjuntos e números de elementos dos subconjuntos. Com referência as atividades realizadas anteriormente, esperamos que os alunos associem, o termo “subconjuntos do experimento” com o termo “eventos”. Na hipótese dos alunos apresentarem dificuldades para construir o espaço amostral (resultados	Com o objetivo de Identificar e representar subconjuntos. Nesta atividade apenas os alunos que apresentaram dificuldades para identificar o espaço amostral, tiveram dificuldades em representar os subconjuntos. Ao final preencheram a tabela de eventos corretamente, bem como o número de elementos destes subconjuntos.	POSITIVA

(Continua)

	possíveis) e os eventos (subconjuntos), pretendemos superar estas dificuldades com o auxílio da tabela, que será construída pelos alunos, buscando a relação entre as variáveis através dos registros, além de orientações individuais, caso necessário. A ideia central é que o aluno perceba a relação entre o espaço amostral e seus eventos que são seus subconjuntos. Reforçando a ideia já apresentada na primeira e segunda atividades, denotando a necessidade de participar de maneira contínua das atividades apresentadas.		
4	Ao lerem as questões os alunos deverão perceber a relação entre o número de possibilidades desejadas e o número total de possibilidades em um experimento aleatório. Os alunos a partir das questões, das tabelas, pela experiência nas atividades anteriores, devem perceber que a relação é uma razão,	Com o objetivo de conceituar a probabilidade de um evento. Com esta aula os alunos puderam definir facilmente a probabilidade de um evento desejado a partir de uma razão entre o número de possibilidades desejadas do evento e o	POSITIVA

(Continua)

	o que implica na associação com a segunda e terceira atividades. Acreditarmos que os alunos apresentarão dificuldades nas representações da probabilidade em forma de fração, número decimal e porcentagem. Pretendemos superar estas dificuldades, utilizando valores como: $0,$ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 1 , transformando-os em porcentagens como 0%, 25%, 50%, 75% 100% por serem mais acessíveis, além do auxílio individual e a resolução, no quadro, de exemplos vinculados aos quocientes apresentados. Fazendo com que os alunos percebam a regularidade desta operação, e generalizem nas próximas questões na forma de fração, número decimal e porcentagem. A ideia central é que o aluno perceba a relação da razão entre casos desejados e casos possíveis, que será formalizada com a leitura da definição clássica de probabilidade.	número total de possibilidades do evento. No entanto, apresentaram dificuldades para construção de espaços amostrais compostos.	

(Continua)

5	Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda o intervalo de variação da probabilidade de um evento. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de um evento impossível, eventos elementares e do evento certo. Esta atividade foi construída para funcionar como uma introdução à construção do registro de somas de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de somas de probabilidades, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade.	Com esta aula obtivamos levar o aluno a descobrir o intervalo de variação da probabilidade de um evento. Nesta atividade 90% dos participantes registraram conclusões válidas sobre o intervalo de variação da probabilidade, ou seja, a maioria dos alunos conseguiu perceber que a probabilidade varia no intervalo fechado de zero a um. ($0 \leq P(A) \geq 0$).	POSITIVA
6	Ao visualizar a tabela e em seguida preenche-las	Objetivou conceituar eventos	

(Continua)

	(situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor de todos os eventos propostos e suas probabilidades. A ideia central é que o aluno compreenda que dois eventos são complementares quando a interseção entre eles for vazia e a união entre eles for igual ao espaço amostral do experimento.	complementares. Nesta aula os alunos não tiveram dificuldade de encontrar no quadro da atividade os pares de eventos complementares. Apesar de apresentarem dificuldades sobre união e interseção de conjuntos e suas notações.	POSITIVA
7	Ao visualizar a tabela e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor de todos os eventos propostos e verificar se são ou não complementares, em seguida calcular as probabilidades dos dois eventos complementares. A ideia central é que o aluno compreenda que, quando dois eventos são complementares a probabilidade de um deles igual a um menos a probabilidade do outro evento.	Objetivou descobrir uma expressão para a probabilidade de dois eventos complementares. Nesta aula, os alunos perceberam de imediato as diferenças dos eventos complementares dos não complementares, o que possibilitou construírem observações e conclusões válidas sobre a expressão $P(A) + P(B) = 1$.	POSITIVA

(Continua)

8	Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que a probabilidade da união de dois eventos complementares é igual a soma das probabilidades de cada um destes eventos, e que a interseção destes eventos é vazia. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de que os eventos são complementares. Esta atividade foi construída para funcionar como construção do registro de somas de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de somas de probabilidades e união de conjuntos, a qual pretendemos superar com	Objetivou descobrir uma expressão para calcular a probabilidade da união de dois eventos complementares. Nesta aula, os alunos efetuaram corretamente o cálculo das probabilidades dos eventos desejados o que possibilitou para que 80% dos participantes construírem observações e conclusões válidas para a expressão $P(AUB) = P(A) + P(B)$.	POSITIVA

(Continua)

	auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola.		
9	Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que a probabilidade da união de dois eventos não complementares é igual a soma das probabilidades de cada um destes eventos menos a probabilidade da ocorrência conjunta destes eventos, e que a interseção destes não é vazia. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de que os eventos não são complementares. Esta	Objetivou descobrir uma expressão para a probabilidade de dois eventos não disjuntos. Nesta aula, alguns alunos tiveram dificuldades para descobrir a expressão $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Mas, a maioria dos alunos, 70% deles, conseguiram registrar observações e conclusões válidas sobre a expressão.	POSITIVA

(Continua)

	atividade foi construída para funcionar como construção do registro de soma e subtração de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de soma e subtração de probabilidades, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola.		
10	Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que a probabilidade condicional é igual ao quociente das probabilidades da ocorrência conjunta destes eventos pela probabilidade do evento que já ocorreu, ou seja, a probabilidade da	Objetivou descobrir uma expressão para o cálculo da probabilidade de ocorrer um evento, sabendo da ocorrência de um outro evento antecipadamente. Nesta aula, os alunos compreenderam a probabilidade condicional como o quociente dado pela expressão $P\,(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Inicialmente, alguns tiveram dificuldades, mas 95%	POSITIVA

(Continua)

	interseção destes eventos dividido pela probabilidade do evento que já ocorreu. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de que a probabilidade do evento desejado faz parte de um "novo" espaço amostral dado pela informação da ocorrência a priori de um evento. Esta atividade foi construída para funcionar como construção do registro de divisão de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de divisão de probabilidades e probabilidades condicionais, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola e a construção da árvore das	dos participantes construíram observações e conclusões válidas para a expressão.	

(Continua)

	probabilidades para facilitar o aprendizado e a visualização das probabilidades condicionais.		
11	Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que dois eventos $A \; e \; B$ são independentes quando a probabilidade de ocorrência do evento A não se modifica mesmo quando o evento B tenha ocorrido, ou seja, $P(A) = P(A\|B)$, ou vice-versa, $P(B) = P(B\|A)$, isto é A é independente de B se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratar de eventos independentes pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro	Objetivou descobrir quando dois eventos são independentes. Nesta aula, alguns alunos apresentaram dificuldades em registrarem suas observações e conclusões sobre os eventos independentes, mas preencheram o quadro de atividades de forma satisfatória, pois calcularam suas probabilidade de forma correta. 60% dos participantes, registraram conclusões válidas sobre o conceito de dois eventos independentes.	POSITIVA

(Continua)

	didático utilizado pelo aluno em sua escola e a construção e utilização da árvore das probabilidades.		
12	Ao visualizar as tabelas e em seguida preenche-las (situações abordadas em atividades anteriores) os alunos deverão determinar o valor da probabilidade de todos os eventos propostos. A ideia central é que o aluno compreenda que a probabilidade de dois ou mais eventos independentes ocorrerem de forma conjunta é igual ao produto das probabilidades da ocorrência de cada um dos eventos de forma separadamente. Neste momento, ainda como um método mecânico, auxiliado pela tabela. A relação entre as probabilidades e seu comportamento partindo da perspectiva de que ocorrência de um evento não interfere na probabilidade de ocorrência de outro por eles serem eventos independentes. Esta atividade foi construída para	Objetivou descobrir uma expressão para a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos. Nesta aula 70% dos participantes, a maioria dos alunos, registraram observações e conclusões válidas para a expressão $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.	POSITIVA

(Conclusão)

	funcionar como construção do registro de multiplicação de probabilidades. Caso os alunos tenham dificuldade por se tratarem de multiplicação de probabilidades e a interpretação de eventos independentes, a qual pretendemos superar com auxílio das questões propostas apresentadas no final da atividade extraídas de provas do Enem, de vestibulares e do livro didático utilizado pelo aluno em sua escola e a construção e utilização da árvore das probabilidades.		

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Como podemos observar, por meio da leitura dos trechos das análises a priori e a posteriori expressas no quadro, o que prevíamos que acontecesse na fase da experimentação veio a ocorrer no momento da execução das aulas, o que também resultou em validações positivas.

A seguir, expomos os resultados das análises a posteriori do pré-teste e do pós-teste aplicados com 20 alunos.

5.3 Resultados e análises do experimento

À análise dos dados inicia-se, analisando, por questão, o percentual de erro, acerto e em branco, nos dois testes, considerando as seguintes características para cada uma dessas categorias:

Acerto: quando o aluno apresentou uma resolução e o resultado estava correto.

Erro: quando o aluno apresentou uma resolução e o resultado não estava correto.

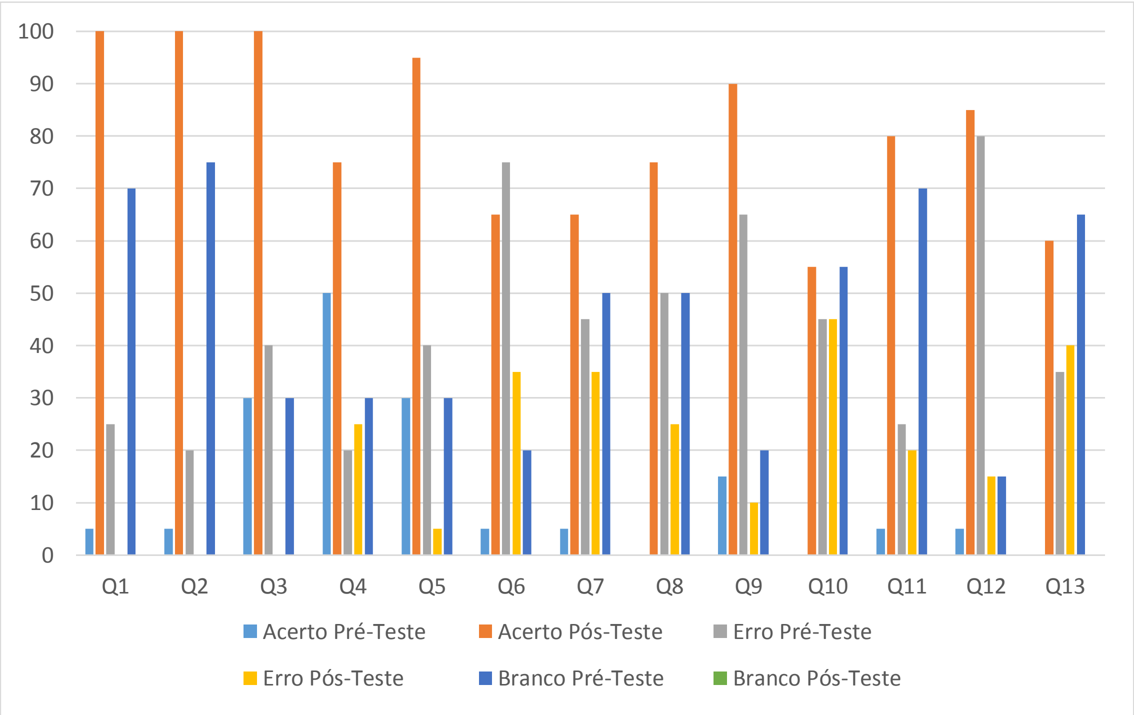
Branco: quando o aluno não apresentou nenhuma resolução.

Quadro 42: Desempenho por questão nos testes

	ACERTO (%)		ERRO (%)		BRANCO (%)	
QUESTÃO	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Q_1	5	100	25	0	70	0
Q_2	5	100	20	0	75	0
Q_3	30	100	40	0	30	0
Q_4	50	75	20	25	30	0
Q_5	30	95	40	5	30	0
Q_6	5	65	75	35	20	0
Q_7	5	60	45	40	50	0
Q_8	0	75	50	25	50	0
Q_9	15	90	65	10	20	0
Q_{10}	0	55	45	45	55	0
Q_{11}	5	80	25	20	70	0
Q_{12}	5	85	80	15	15	0
Q_{13}	0	60	35	40	65	0

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 31: Desempenho por questão nos testes



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Conforme observado nas informações anteriores, as questões Q_3, Q_4 e Q_5 tiveram o maior percentual de acerto no pré-teste, uma vez que os alunos ainda não tinham recebido orientação a respeito do assunto. Primeiramente, atribuímos este percentual a pouca complexidade dessas questões, pois Q_3 era referente ao cálculo da probabilidade do acontecimento de um evento certo (item a) e de um evento impossível de ocorrer (item b) e sua resolução poderia ser realizada pela interpretação direta da questão. A questão Q_4, tratava da probabilidade em um contexto social, exigia um pouco mais de atenção na identificação da probabilidade, para que os discentes pudessem concordar ou discordar da questão e justificassem suas respostas. E a Q_5, apresentava dados com valores baixos (espaço amostral de 1 a 100) e a resolução se fundamentava na interpretação do sorteio de um número de 1 até 20, dentre esses 100 números, ou seja, mesmo que os alunos ainda não conhecessem a forma de organizar os dados, como o espaço amostral e o evento, pela interpretação e lógica poderiam chegar ao resultado correto. E no pós-teste os percentuais de acertos nestas questões foram elevados.

Desde o momento do pré-teste, os alunos já manifestaram suas dificuldades nas questões Q_1, Q_2, Q_6, Q_7. Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12} e Q_{13}. Estas questões apresentavam certo grau de complexidade, pois, além da interpretação, exigiam conhecimentos dos alunos em relação ao conceitos e a linguagem probabilística para organização dos dados e, posterior, resolução da questão. Nestes casos os erros estavam diretamente ligados a falta de entendimento de cada aluno nos conceitos e nas operações exigidas nas questões.

No caso da questão Q1 e Q2, apresentaram no pré-teste, apenas 5% de acerto. No pós-teste as duas aumentaram para 100%. Estas questões estavam diretamente ligadas à determinação do espaço amostral e da retirada de eventos deste espaço amostral.

Por outro lado, as questões Q6 e Q7, apresentaram, no pré-teste, apenas 5% de acerto. No pós-teste, Q6 e Q7, subiram para, 65% e 60%, respectivamente. Reconhecemos que tais questões de fato apresentavam certo grau de complexidade na interpretação, pois, além de serem de eventos não complementares, exigiam muita cautela na disposição dos dados, por exigirem o conhecimento de números pares, primos, de múltiplos de 2 ou de 3, além da atenção na organização dos dados e na execução dos cálculos. Por isso, muitos erros nestas questões foram cometidos pela distração dos alunos durante o cálculo, mais precisamente no momento de subtrair elementos comuns pertencentes aos eventos envolvidos nestas questões. Essas características estão expressas em algumas resoluções despontadas no item 6.2.

As questões Q8 e Q9, inicialmente obtiveram 0% e 15% de acertos no pré-teste, respectivamente, apresentaram bons resultados no pós-teste, pois Q8 passou para 75% e Q9 para 90%. Estes resultados mostraram melhoras significativas, na maioria dos alunos, e que nos fez acreditar que os mesmos aprenderam os conceitos de eventos complementares contidos nas atividades 6, 7 e 8 de nossa sequência didática, apesar de ter havido alguns erros, como veremos em algumas resoluções despontadas no item sobre a análise dos erros no item 6.2 desta seção.

As questões Q10 e Q11, abordavam a probabilidade condicional, no pré- teste a Q10 teve 0% de acerto e a Q11, 5% de acertos. Porém no pós-teste, a questão Q10 subiu para 55% e a Q11, 80% de acertos. Os alunos apresentaram dificuldades para interpretar e retirar os evento e espaço amostral na questão dez pelo fato de terem de interpretar os dados contidos em uma tabela. Contudo, na questão onze os discentes conseguiram, em sua maioria, retirarem o espaço amostral e calcularem a probabilidade condicional quando o espaço de probabilidade estava relacionado a retirada de bolas de uma urna. No item 5.2, apresentaremos as resoluções que mostram os equívocos dos discentes cometidos nestas questões.

Já as questões Q12, e Q13, por possuírem conceitos de eventos independentes e do cálculo da probabilidade de eventos independentes, exigiam atenção na interpretação do espaço amostral. No caso da Q13, os discentes deveriam interpretar o gráfico para retirarem os dados para a execução do cálculo e na Q12, analisarem o espaço amostral para o lançamento de dois dados. Porém, a Q12, inicialmente teve 5% de acerto no pré-teste, no pós-teste subiu para 85%, já a questão Q13 que no pré-teste não houve acertos subiu para 60%. Essas características estão expressas nas resoluções despontadas no item 6.2.

A seguir faremos a análise dos acerto, erro e branco por aluno no pré – teste e no pós – teste.

Quadro 43: Desempenho por aluno nos testes

(Continua)

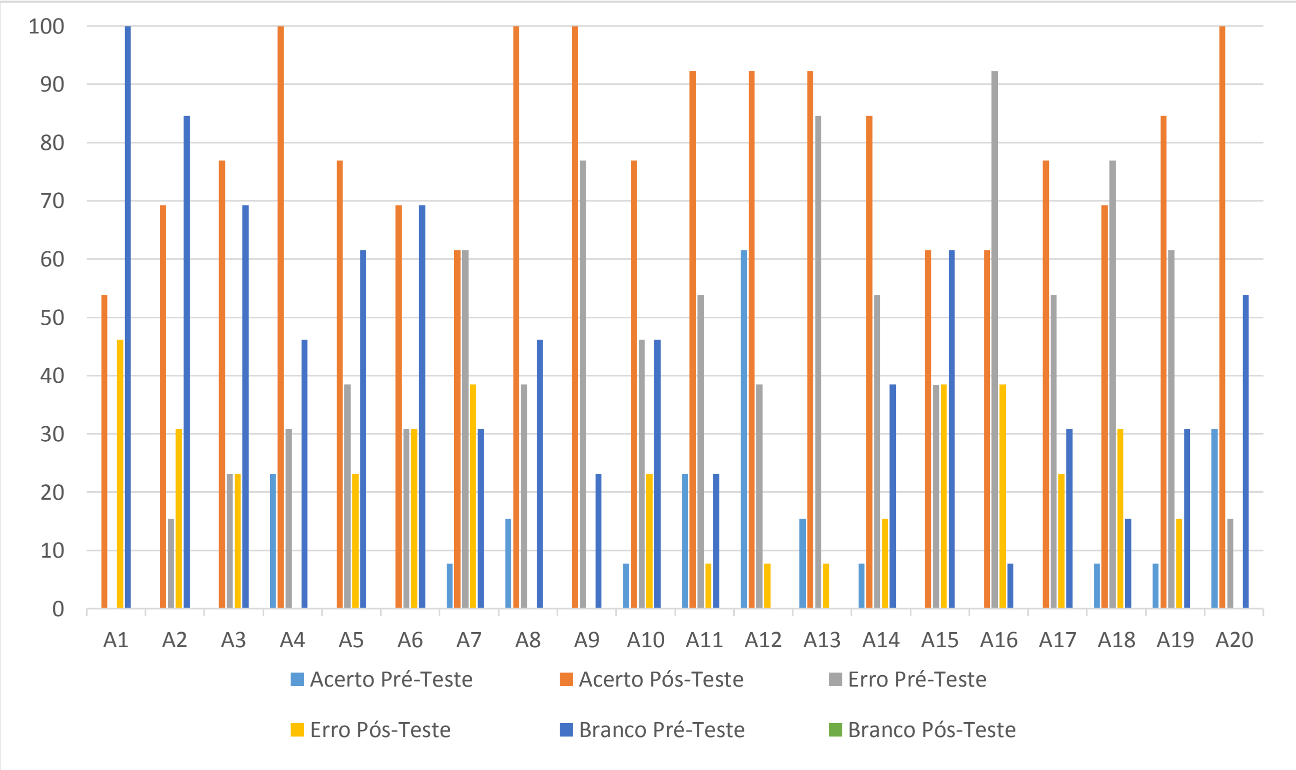
	ACERTO (%)		ERRO (%)		BRANCO (%)	
QUESTÃO	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
A_1	0	53,85	0	46,15	100	0
A_2	0	69,23	15,38	30,77	84,62	0
A_3	7,7%	76,92	23,07	23,08	69,23	0

Conclusão

A_4	23,07	100	30,77	0	46,15	0
A_5	0	76,92	38,46	23,08	61,54	0
A_6	0	69,23	30,77	30,77	69,23	0
A_7	7,7	61,53	61,54	38,47	30,76	0
A_8	15,4	100	38,46	0	46,15	0
A_9	0	100	76,92	0	23,08	0
A_{10}	7,7	76,92	46,15	23,08	46,15	0
A_{11}	23,07	92,30	53,84	7,7	23,09	0
A_{12}	61,53	92,30	38,47	7,7	0	0
A_{13}	15,4	92,30	84,6	7,7	0	0
A_{14}	7,7	84,61	53,85	15,39	38,45	0
A_{15}	0	61,53	38,43	38,47	61,57	0
A_{16}	0	61,53	92,30	38,47	7,7	0
A_{17}	15.4	76,92	53,85	23,08	30,75	0
A_{18}	7,7	69,23	76,92	30,77	15,38	0
A_{19}	7,7	84,61	61,54	15,39	30,76	0
A_{20}	30,76	100	15,4	0	53,84	0

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Gráfico 32: Desempenho por aluno nos testes



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

No primeiro teste, 55% dos alunos (A3, A4, A7, A8, A10, A11, A13, A14, A17, A18 e A19) tiveram menos de 25% de acerto. Por outro lado, o aluno A12 apresentou índice de acerto acima de 50%, mais precisamente 61,53%, demonstrando um bom entendimento sobre o assunto, mesmo antes de receber orientação sobre ele neste ano.

Os alunos A1, A2, A5, A6, A9, A15 e A16, no pré-teste não apresentaram resultados corretos em nenhuma de suas resoluções e no pós-teste, progrediram para 53,85%, 69,2%, 76,92%, 69,23%, 100%, 61,53 e 61,53, respectivamente. Além deste, os alunos A3, A7, A10, A14, A18 e A22 tiveram no primeiro teste, percentuais de apenas 7,7% de acerto. Já no pós-teste, conseguiram 76,92%, 61,53%, 76,92%, 84,61%, 69,23% e 84,61% de acertos, respectivamente. E ainda os alunos A4, A8, A11, A13, A17, A19 e A20 que, embora tenham obtido 23,07%, 15,4%, 23,07%, 15,04%, 15,04% e 23,07%, respectivamente, de acertos no pré-teste, no pós-teste melhoraram significativamente seus índices, tendo os alunos A11 e A13 aumentado para 92,30%; o A17 pontuou 76,92%; A4, A8 e A20 obtiveram a nota máxima de 100%.

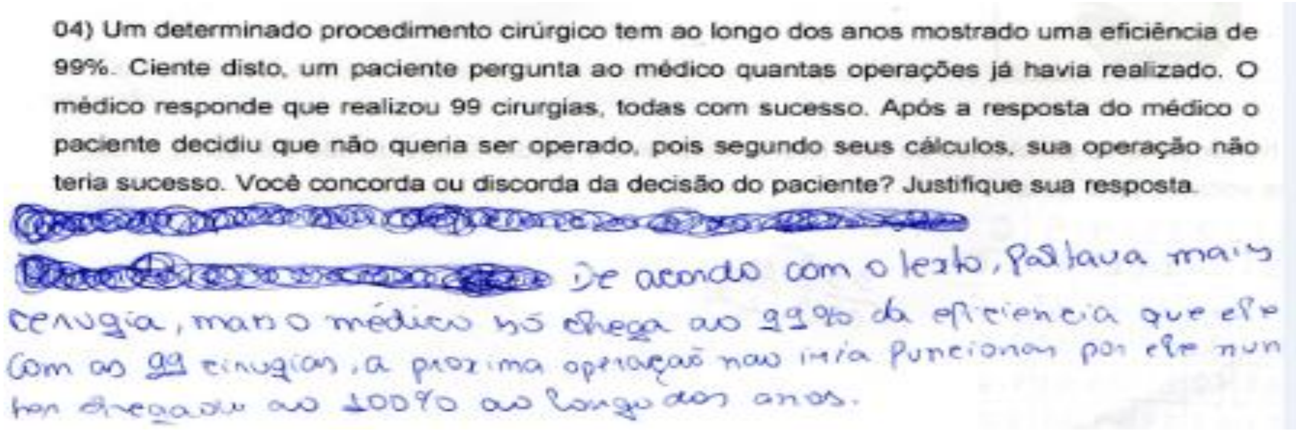
A seguir apresentaremos uma análise recorrendo aos tipos de erros, a fim de verificar quais os erros mais frequentes observado nos testes. Acompanhemos.

5.4 Análise de erros no pós teste

Após observar os percentuais de erro, acerto e em branco, por questão e por alunos, identificaremos os fatores ocasionadores de tais indícios. Para tanto, elegemos algumas categorias a fim de analisar se houve ou não a identificação do espaço amostral e do evento representado em cada enunciado; se os conceitos envolvidos em cada enunciado foram utilizados de forma correta, incorreta ou deixado em branco e se os erros estavam relacionados à realização do cálculo ou ainda se estes também foram deixados em branco. Vejamos adiante a análise dos erros apresentados pelos participantes nas questões do pós-teste e suas respectivas imagens de respostas em cada questão.

Erros cometidos pelos alunos na questão 4:

Imagem 14: Justificativa apresentada pelo aluno A1 na questão 4.

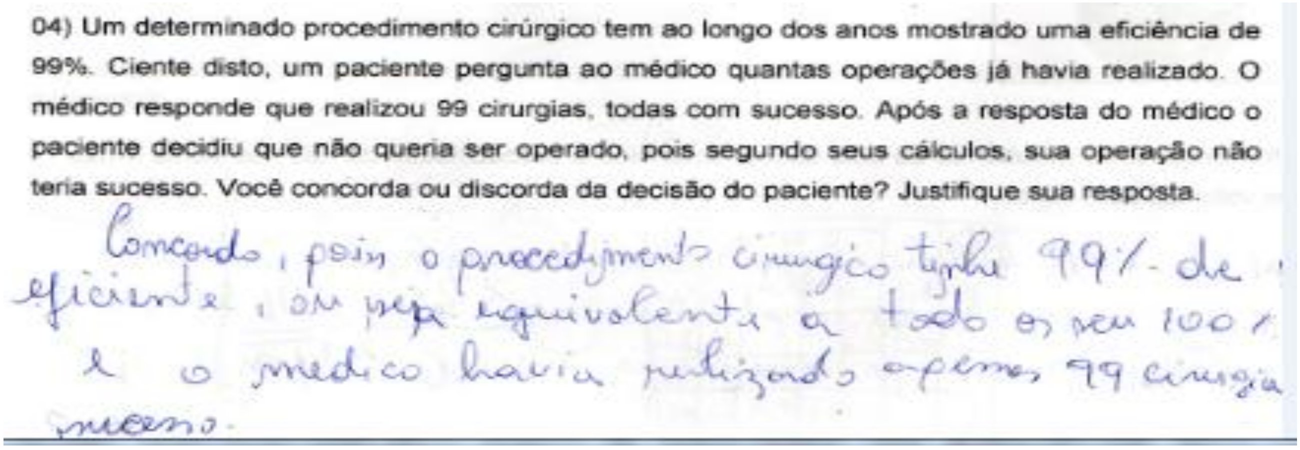


04) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

De acordo com o texto, faltava mais cerugia, mas o médico só chega ao 99% da eficiencia que ele com as 99 cirugias, a proxima operaçaõ nao iria funcionar por ele nun ter chegado ao 100% ao longo dos anos.

Ao verificar a justificativa acima, podemos perceber que o aluno A1 confunde a probabilidade da eficiência do procedimento cirúrgico com a probabilidade da eficiência do referido médico. Este erro pode estar relacionado ao entendimento incompleto do enunciado, implicando na interpretação insatisfatória da questão.

Imagem 15: Justificativa apresentada pelo aluno A5 na questão 4.

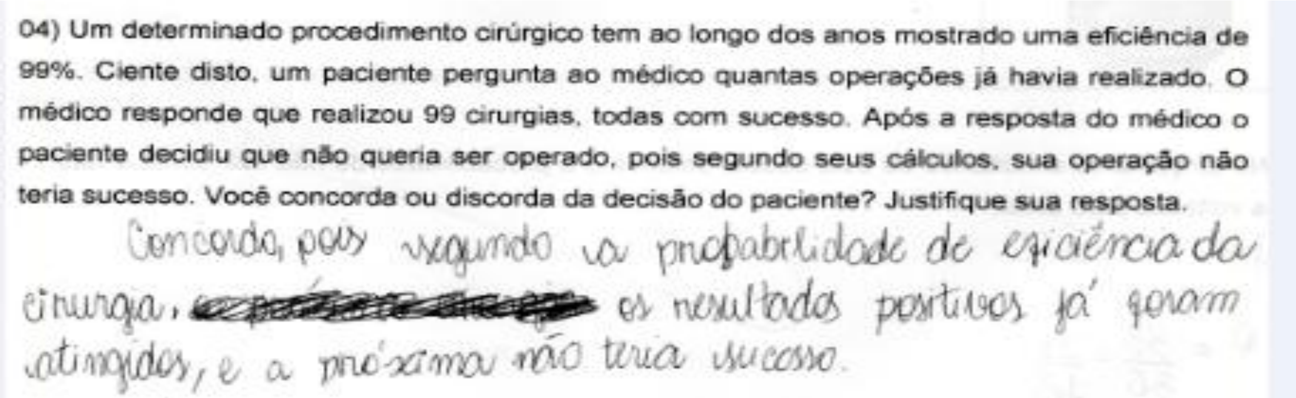


04) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

Concordo, pois o procedimento cirurgico tinha 99% de eficiente, ou seja equivalente a todo os seu 100% e o medico havia realizado apenas 99 cirugia sucesso.

O aluno A4, também confunde a probabilidade do procedimento cirúrgico com o número de cirurgias realizadas pelo médico, justificou por meio da probabilidade do procedimento cirúrgico uma equivalência do total de cirurgias, talvez o referido aluno tenha feito uma “aproximação” das probabilidades em questão, justificando de forma insatisfatória a situação.

Imagem 16: Justificativa apresentada pelo aluno A12 na questão 4.

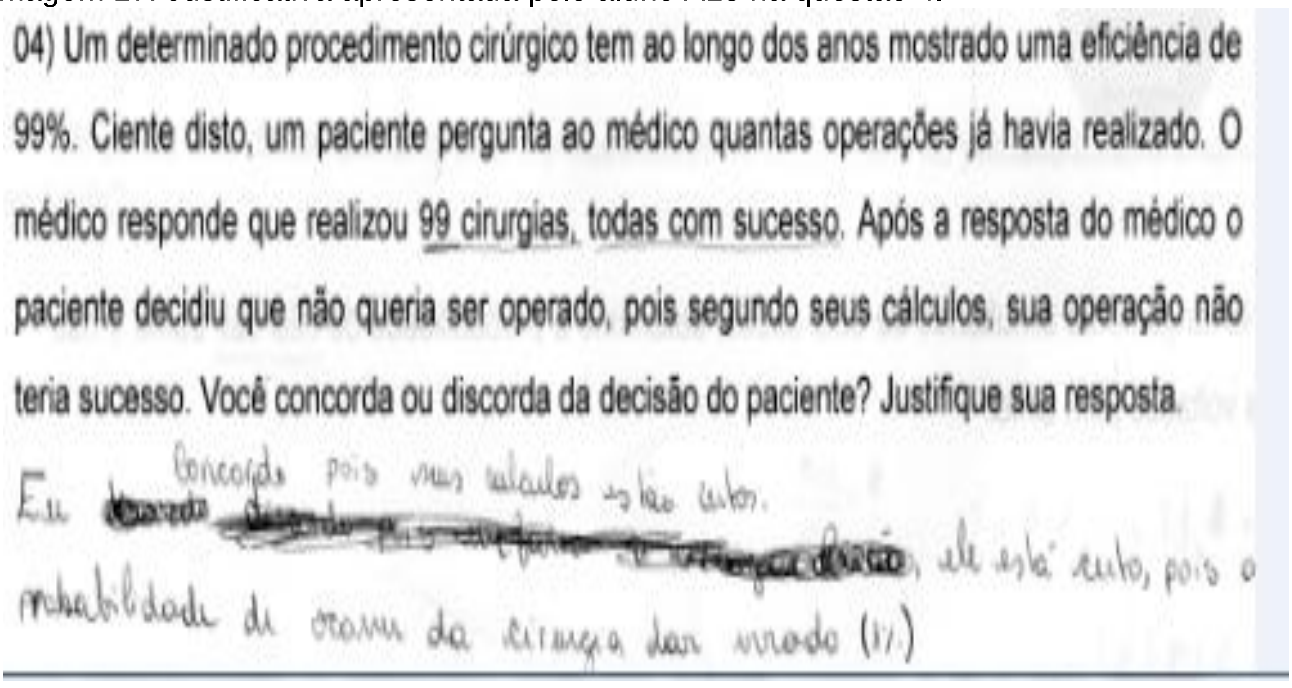


04) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

Concorda, pois segundo a probabilidade de eficiência da cirurgia, ~~[illegible]~~ os resultados positivos já foram atingidos, e a próxima não teria sucesso.

O aluno A12 apresenta um erro de interpretação de probabilidades, ao comparar a probabilidade de eficiência do procedimento cirúrgico com a probabilidade de eficiência do referido médico, justificando de forma insatisfatória a questão.

Imagem 17: Justificativa apresentada pelo aluno A13 na questão 4.



04) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

Concordo pois meus cálculos estão certos.

Eu ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, ele está certo, pois a probabilidade de erro da cirurgia dar errado (1%)

O aluno A13, confundiu a probabilidade do erro do procedimento cirúrgico, o mesmo acreditou que a próxima cirurgia não daria certo, interpretando de forma insatisfatória a situação, apesar de existir a probabilidade de insucesso do procedimento cirúrgico.

Imagem 18: Justificativa apresentada pelo aluno A3 na questão 4.

04) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

Concordo

O participante A3, não justificou sua resposta de forma que pudéssemos fazer uma análise sobre sua decisão, como podemos verificar na figura 6.

A seguir, o erro apresentado pelo aluno A1 na questão 5:

Imagem 19: Resposta apresentada pelo aluno A1 na questão 5.

05) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Umas das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

$\frac{20^{:10}}{20_{:5}} = \frac{1}{1}$

Ao analisar o erro cometido pelo aluno A1 na questão cinco, aliás o único erro pois esta questão teve 95% de acertos, podemos perceber, que o referido aluno, identifica de forma correta o evento envolvido no enunciado, mas não identifica de forma correta o espaço amostral, porém o discente demonstra o conhecimento sobre o cálculo da probabilidade pois representa de forma correta por meio de uma razão.

A seguir, os erros apresentados pelos participantes nas questões 6 e 7:

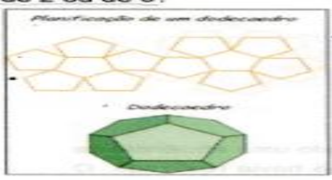
Imagem 20: Resposta apresentada pelo aluno A7 nas questões seis e sete.

06) Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

D = 6
Primo: 2, 3, 5
Pá = 2, 4, 6

$\frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2}$ para ambos

07) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?



D = 12
multiplo de 2 = 2, 4, 6, 8, 10, 12
" de 3 = 3, 6, 9, 12

Para multiplo de 2 = $\frac{6:3}{12:3} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$

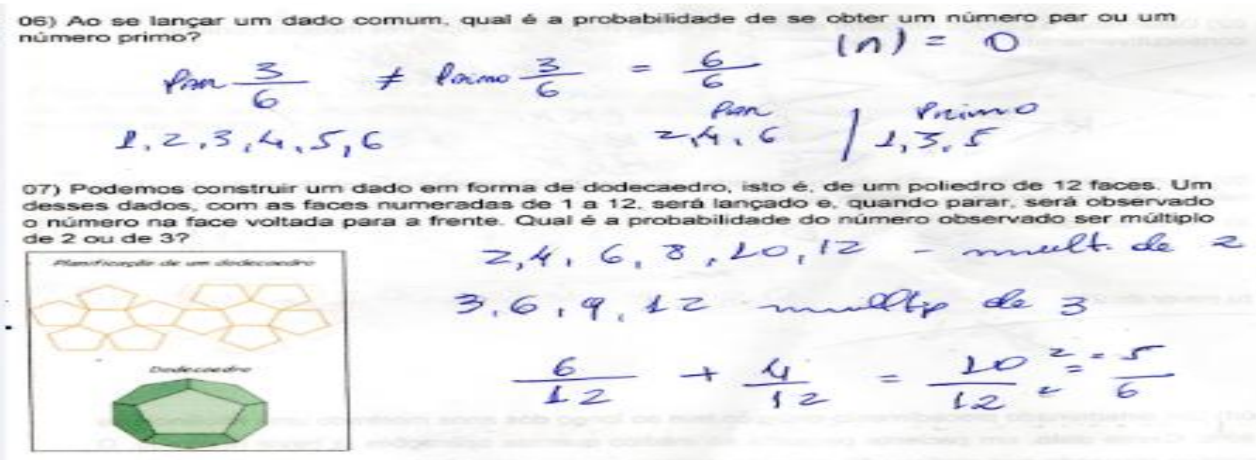
Para multiplo de 3 = $\frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$

$R = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

Na questão 6, o aluno A7, confundiu a probabilidade de sair um número primo com a probabilidade de sair um número par, encontrou duas respostas para uma única pergunta: qual a probabilidade de sair um número par ou um número primo? Um erro de interpretação, por falta de entendimento completo do enunciado.

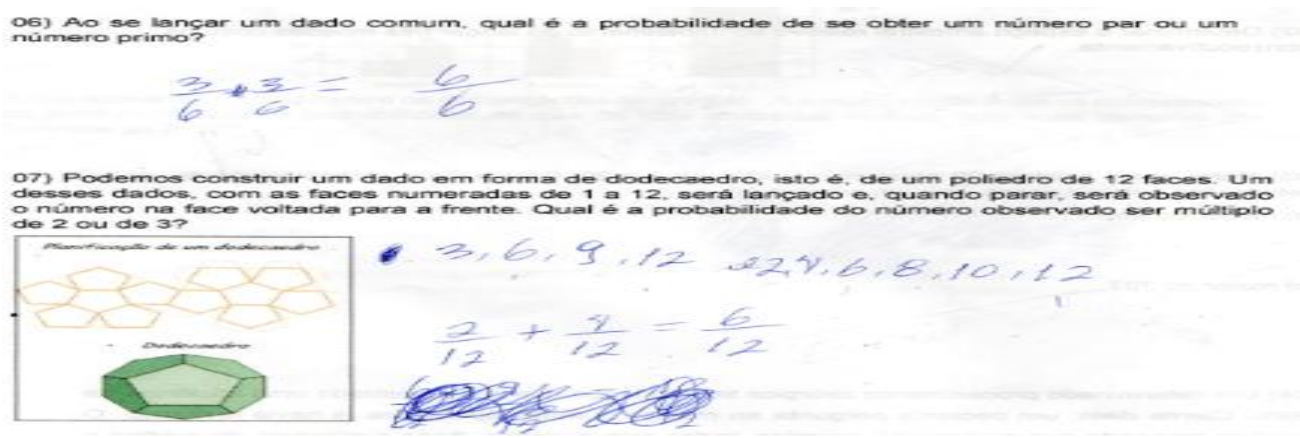
Na questão 7, o aluno A7, cometeu um erro parcial, pois não subtraiu a probabilidade dos elementos comuns aos dois eventos em questão, também um erro parcial, pois identificou corretamente os eventos e suas respectivas probabilidades.

Imagem 21: Resposta apresentada pelo aluno A15 nas questões seis e sete.



Na questão 6, o aluno A15, errou parcialmente, ao somar as probabilidades dos eventos “sair número par” com “sair número primo”, mas não subtraiu a probabilidade dos elementos comuns aos eventos, apresentado uma resposta incorreta para a questão. O mesmo erro ocorreu na questão 7.

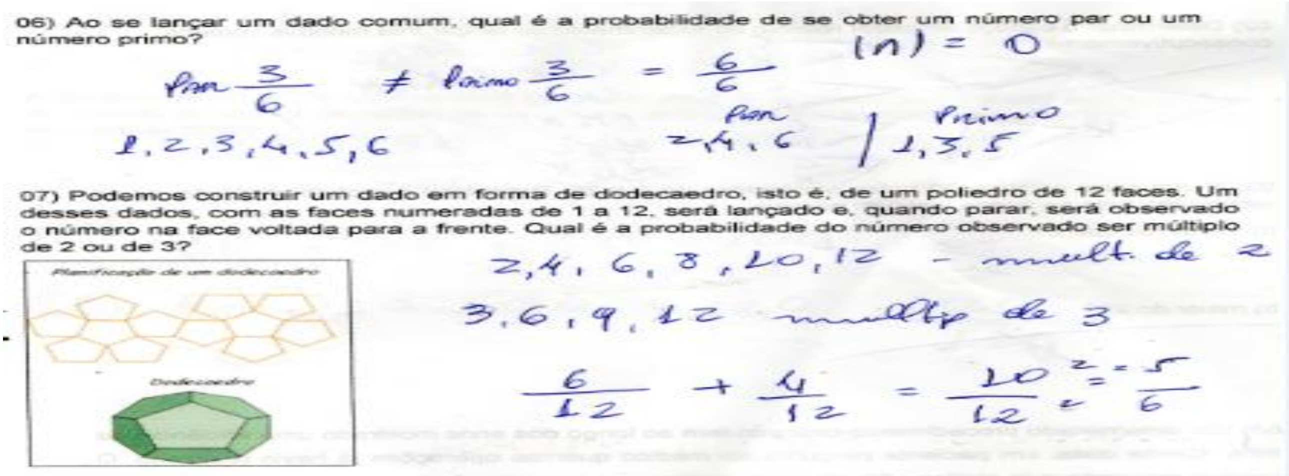
Imagem 22: Resposta apresentada pelo aluno A16 nas questões seis e sete.



Na questão 6, o aluno A16, errou parcialmente, somou as probabilidades dos eventos, mas não subtrai as probabilidades dos elementos comuns, encontrou desta forma um resultado incorreto.

Na questão 7, não foi possível verificar quais os eventos o aluno identificou, demostrado por meio das probabilidades em sua resposta.

Imagem 23: Resposta apresentada pelo aluno A17 nas questões seis e sete.


06) Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

$(n) = 0$

Par $\frac{3}{6}$ $\neq$ Primo $\frac{3}{6}$ $= \frac{6}{6}$

1, 2, 3, 4, 5, 6 Par 2, 4, 6 | Primo 1, 3, 5

07) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?

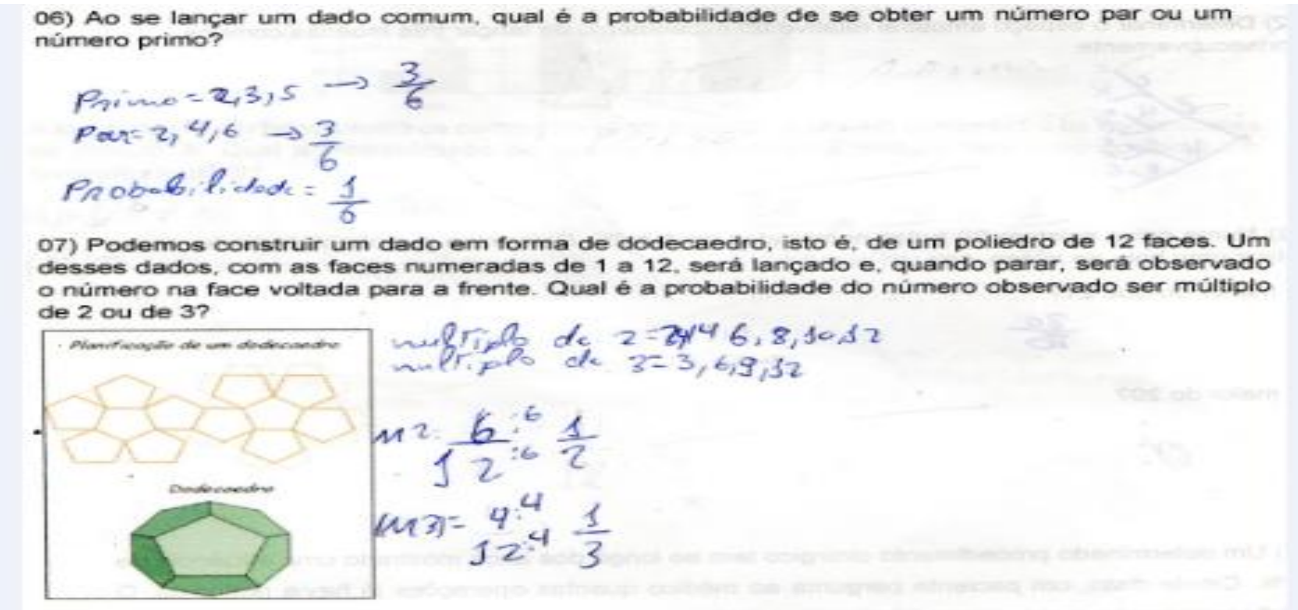
2, 4, 6, 8, 10, 12 - mult. de 2

3, 6, 9, 12 multip de 3

$\frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{10}{12} \stackrel{2}{=} \frac{5}{6}$

Na questão 6, o aluno A17, também errou parcialmente, somando as probabilidades dos eventos “sair número par” com “sair número primo”, mas não subtraiu a probabilidade dos elementos comuns aos eventos. O mesmo erro ocorreu na questão 7.

Imagem 24: Resposta apresentada pelo aluno A3 nas questões 6 e 7.


06) Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

Primo = 2, 3, 5 $\rightarrow \frac{3}{6}$

Par = 2, 4, 6 $\rightarrow \frac{3}{6}$

Probabilidade = $\frac{1}{6}$

07) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?

multiplo de 2 = 2, 4, 6, 8, 10, 12

multiplo de 3 = 3, 6, 9, 12

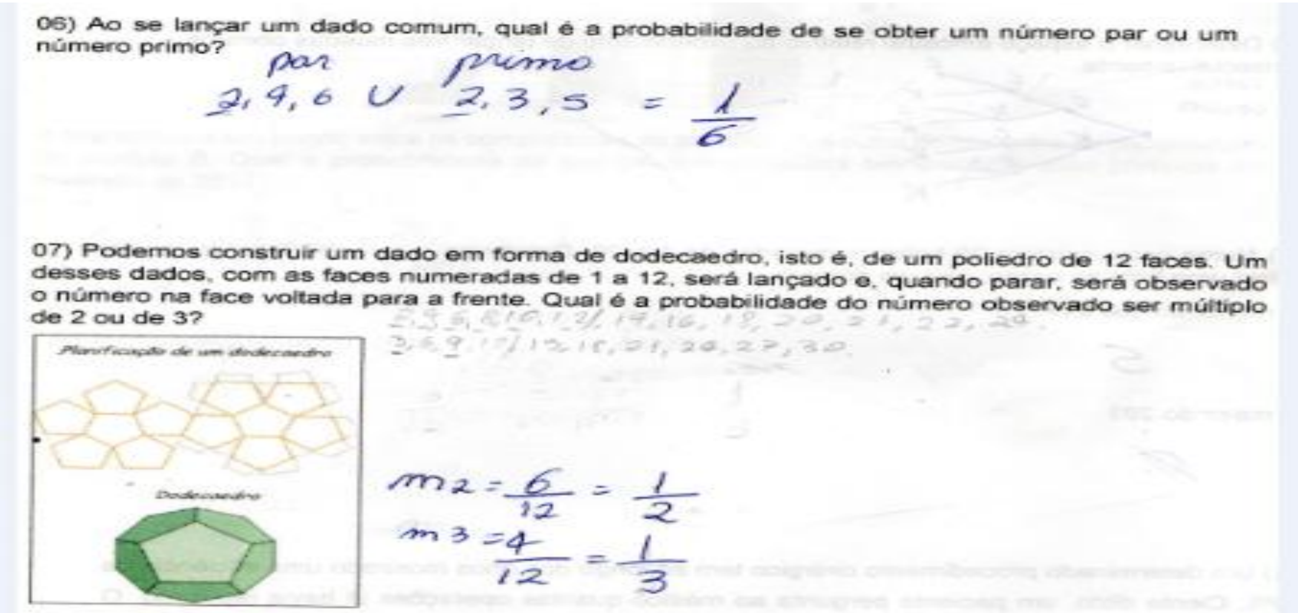
M2: $\frac{6}{12} \frac{:6}{:6} \frac{1}{2}$

M3 = $\frac{4}{12} \frac{:4}{:4} \frac{1}{3}$

Como podemos observar na imagem 25, o aluno A3 apresentou um erro parcial na questão seis, pois o discente calculou de maneira válida as probabilidades dos eventos sair número primo, obter número par e também a probabilidade da interseção obter número primo e par, mas não calculou a probabilidade de obter número par ou primo.

Na questão sete, o discente calculou de forma correta as probabilidades de obter número múltiplo de dois e número múltiplo de três, mas não calculou a probabilidade de obter múltiplo de dois e de três.

Imagem 25: Resposta apresentada pelo aluno A18 nas questões 6 e 7.



06) Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

par primo

$2,4,6 \cup 2,3,5 = \frac{1}{6}$

07) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?

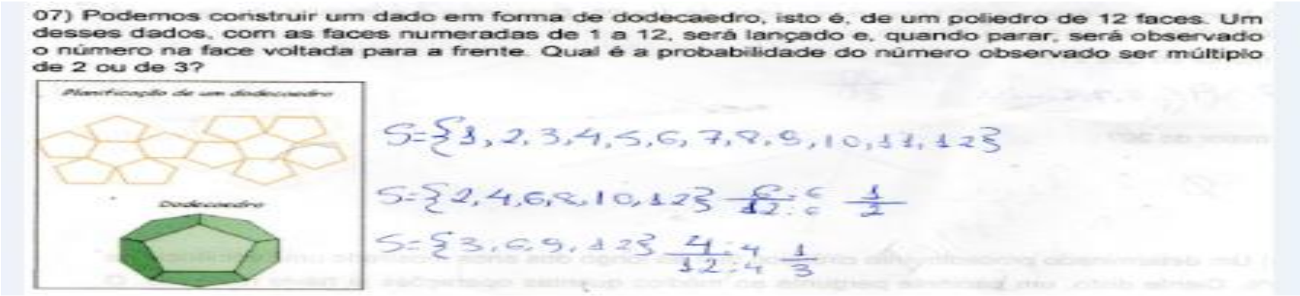
$m2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$m3 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Na questão seis o aluno A18, identifica os elementos dos eventos, mas não calculou a probabilidade deste eventos de forma correta apresentado uma resposta inválida para a questão.

Na questão sete o discente apresenta de forma correta as probabilidades do eventos obter múltiplo de dois e de três, mas não efetuou de forma válida a probabilidade da união de dois eventos não complementares

Imagem 26: Resposta apresentada pelo aluno A19 na questão 7



07) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?

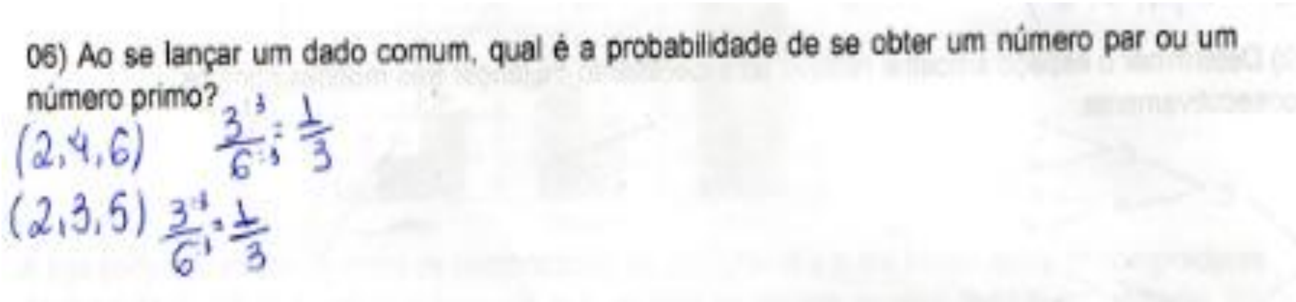
$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$S=\{2,4,6,8,10,12\}$ $\frac{6:6}{12:6}$ $\frac{1}{2}$

$S=\{3,6,9,12\}$ $\frac{4:4}{12:4}$ $\frac{1}{3}$

Como podemos observar na imagem 27, o aluno A19, calculou de forma correta as probabilidades de se obter um número múltiplo de 2 e também obter múltiplo de 3, mas não calculou a probabilidade da interseção e nem a probabilidade da união de dois eventos.

Imagem 27: Resposta apresentada pelo aluno A1 nas questão 6.



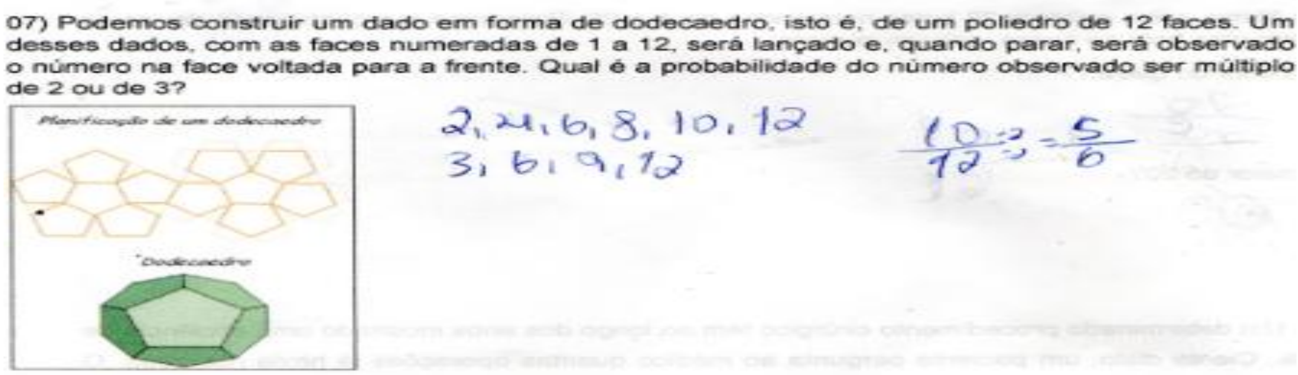
06) Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

$(2,4,6)$ $\frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{3}$

$(2,3,5)$ $\frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{3}$

Na questão 6, o aluno A1, errou parcialmente, pois calculou a probabilidade dos eventos, mas não apresentou uma única resposta para o evento “sair número par” ou sair “número primo”.

Imagem 28: Resposta apresentada pelo aluno A6 na sete.



07) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?

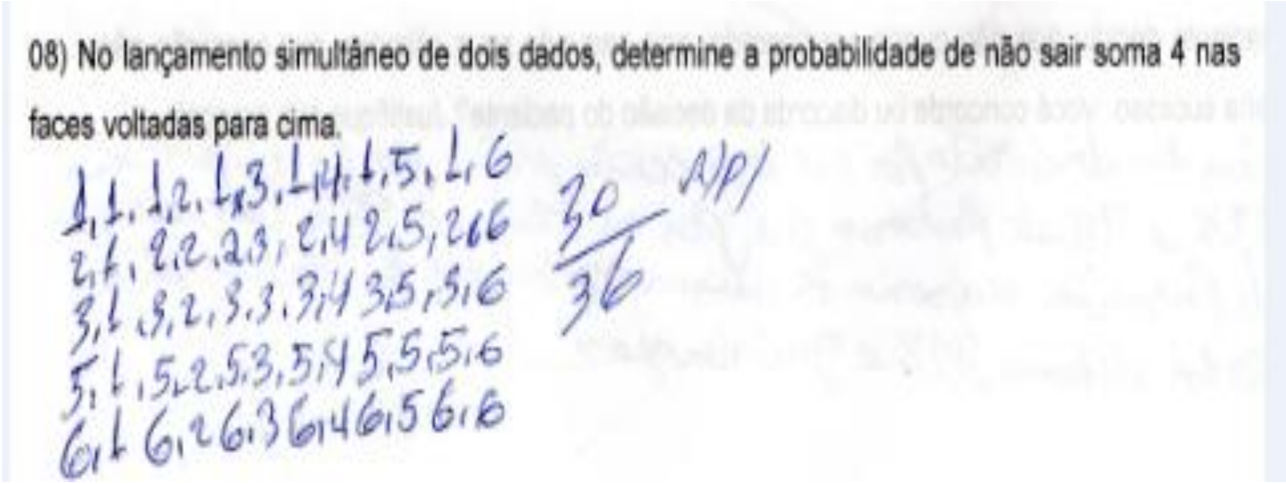
2, 4, 6, 8, 10, 12
3, 6, 9, 12

$\frac{10:2}{12:2} = \frac{5}{6}$

Na questão 7, o aluno A6 lista e, em seguida, soma o número de elementos do evento “múltiplo de dois” com o número de elementos do evento “múltiplo de três”, errou parcialmente, pois não subtraiu o número de elementos pertencentes a ambos os eventos, desta forma calculou a probabilidade incorreta da questão.

Agora, analisaremos os erros cometidos pelos alunos nas questões oito:

Imagem 29: Resposta apresentada pelo aluno A2 na questão oito.

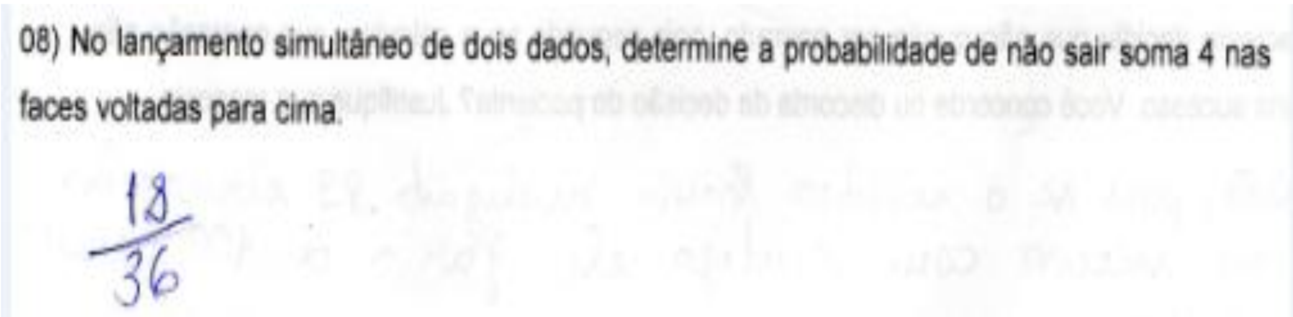

08) No lançamento simultâneo de dois dados, determine a probabilidade de não sair soma 4 nas faces voltadas para cima.

1,1. 1,2. 1,3. 1,4. 1,5. 1,6
2,1, 2,2. 2,3, 2,4 2,5, 2,6
3,1 3,2, 3,3, 3,4 3,5, 3,6
5,1 5,2 5,3, 5,4 5,5 5,6
6,1 6,2 6,3 6,4 6,5 6,6

$\frac{30}{36}$ N/P/

O aluno A2, listou 30 elementos do espaço amostral representativo da situação, mas não calculou a probabilidade do evento desejado de forma correta, dentre estes estavam os “sair soma 4”. Um erro de interpretação completa do enunciado.

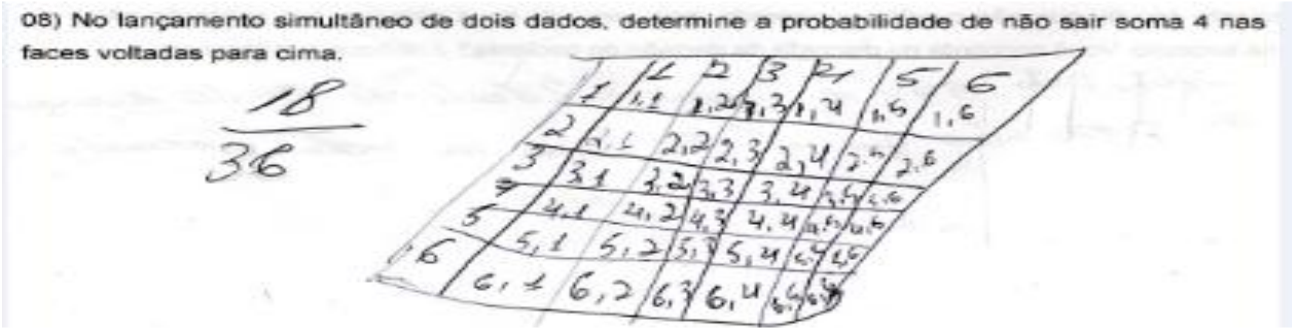
Imagem 30: Resposta apresentada pelo aluno A10 na questão oito.


08) No lançamento simultâneo de dois dados, determine a probabilidade de não sair soma 4 nas faces voltadas para cima.

$\frac{18}{36}$

Na questão 8, não foi possível verificar o erro cometido pelo aluno A10, apesar do mesmo ter identificado o espaço amostral corretamente.

Imagem 31: Resposta apresentada pelo aluno A15 na questão oito

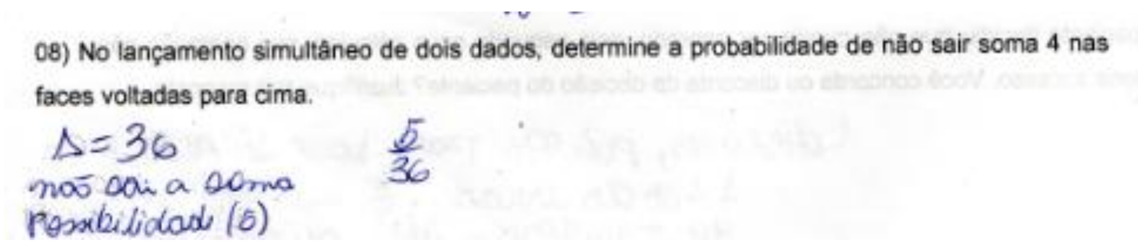


Na questão 8, não foi possível verificar o erro cometido pelo aluno A15, apesar do mesmo ter identificado o espaço amostral corretamente.

Imagem 32: Resposta apresentada pelo aluno A16 na questão oito.

Na questão 8, não foi possível verificar o erro cometido pelo aluno A16, apesar do mesmo ter identificado o espaço amostral corretamente.

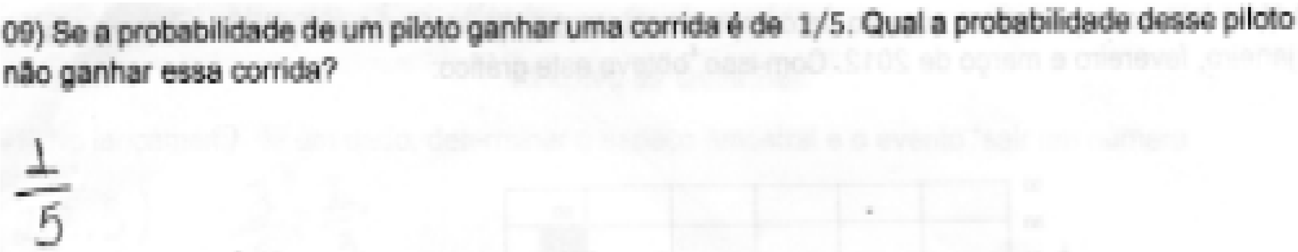
Imagem 33: Resposta apresentada pelo aluno A7 na questão oito.



O aluno A7, não listou numa tabela o espaço amostral, mas calculou de forma direta a probabilidade pedida, porém não identificou de forma correta o número de elementos do evento “não sair soma quatro”, levando-o a um resultado incorreto da questão.

Agora, analisaremos os erros cometidos pelos alunos nas questões nove.

Imagem 34: Resposta apresentada pelo aluno A1 na questão nove.

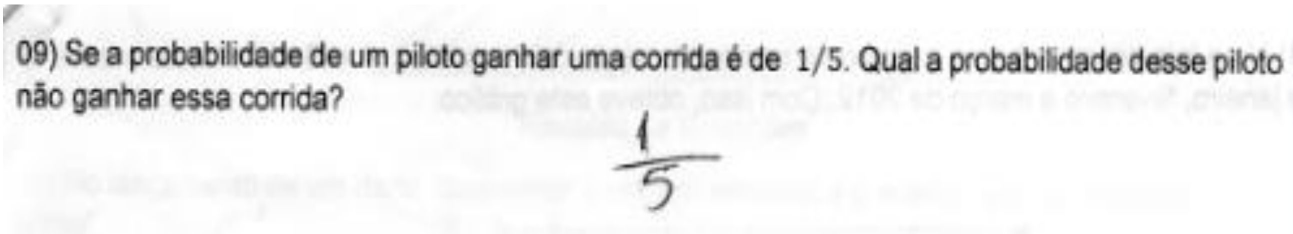


09) Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de 1/5. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

$\frac{1}{5}$

Na questão 9, o aluno A1 errou, o que pode ter sido causado pela falta de entendimento na interpretação do enunciado, confundiu a probabilidade de “ganhar” com a de “não ganhar” a corrida.

Imagem 35: Resposta apresentada pelo aluno A18 na questão nove.



09) Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de 1/5. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

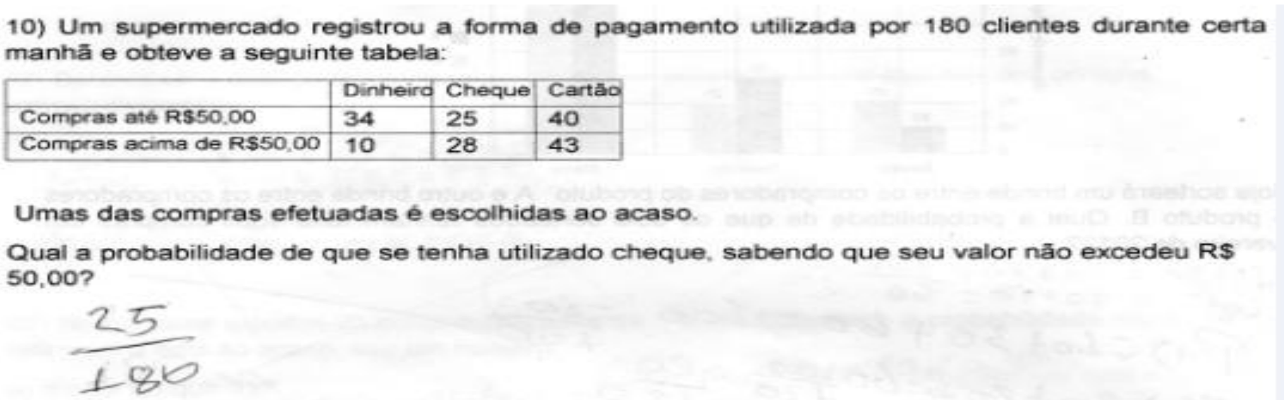
$\frac{1}{5}$

Na questão 9, o aluno A18 errou, o que pode ter sido causado pela falta de entendimento na interpretação do enunciado, confundiu a probabilidade de “ganhar” com a de “não ganhar” a corrida.

Agora, analisaremos os erros cometidos pelos alunos na questão dez:

As figuras: 34, 35, 36, 37, 38, 39 e 40, mostram a semelhança entre os erros cometidos pelos alunos.

Imagem 36: Resposta apresentada pelo aluno A2 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

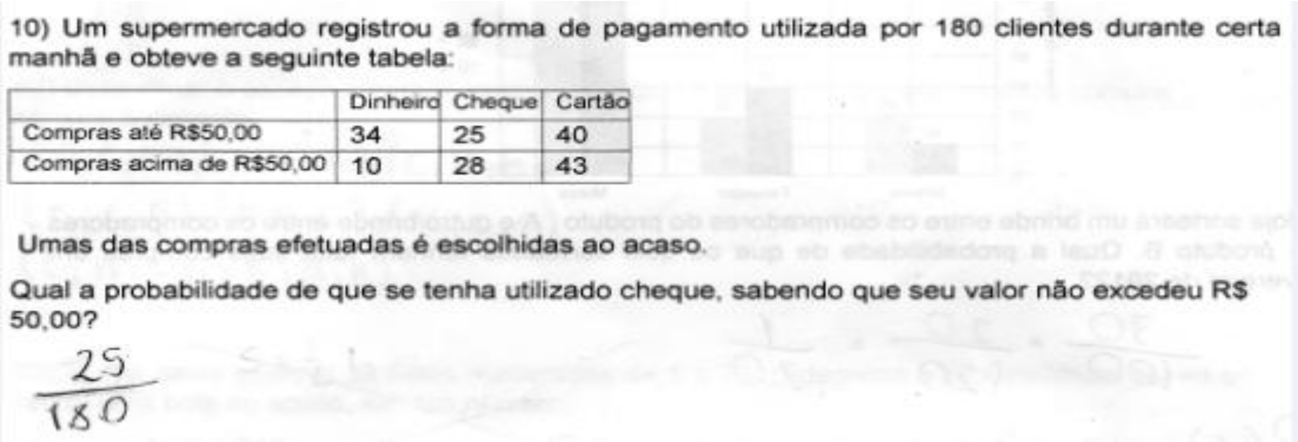
	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

$\frac{25}{180}$

Imagem 37: Resposta apresentada pelo aluno A5 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

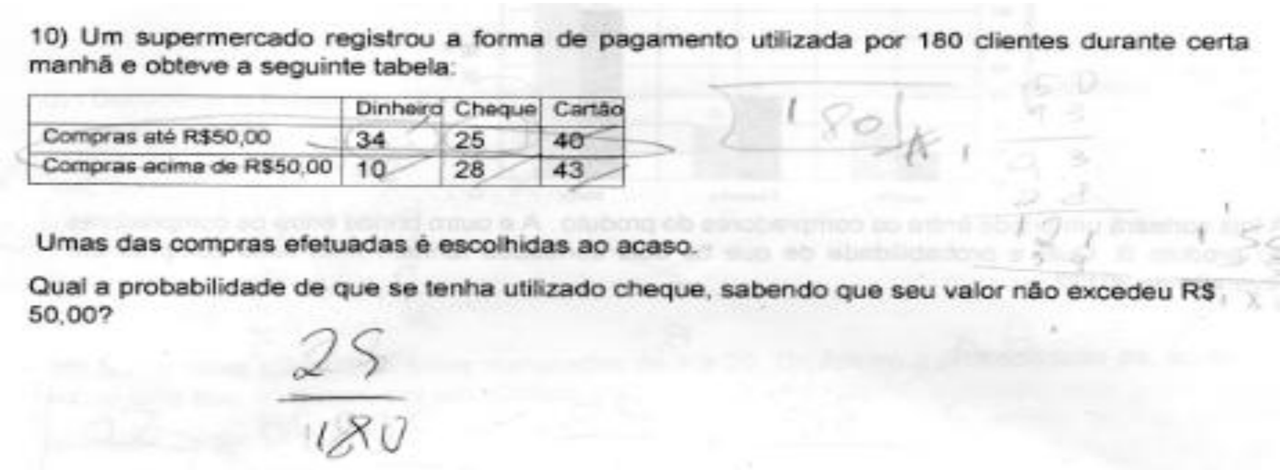
	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

$\frac{25}{180}$

Imagem 38: Resposta apresentada pelo aluno A6 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

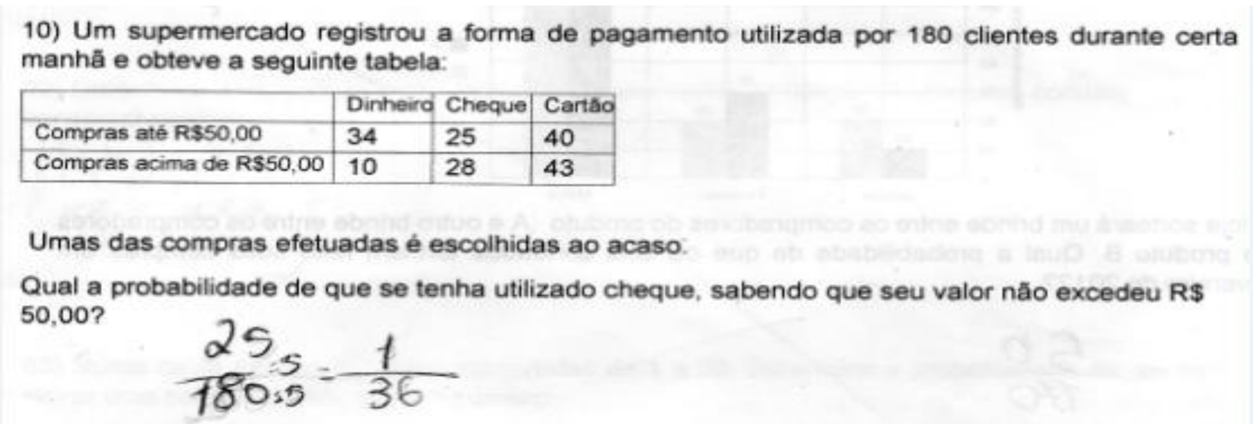
	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

$\frac{25}{180}$

Imagem 39: Resposta apresentada pelo aluno A10 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

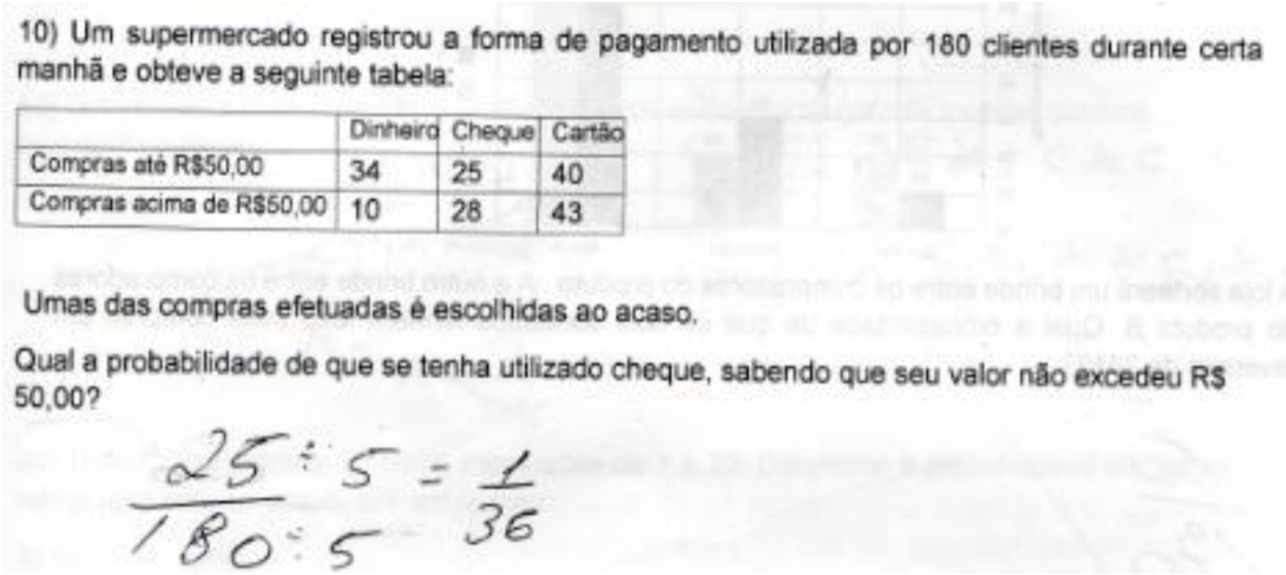
	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

$\frac{25:5}{180:5} = \frac{1}{36}$

Imagem 40: Resposta apresentada pelo aluno A15 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

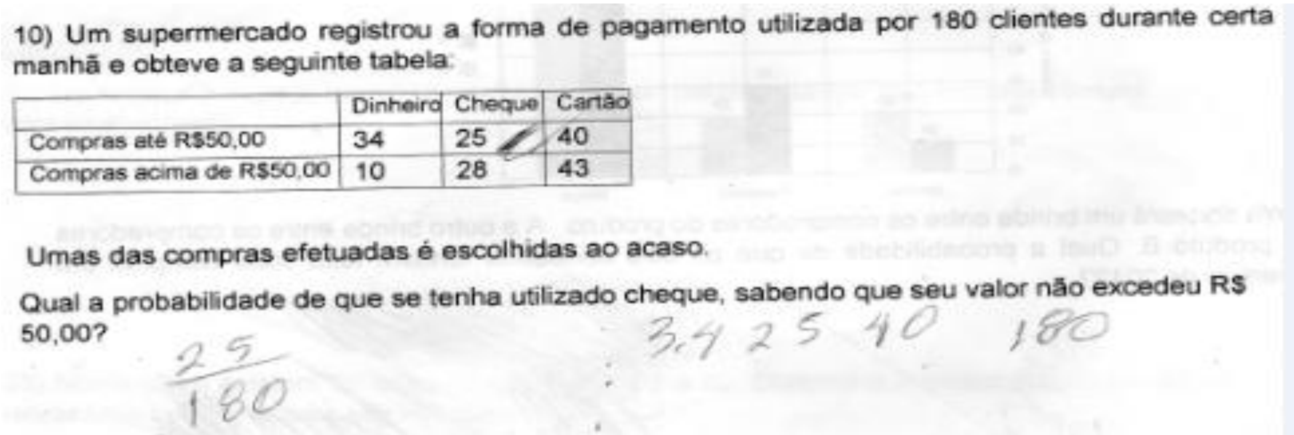
	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

$$\frac{25 \div 5}{180 \div 5} = \frac{1}{36}$$

Imagem 41: Resposta apresentada pelo aluno A16 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

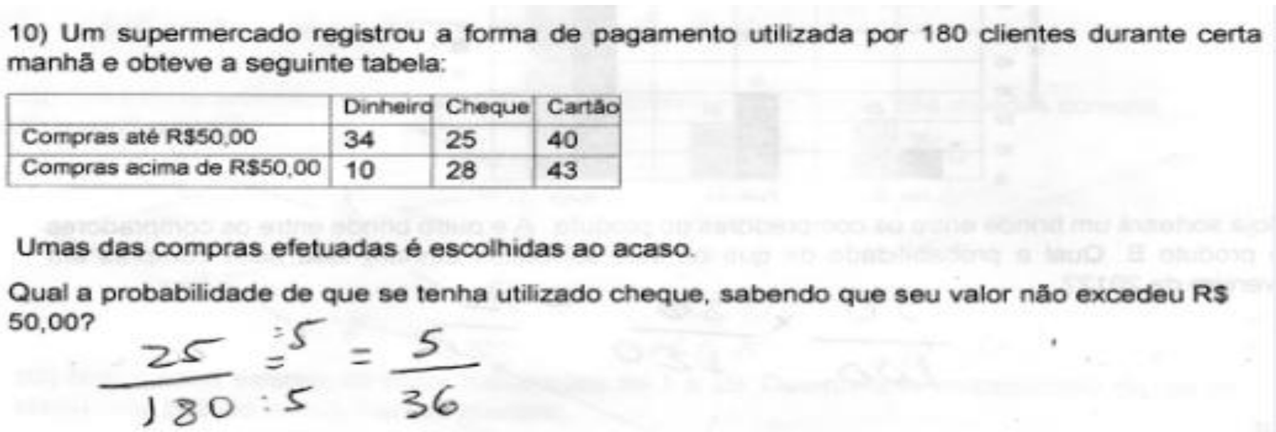
Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

$$\frac{25}{180}$$

3.4 25 40 180

Imagem 42: Resposta apresentada pelo aluno A17 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

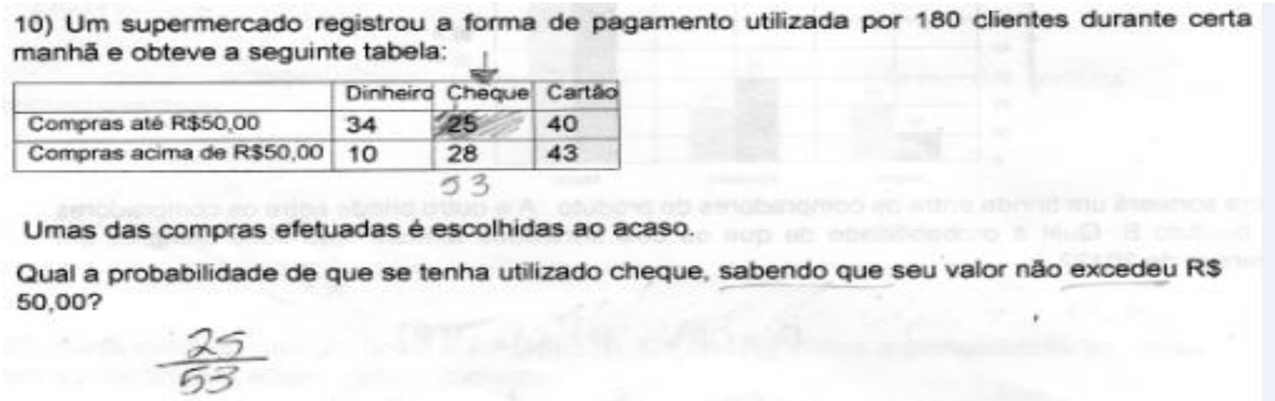
Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

$$\frac{25 \div 5}{180 \div 5} = \frac{5}{36}$$

Observamos que os erros cometidos por estes estudantes consistiu na identificação incorreta do espaço amostral contido no enunciado da questão, apesar de terem identificado de forma correta o número de elementos do evento “qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque”, talvez o fato da questão conter primeiro a pergunta e em seguida o condicionante caracterizado de forma explicita pela expressão “sabendo que”, tenha levado os discentes ao erro na interpretação e na “restrição” do espaço amostral.

Imagem 43: Resposta apresentada pelo aluno A14 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

53

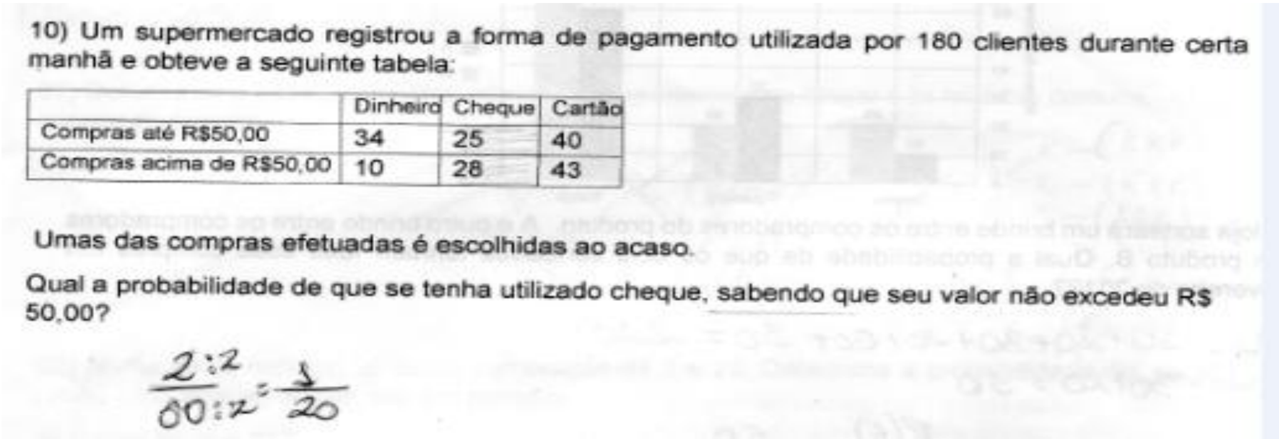
Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

$\frac{25}{53}$

O aluno A14, errou no momento de interpretar o fator condicionante “sabendo que” e inverteu o espaço amostral, consequentemente este fato o levou ao resultado incorreto da questão, mas este aluno identificou de forma correta o evento representativo do enunciado.

Imagem 44: Resposta apresentada pelo aluno A7 na questão dez.



10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

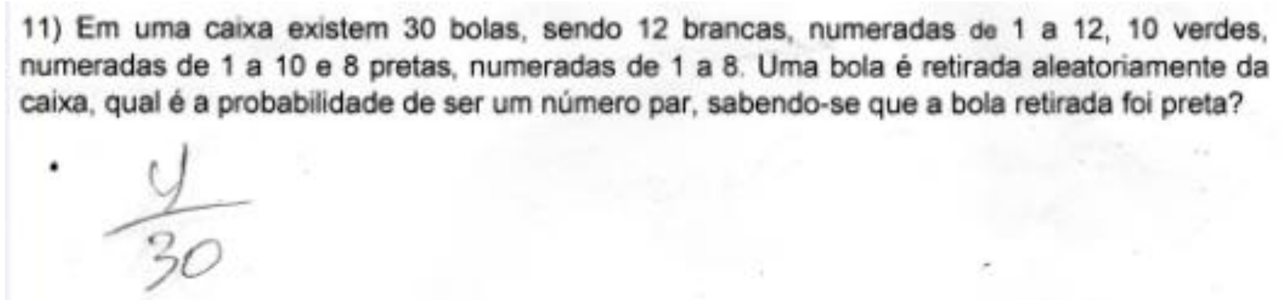
$\frac{2:2}{60:2} = \frac{1}{20}$

Na questão 10, o erro do aluno A7, ocorreu na interpretação da probabilidade condicional, talvez o aluno tenha considerado os eventos “utilizado cheque” e não excedeu R$50,00” como duas possibilidades favoráveis e não excedeu R$ 50,00” como os resultados favoráveis, de acordo com sua resposta dada.

A seguir, os erros cometidos pelos alunos na questão onze:

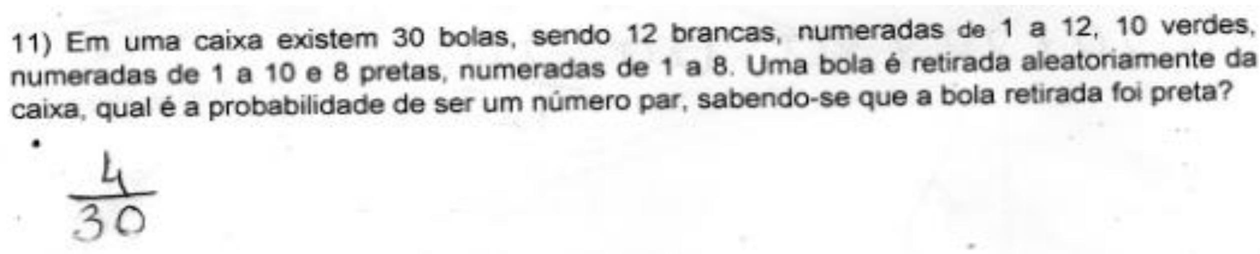
Na questão 11, podemos verificar que os alunos A2, A10 e A18, cometeram o mesmo erro. Podemos verificar nas imagens das respostas destes alunos a seguir:

Imagem 45: Resposta apresentada pelo aluno A2 na questão onze.


11) Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

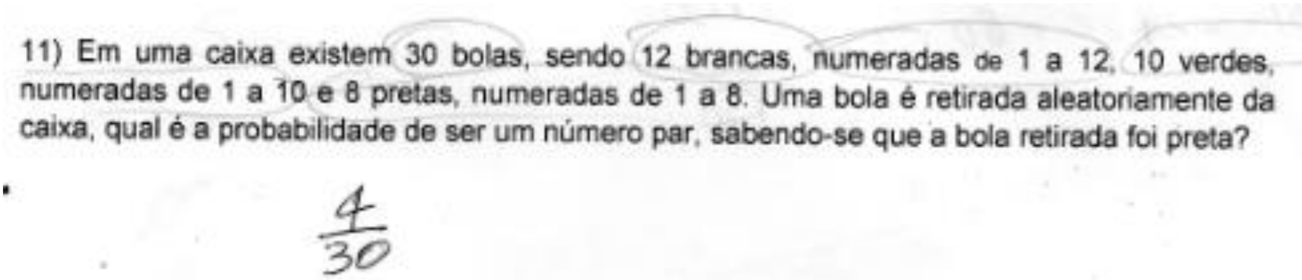
$\frac{4}{30}$

Imagem 46: Resposta apresentada pelo aluno A10 na questão onze.


11) Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

$\frac{4}{30}$

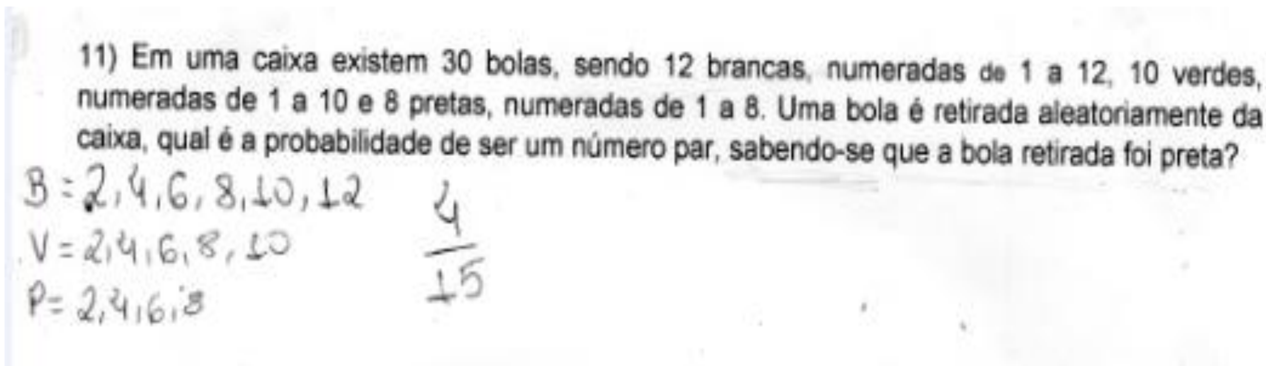
Imagem 47: Resposta apresentada pelo aluno A18 na questão onze.


11) Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

$\frac{4}{30}$

Estes alunos, apesar de terem identificado o evento corretamente, se equivocaram na “restrição” e identificação do espaço amostral, o que pode ter sido ocasionado pela interpretação e entendimento incompleto do enunciado.

Imagem 48: Resposta apresentada pelo aluno A1 na questão onze.


11) Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

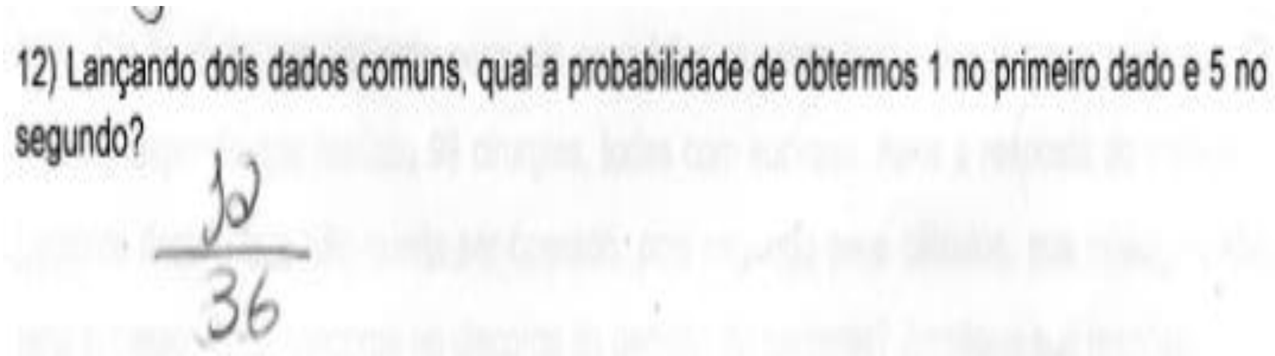
B = 2, 4, 6, 8, 10, 12
V = 2, 4, 6, 8, 10
P = 2, 4, 6, 8

$\frac{4}{15}$

Já o aluno A1, errou no momento de identificar o espaço amostral, caracterizado pela expressão “sabendo que”, como mostra a imagem, porém este estudante identifica corretamente o evento desejado.

Agora, analisaremos os erros cometidos pelos alunos nas questões 12:

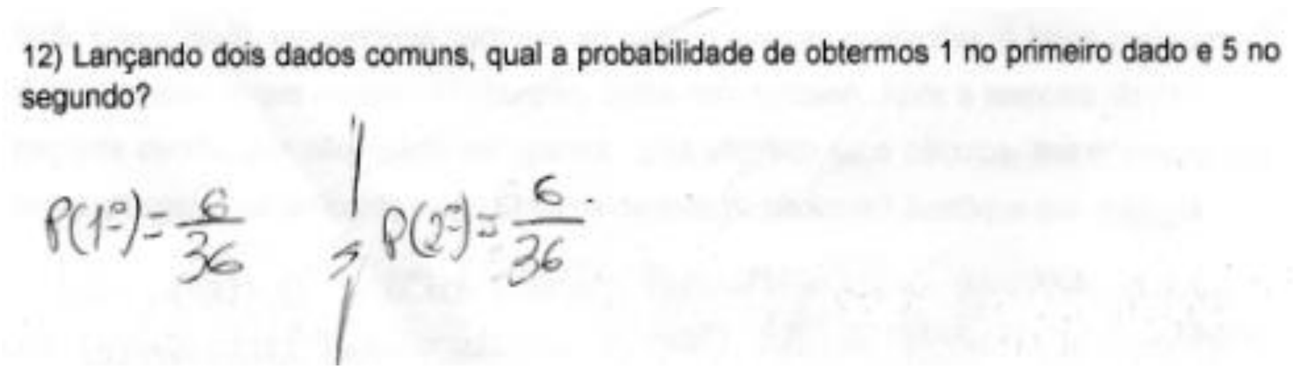
Imagem 49: Resposta apresentada pelo aluno A6 nas questões doze.


12) Lançando dois dados comuns, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

$\frac{12}{36}$

O erro cometido pelo aluno A6 pode ter sido ocasionado pela interpretação incorreta do enunciado, considerou que o evento desejado fosse ter saído 1 no primeiro dado ou 5 no segundo, chegando em um resultado incorreto da questão. O aluno confundiu a interseção, caracterizado pelo conectivo “e” com a união, caracterizado pelo conectivo “ou”.

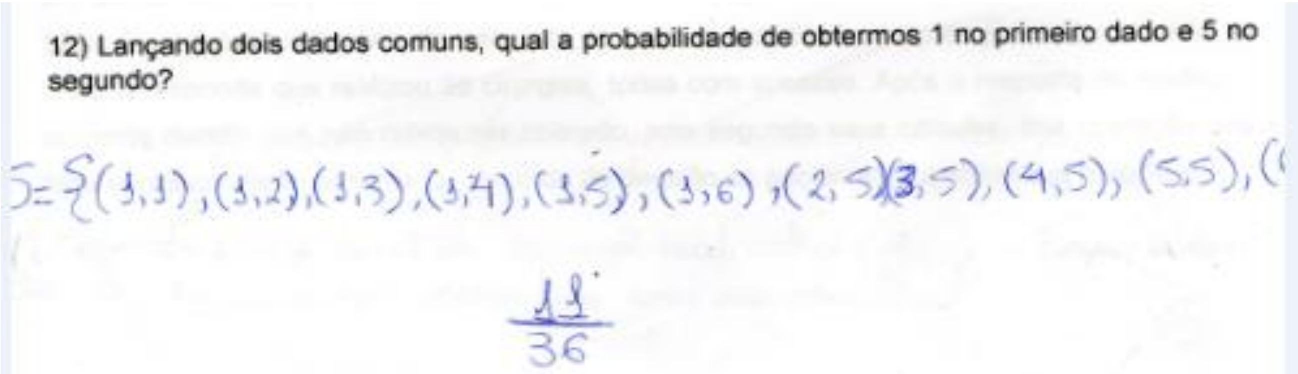
Imagem 50: Resposta apresentada pelo aluno A14 na questão doze.


12) Lançando dois dados comuns, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

$P(1^{\circ}) = \frac{6}{36}$ $P(2^{\circ}) = \frac{6}{36}$

O aluno A14, errou parcialmente, pois determinou a probabilidade de cada um dos eventos separadamente, mas não efetua a multiplicação, de acordo com o conceito de probabilidade de eventos independentes.

Imagem 51: Resposta apresentada pelo aluno A19 na questão doze.


12) Lançando dois dados comuns, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

S={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(

$\frac{11}{36}$

O aluno A19, errou na interpretação do enunciado, considerou como evento desejado os pares que continham o número um ou o número cinco, organizou em um conjunto, chegando em um resultado incorreto da questão.

A seguir, os erros cometidos pelos alunos na questão treze:

Imagem 52: Resposta apresentada pelo aluno A1 na questão treze.


13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

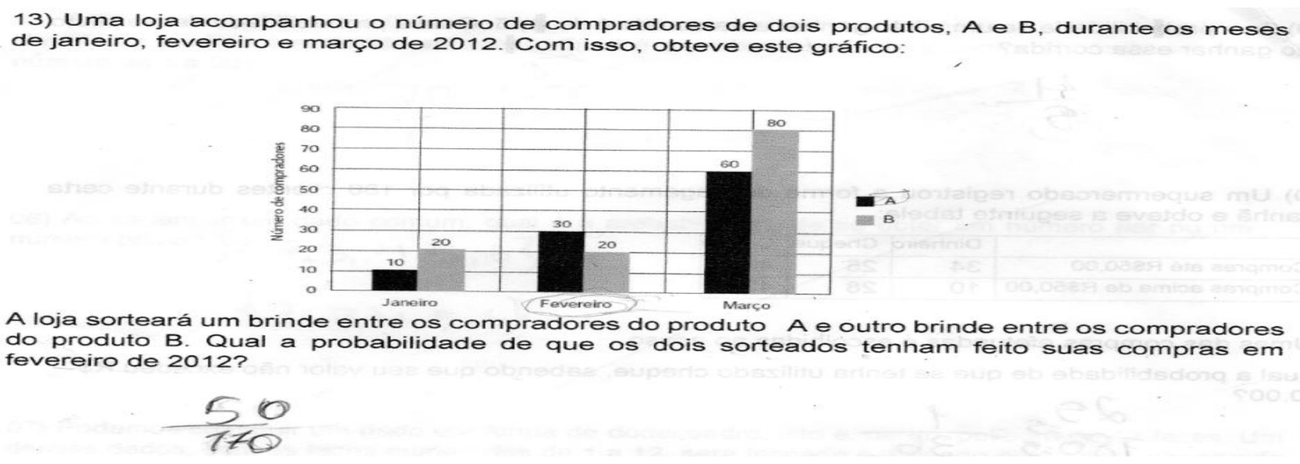
A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

$\frac{30}{20}$

Na questão 13, o aluno A1, errou na interpretação do enunciado sobre a probabilidade de eventos independentes, determinou a probabilidade considerando o número de elementos do conjunto A, no mês de fevereiro, como o evento desejado e, o número de elementos do conjunto B como o espaço amostral, calculando de forma incorreta a probabilidade.

Na questão 13, os alunos: A6, A15 e A16, erram na interpretação completa do enunciado, sobre a probabilidade de eventos independentes. Somam o número de elementos dos dois conjuntos (A e B), considerando-os como o evento desejado para o cálculo da probabilidade e, ainda, identificam o espaço amostral pela somatória dos números de compradores dos meses de janeiro e março. Como podemos verificar nas respostas a seguir:

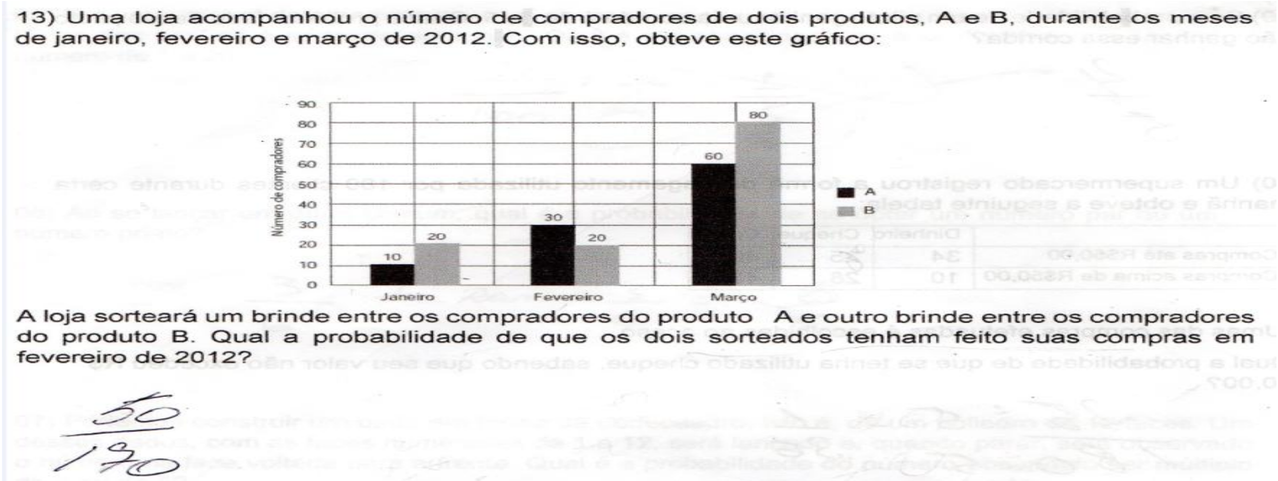
Imagem 53: Resposta apresentada pelo aluno A6 na questão treze.


13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

$\frac{50}{170}$

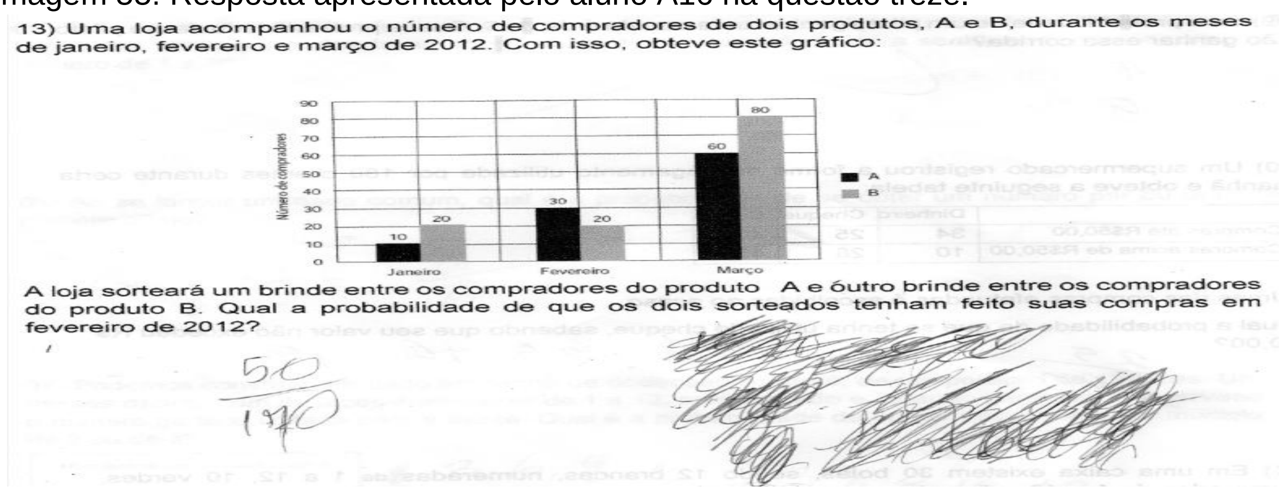
Imagem 54: Resposta apresentada pelo aluno A15 na questão treze.


13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

$\frac{50}{170}$

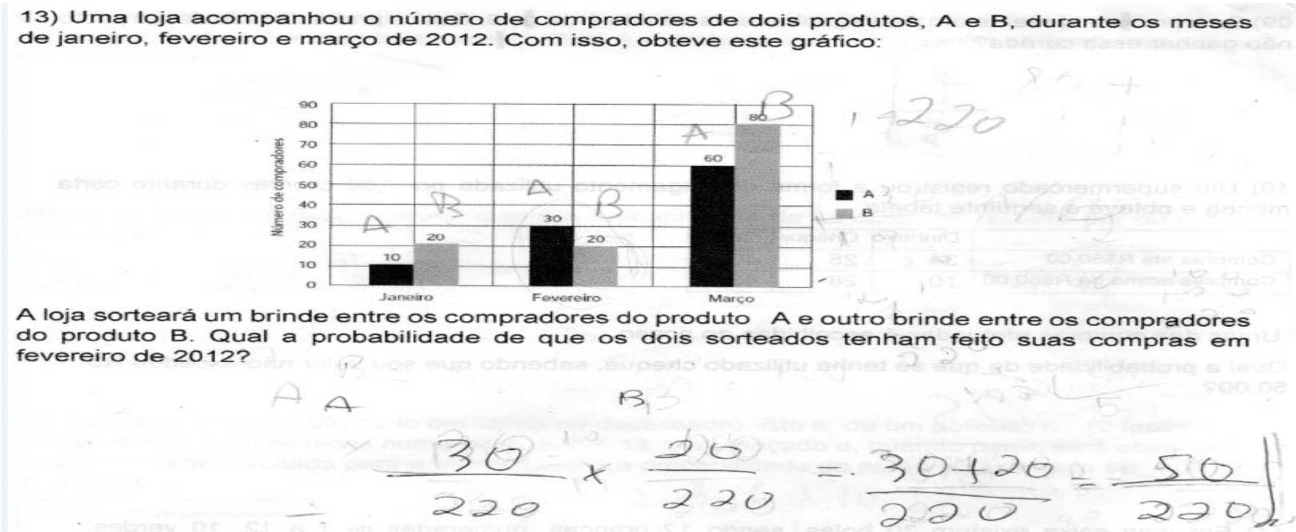
Imagem 55: Resposta apresentada pelo aluno A16 na questão treze.


13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

$\frac{50}{170}$

Imagem 56: Resposta apresentada pelo aluno A5 na questão treze.



13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

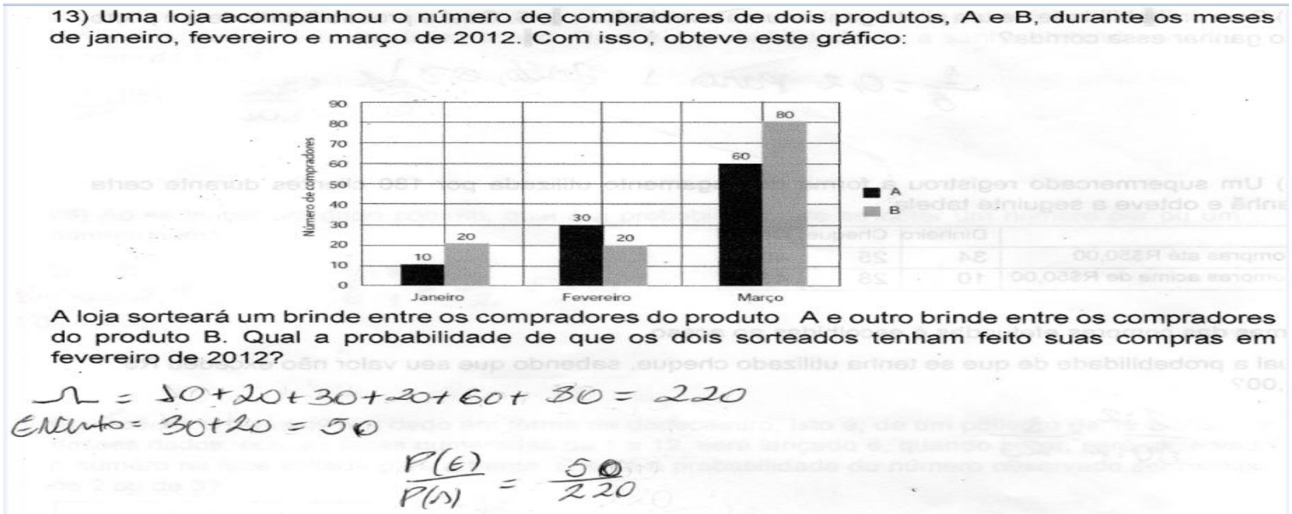
A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

A B

$\frac{30}{220} \times \frac{20}{220} = \frac{30+20}{220} = \frac{50}{220}$

O aluno A5, identificou os eventos desejados de forma correta, mas errou na identificação dos espaços amostrais de cada um dos eventos.

Imagem 57: Resposta apresentada pelo aluno A7 na questão treze.



13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

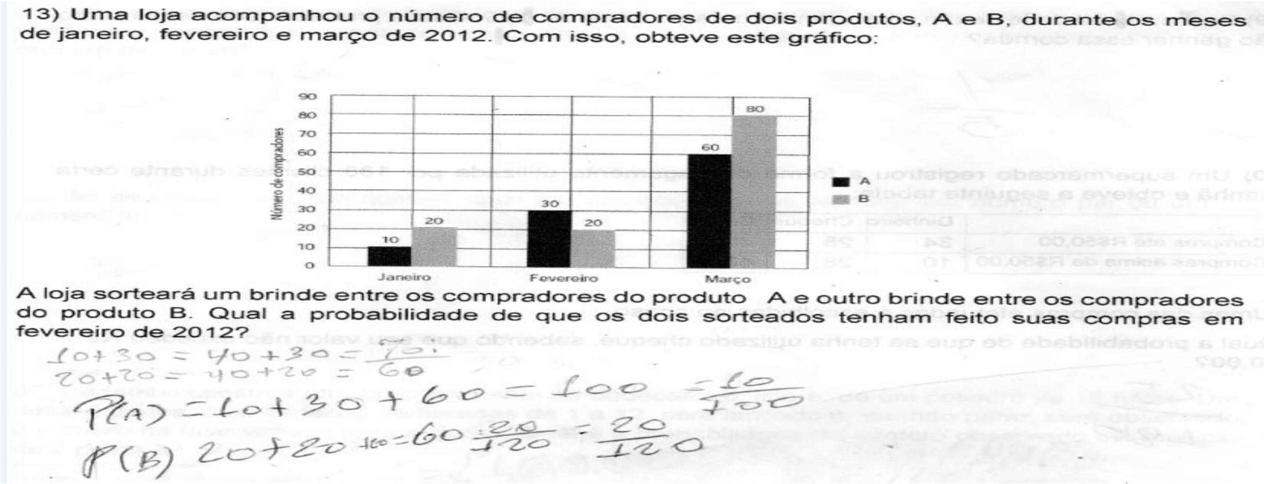
$\Omega = 10+20+30+20+60+80 = 220$

Evento $= 30+20 = 50$

$\frac{P(E)}{P(\Omega)} = \frac{50}{220}$

O aluno A7, errou na identificação dos eventos desejados, errou também identificação dos espaços amostrais de cada um dos eventos.

Imagem 58: Resposta apresentada pelo aluno A2 na questão treze.



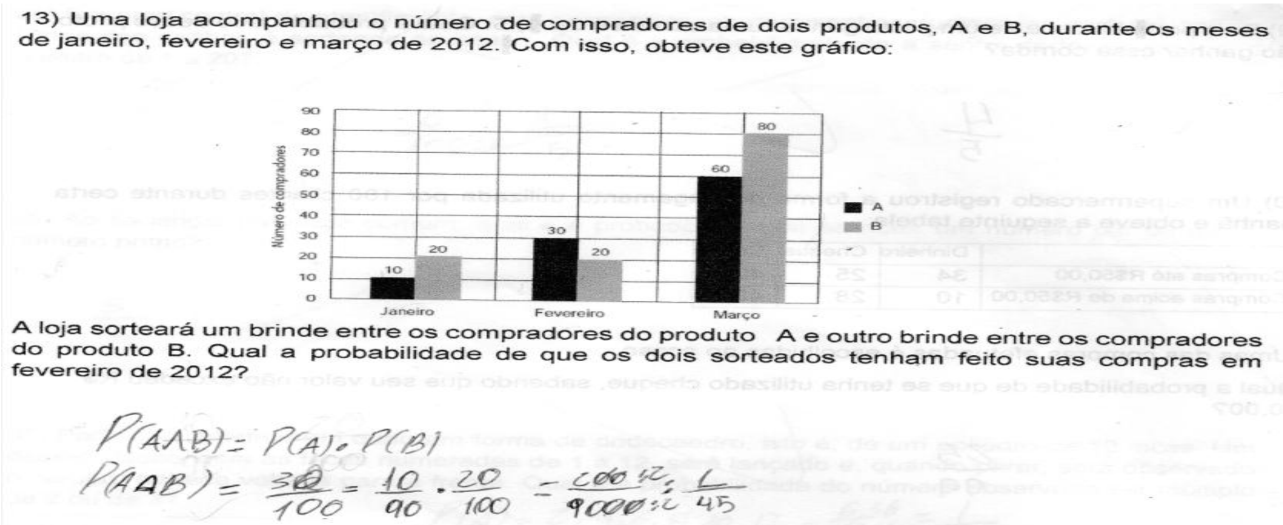
13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

$10+30 = 40+30 = 70$
$20+20 = 40+20 = 60$
$P(A) = 10+30+60 = 100 = \frac{10}{100}$
$P(B)\ 20+20 = 100 = 60 = \frac{20}{120} = \frac{20}{120}$

O aluno A2, errou na identificação dos eventos A e B, tomando como referência mês de Janeiro, porém determina de forma correta o valor dos espaços amostrais, consequentemente, obtém um valor incorreto para a questão.

Imagem 60: Resposta apresentada pelo aluno A11 na questão treze.



13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap B) = \frac{30}{100} = \frac{10}{90} \cdot \frac{20}{100} = \frac{200}{9000} = \frac{1}{45}$

O aluno A11, identifica de forma incorreta o número de elementos dos eventos A e B, bem como os espaços amostrais, contudo demonstra conhecimento na expressão e notação para o cálculo da probabilidade de eventos independentes.

5.5 Questões do tipo verdadeiro ou falso

Após analisarmos os erros cometidos pelos alunos nas questões do pós-teste, sintetizamos em um quadro as respostas dadas pelos participantes em relação aos conceitos estudados em probabilidade, durante a fase da experimentação. Elaboramos 15 questões que contemplavam conceitos verdadeiros e falsos, afim de verificarmos o entendimento do aluno em cada conceito trabalhado em sala de aula, como podemos verificar no quadro a seguir:

Quadro 44: Respostas dos participantes em relação aos conceitos estudados em probabilidade.

(Continua)

QUESTÃO	VERDADEIRO (%)	FALSO (%)	BRANCO (%)
1) O espaço amostral é o conjunto dos resultados possíveis de um evento.	100	0	0
2) Denominamos de evento a qualquer subconjunto do espaço amostral.	85	10	5
3) A probabilidade de um evento é a razão entre o número de possibilidades desejados do evento pelo número total de possibilidades do evento.	95	0	5
4) O intervalo de variação da probabilidade é de 0 até 1.	70	30	0
5) Dois eventos, A e B, de um mesmo espaço amostral, são complementares se $A\cap B = \emptyset$ e $A\cup B=S$.	55	45	0
6) Se A e B são eventos complementares, então: $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.	80	20	0
7) Se A e B são eventos complementares, então: $P(A\cup B) = P(A) – P(B)$.	15	85	0
8) Se A e B são dois eventos complementares, então: $P(A) + P(B) = 1$.	75	25	0
9) Se A e B são dois eventos complementares, então: $P(A) + P(B) = 100$.	25	75	0
10) Se A e B não são complementares, então: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) – P(A\cap B)$.	65	35	0
11) Se A e B não são complementares, então: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) +P(A\cap B)$.	5	95	0
12) A probabilidade condicional P(B/A) é igual ao quociente das probabilidades da ocorrência conjunta destes eventos pela probabilidade do evento que já ocorreu ou seja, a probabilidade da	95	5	0

(Conclusão)

interseção $P(A \cap B)$ destes eventos dividido pela probabilidade do evento que já ocorreu P(A).			
13) Dois eventos A e B são independentes, se $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.	60	40	0
14) Se dois eventos são independentes, então: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.	80	20	0
15) Se dois eventos são independentes, então: $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.	10	90	0

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

As três primeiras questões, sobre os conceitos de espaço amostral, eventos e o conceito clássico de probabilidade, verificamos que os alunos assinalaram 100%, 85% e 95%, respectivamente, de forma correta sobre a afirmativa, demonstrando de forma positiva o aprendizado destes conceitos condizentes com os resultados obtidos no pós-teste. A questão quatro sobre o intervalo de variação da probabilidade, houve 70% de alunos que opinaram de forma satisfatória sobre este conceito.

Como podemos verificar no quadro, a questão cinco sobre o conceito de eventos complementares, houve um elevado índice de alunos (45%), que assinalou ser falso esta afirmativa, contudo, 80% dos alunos assinalou ser verdadeira a questão seis e 75% a questão oito, mostrando que a maioria dos alunos lembraram do conceito de eventos complementares e associaram a expressão matemática verdadeira para o cálculo da probabilidade envolvendo o referido conceito.

Na questão dez, 35% dos participantes assinalaram ser falsa esta afirmativa, podemos relacionar com os erros cometidos pelos alunos nas questões seis e sete do pós-teste, por exigirem o conhecimento de eventos complementares e não complementares, e o cálculo de suas probabilidades subjacentes.

A questão doze, com 95% de afirmações verdadeiras, demonstrou que os alunos lembraram de forma satisfatória o conceito de probabilidade condicional, já a questão treze, apenas 60% de afirmações verdadeiras sobre o conceito de eventos independentes, mas 80% dos participantes associou a expressão matemática de forma satisfatória para o cálculo da probabilidade de eventos independentes.

5.6 Correlação entre as notas dos testes

Após analisarmos as respostas dadas pelos estudantes em relação aos conceitos trabalhados em cada atividade durante a fase da experimentação, apresentaremos a análise relacionando algumas variáveis obtidas no momento inicial da experimentação, as informações foram obtidas por meio do questionário com as questões socioeconômicas e educacionais dos participantes da pesquisa. A seguir, a correlação entre dificuldade em aprender matemática e as notas retiradas pelos participantes:

		DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA		
		Não	Um pouco	Muito
SUAS NOTAS DE MATEMÁTICA	Acima da média	(A_7,1,8), (A_{20}, 4,13)	(A_8, 2,13), (A_9, 0,13), (A_{12},8,12), (A_{17}, 2,10), (A_{18},1,9)	
	Na média		(A_3, 1,10) (A_4, 3,13), (A_5, 0,10) (A_6, 0,9), (A_{10}, 1,10), (A_{11}, 3,12), (A_{13}, 2,12), (A_{15}, 0,8), (A_{16}, 0,8), (A_{19}, 1,11)	
	Abaixo da média		(A_1, 0, 7) A_{14}(1,11)	(A_2, 0,9)

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A tabela acima mostra que 25% dos discentes (A_8, A_9, A_{12}, A_{17}, A_{18}) possuem um pouco de dificuldade em aprender matemática e suas notas em matemática geralmente são acima da média. O aluno A_9 apresentou um resultado elevado no pré-teste, acertou 8 questões, e os discentes A_8 e A_{17}, tiveram um desempenho baixo, acertaram apenas 2 questões, bem como o A_{18} acertou 1 questão e o discente A_9 não obteve acerto. Os educandos A_3, A_4, A_5, A_6, A_{10}, A_{11}, A_{13}, A_{15}, A_{16}, A_{19} que disseram ter um pouco de dificuldade em aprender matemática e que geralmente suas notas são na média apresentaram um baixo rendimento no pré-teste (A_5, A_6, A_{15} e A_{16} não obtiveram acertos, A_3, A_{10} e A_{19} acertaram apenas 1 questão, o discente A_{13} acertou 2 questões e os estudantes A_4 e A_{11} acertaram 3 questões). Estes educandos representam 50% da amostra. Os alunos A_1 e A_{14} informaram ter um pouco de dificuldade em aprender matemática e que geralmente suas notas são abaixo da média, situação confirmada na aplicação do pré-teste, no qual o aluno A_1 não acertou nenhuma questão e o aluno A_{14} acertou apenas uma, porém no pós-teste apresentaram melhoras significativas, A_1 acertou 7 e A_{11} acertou 12 questões.

O percentual de alunos que informaram que não tem dificuldades em aprender matemática e que suas notas geralmente são acima da média foi de 10%. Apesar destes discentes gostarem de matemática o resultado do pré-teste mostrou um baixo desempenho, pois, A_7 acertou apenas 1 questão e A_{20} acertou 4 questões.

O único aluno que informou ter muita dificuldade em aprender matemática e que geralmente suas notas são baixo da média foi o discente A_2(0,9), fato confirmado na aplicação do pré-teste, no qual ele não acertou nenhuma questão, contudo seu desempenho melhorou significativamente no pós-teste, no qual acertou 9 questões. A seguir apresentamos os dados referentes às notas, dificuldade em aprender matemática e o costume que os discentes tem de estudar matemática.

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Não</td><td>Um pouco</td><td>Muito</td></tr>
<tr><td rowspan="5">VOCÊ COSTUMA ESTUDAR MATEMÁTICA FORA DA ESCOLA?</td><td>Só no período de prova</td><td></td><td>(A_4, 3,13), (A_{14}, 1,11)</td><td>(A_2, 0,9)</td></tr>
<tr><td>Só na véspera da prova</td><td></td><td>(A_{13}, 2,12)</td><td></td></tr>
<tr><td>Só nos fins de semana</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Todo dia</td><td>(A_{20}, 4,13)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Alguns dias da semana</td><td>(A_7, 1,8)</td><td>(A_1 ,0, 7), (A_3, 1,10), (A_5, 0,10), (A_6, 0,9), (A_8 2,13), (A_9,0,13), (A_{10}, 1,10), (A_{11}, 3,12),(A_{12}, 8,12),(A_{15}, 0,8), (A_{16}, 0,8), (A_{17}, 2,10), (A_{18}, 1,9), (A_{19}, 1,11),</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A tabela acima mostra que apenas 10% dos discentes (A_4 e A_{14}) possuem o costume de estudar matemática só no período de prova e possuem um pouco de dificuldade em aprender esta disciplina. Os dois alunos apresentaram desempenhos baixos no pré-teste, A_4 acertou 3 questões e A_{14} acertou apenas 1 questão. O único aluno que informou que costuma estudar matemática só no período de prova e muita dificuldade em aprender matemática foi o aluno A_2, fato confirmado pelo seu desempenho no pré-teste.

Apenas o aluno A_{13}, informou que costuma estudar matemática só na véspera da prova e um pouco de dificuldade em aprender matemática, acertou no pré-teste apenas 2 questões, porém seu desempenho melhorou notadamente no pós-teste, no qual o discente obteve 12 acertos.

O discente A_{20} informou que costuma estudar matemática todo dia e não tem dificuldade nesta disciplina, fato confirmado pelo seu desempenho no pós-teste, acertou as 13 questões do teste, apesar de ter acertado apenas 4 questões no pré-teste.

O discente A_7 informou que costuma estudar matemática alguns dias da semana e não tem dificuldade em aprender matemática, contudo o desempenho deste estudante foi baixo no pré-teste obteve apenas1 acerto e, no pós-teste somente 8 questões.

Os discentes A_1, A_3, A_5, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, que disseram estudar matemática alguns dias da semana e ter um pouco de dificuldade nesta disciplina, representam 70% da amostra. O discente A_{12} apresentou um desempenho expressivo no pré-teste, com 8 acertos, porém os demais apresentaram desempenhos baixos e variados (entre 0 e 3). É importante ressaltar o significativo aumento nos acertos no pós-teste destes estudantes. A seguir apresentamos os dados referentes às notas, distração nas aulas de matemática e dificuldade em aprender matemática:

		DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA		
		Não	Um pouco	Muito
VOCÊ SE DISTRAI NAS AULAS DE MATEMÁTICA?	Não, eu sempre presto atenção.	(A_{20}, 4,13), (A_7, 1,8)	(A_5, 0,10), (A_9, 0,13), (A_{10}, 1,10), (A_{11}, 3,12), (A_{12}, 8,12), (A_{13}, 2,12), (A_{14}, 1,11), (A_{15}, 0,8), (A_{16}, 0,8), (A_{17}, 2,10), (A_{19}, 1,11)	(A_2, 0,9)
	Sim, eu não consigo prestar atenção.		(A_6, 0,9)	
	Na maioria das vezes eu me distraiu nas aulas de matemática.		(A_1, 0, 7), (A_3,1,10), (A_4, 3,13) (A_8, 2,13), (A_{18}, 1,9)	

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A tabela acima mostra que 10% dos discentes A_{20}, A_7 sempre prestam atenção nas aulas de matemática e não tem dificuldade nesta disciplina. Os dois alunos apresentaram um desempenho baixo no pré-teste, porém no pós-teste apresentaram melhorias satisfatórias (13 e 8 acertos), corroborando com suas informações sobre a participação e a dificuldade em matemática.

Os educandos A_5, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{19} que disseram que sempre prestam atenção nas aulas de matemática e têm um pouco de dificuldade em aprender esta disciplina, representam 55% da amostra. Apesar do baixo rendimento da maioria destes discentes no pré-teste, apresentaram desempenhos significativos no pós-teste A_{16} e A_{16} tiveram 8 acertos, A_{10}, A_5 e A_{17} obtiveram 10 acertos, A_{14} e A_{19} tiveram11 acertos A_{11}, A_{12} e A_{13} pontuaram 12 acertos e A_9 obteve 13 acertos, indicando que mesmo com um pouco de dificuldade, mas tendo atenção nas aulas o discente pode melhorar consideravelmente seu desempenho. O único aluno que informou que sempre presta atenção nas aulas de matemática e tem muita dificuldade em matemática foi o A_2.

O percentual de alunos que informaram que na maioria das vezes se distraem nas aulas de matemática e tem um pouco de dificuldade nesta disciplina apresentaram um baixo rendimento no pré-teste. Esses educandos representam 25% da amostra. Apenas o aluno A_6 informou que não consegue prestar atenção na aula de matemática e tem um de dificuldade nesta disciplina, fato confirmado com seu desempenho no pré-teste, nenhum acerto, contudo este aluno apresentou um bom desempenho no pós-teste, acertou 9 questões. A seguir apresentamos os dados referentes às notas, quem o auxilia nas tarefas extraclasse de matemática e dificuldade em aprender matemática:

		DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA		
		Não	Um pouco	Muito
QUEM O AUXILIA NAS TAREFAS EXTRACLASSE DE MATEMÁTICA?	Professor particular		(A_5, 0,10), (A_{15}, 0,8)	
	Pai			
	Mãe			
	Irmão		(A_{10}, 1,10)	
	Amigo(a)		(A_{19}, 1,11), (A_{13}, 2,12), (A_{14}, 1,11)	
	Ninguém	(A_7, 1,8), (A_{20}, 4,13)	(A_1 ,0, 7), (A_3, 1,10), (A_4, 3,13), (A_6, 0,9), (A_{11}, 3,12), (A_{12}, 8,12), (A_{16}, 0,8), (A_{17}, 2,10), (A_{18}, 1,9)	
	Outros		(A_8, 2,13), (A_9, 0,13),	(A_2, 0,9)

FONTE: Pesquisa de campo (2017)

A tabela acima mostra que 10% dos discentes (A_5 e A_{15}) são auxiliados por professor particular nas tarefas extraclasse de matemática e tem um pouco de dificuldade nesta disciplina. Os dois alunos não obtiveram acertos no pré-teste, contudo seus desempenhos foram significativos no pós-teste.

Os educandos A_{19}, A_{13}, A_{14} que disseram receber auxílio de amigo(a) nas tarefas extraclasse de matemática e um pouco de dificuldade em matemática, representam 15% da amostra.

O percentual de educandos que informaram que ninguém os auxilia nas tarefas extraclasse de matemática foi de 55%, sendo que A_7 e A_{20} não recebem auxílio e não tem dificuldade em matemática, enquanto os discentes A_1, A_3, A_4, A_6, A_{11}, A_{12}, A_{16}, A_{17}, A_{18} não recebem auxílio e tem um pouco de dificuldade em matemática, contudo, estes discentes apresentaram desempenhos significativos no pós-teste.

Os educandos A_8 e A_9 representam 10% da amostra informaram que outras pessoas lhes auxiliam nas tarefas de matemática e tem um pouco de dificuldade nesta disciplina. O discente A_2 informou que outras pessoas o auxilia nas tarefas de matemática e tem muita dificuldade em matemática, estes estudantes apresentaram um baixo rendimento no pré-teste, mas seus desempenhos melhoraram consideravelmente no pós-teste.

5.7 Coeficiente de Correlação Linear de Pearson dos Testes

Segundo Barbeta (2012, p. 254), o coeficiente de Pearson é indicado para auxiliar na análise da correlação linear entre duas variáveis existentes, após comparação das variáveis, calcula-se o coeficiente linear de Pearson (r), pertencente ao intervalo de $-1 \leq r \leq 1$.

O resultado calculado para o coeficiente, determina o tipo de classificação da correlação:

Quadro 45: Classificação da Correlação

(Continua)

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO	CORRELAÇÃO
$r = 1$	Perfeita positiva
$0,8 \leq r < 1$	Forte positiva
$0,5 \leq r < 0,8$	Moderada positiva
$0,1 \leq r < 0,5$	Fraca positiva
$0 < r < 0,10$	Ínfima positiva
$r = 0$	Nenhuma correlação

Conclusão

$-0,1 < r < 0$	Ínfima negativa
$-0,5 < r \leq -0,1$	Fraca negativa
$-0,8 < r \leq -0,5$	Moderada negativa
$-1 < r \leq -0,8$	Forte negativa
$r = -1$	Perfeita negativa

Fonte: Adaptado de Barbetta (2012, p. 258)

A comparação de variáveis exemplificada no quadro nos mostra a possibilidade de identificar a intensidade relacionada ao grau de associação; e a direção da correlação linear identificada pelos valores numéricos positivos e negativos.

O resultado pode ser demonstrado por uma representação gráfica denominada de digrama de dispersão, também chamado de "nuvem de pontos". Nesta as variáveis são representadas por pontos num sistema cartesiano sob a forma de pares ordenados (x, y), onde x é um valor de uma variável e y é o correspondente valor da outra variável. (BARBETTA, 2012, p. 304).

Na primeira correlação serão consideradas as seguintes variáveis: exercer atividade remunerada e a diferença das notas no pré-teste e pós-teste. Teremos então:

Quadro 46: Parametrização dos dados – exercer atividade remunerada

EXERCE ATIVIDADE REMUNERADA	PARAMETRIZAÇÃO
Não	1
Ás vezes	2
Sim	3

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quadro 47: Correlação entre a diferença das notas nos testes e exercer atividade remunerada

(Continua)

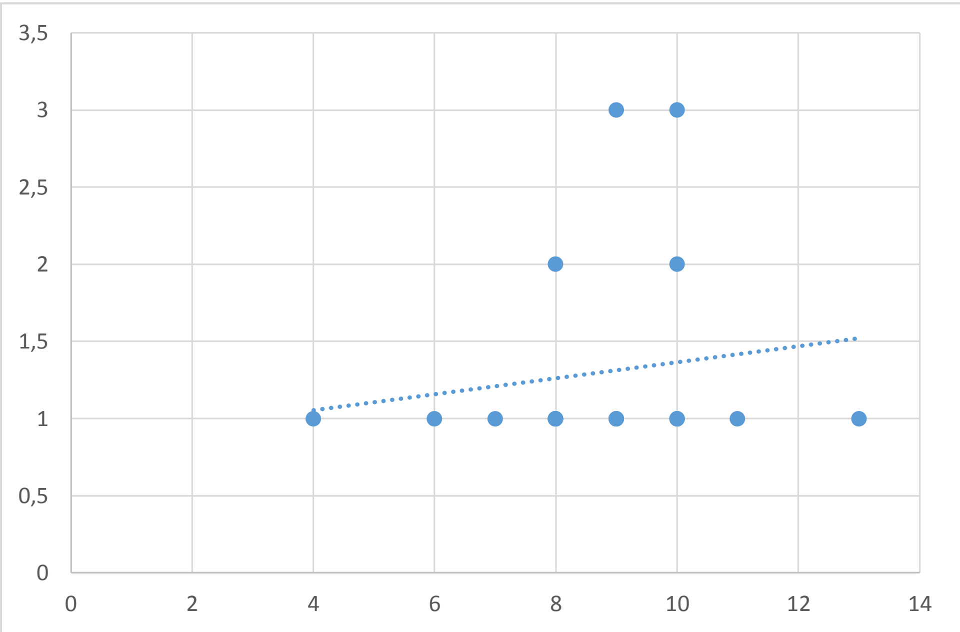
ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	TRABALHA REMUNERADO
A1	0	7	7	1
A2	0	9	9	1
A3	1	10	9	1
A4	3	13	10	3
A5	0	10	10	1
A6	0	9	9	1
A7	1	8	7	1
A8	2	13	11	1
A9	0	13	13	1

Conclusão

A10	1	10	9	1
A11	3	12	9	1
A12	8	12	4	1
A13	2	12	10	1
A14	1	11	10	2
A15	0	8	8	1
A16	0	8	8	1
A17	2	10	8	2
A18	1	9	8	1
A19	1	11	10	1
A20	4	13	9	3

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 33: Dispersão – diferença das notas nos testes e exercer atividade remunerada



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Na verificação do valor do coeficiente linear de Pearson há para a correlação entre o aluno exercer alguma atividade remunerada e a diferença das notas nos testes, obtivemos r **= 0,12.** Com um resultado positivo e muito próximo a zero, classificamos como uma correlação fraca positiva, pois 0,1 < r < 0,5. Com isso, verificamos que o fato dos alunos desenvolverem alguma atividade remunerada teve pouca interferência nos resultados dos testes.

Dada a análise gráfica, é possível visualizar um crescimento da reta, indicando que as variáveis estão positivamente correlacionadas. Contudo, a “nuvem” de pontos está muito dispersa da reta, ou seja, não está alinhada a ela. Com isso concluímos que, há pouca correlação entre as duas variáveis comparadas. Vejamos a correlação existente entre a escolaridade do responsável masculino e a diferença das notas nos testes.

Quadro 48: Parametrização dos dados – escolaridade do responsável masculino

ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL MASCULINO	PARAMETRIZAÇÃO
Não lembro	1
Fundamental incompleto	2
Fundamental completo	3
Ensino médio	4
Ensino superior	5

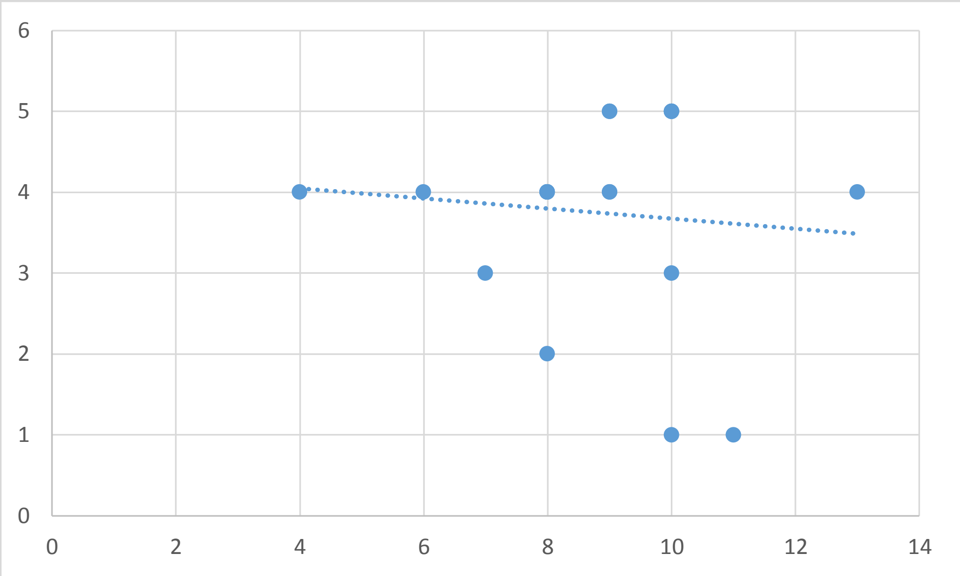
Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quadro 49 : Correlação entre a diferença das notas nos testes e escolaridade do responsável masculino

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	ESCOLARIDADE DO RESPOSÁVEL MASCULINO
A1	0	7	7	4
A2	0	9	9	5
A3	1	10	9	4
A4	3	13	10	5
A5	0	10	10	3
A6	0	9	9	2
A7	1	8	7	3
A8	2	13	11	1
A9	0	13	13	4
A10	1	10	9	4
A11	3	12	9	5
A12	8	12	4	4
A13	2	12	10	5
A14	1	11	10	1
A15	0	8	8	4
A16	0	8	8	4
A17	2	10	8	4
A18	1	9	8	4
A19	1	11	10	5
A20	4	13	9	4

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 34: Dispersão – diferença das notas nos testes e a escolaridade do responsável masculino



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

O coeficiente linear de Pearson há para a correlação entre a escolaridade do responsável masculino dos alunos e a diferença de suas notas no pré- e pós-teste foi $r = \mathbf{-0,13}$. Como este é um resultado negativo e próximo a zero, ou seja, contido no intervalo $-0,5 < r \leq -0,1$, verificamos uma correlação fraca negativa. Isso assinala que, além das variáveis estarem negativamente correlacionadas, a escolaridade de seus responsáveis masculinos exerceu pouco controle nos resultados dos testes.

Neste caso o gráfico mostrou que as variáveis estavam negativamente correlacionadas, pois a reta é decrescente. E como a "nuvem" de pontos está dispersa da reta, aponta pouca relação entre as variáveis analisadas. Vejamos agora a correlação entre a escolaridade do responsável feminino e a diferença das notas nos testes.

Quadro 50: Parametrização dos dados – escolaridade do responsável feminino

ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO	PARAMETRIZAÇÃO
Não lembro	1
Sem escolaridade	2
Fundamental completo	3
Ensino médio	4
Ensino superior	5

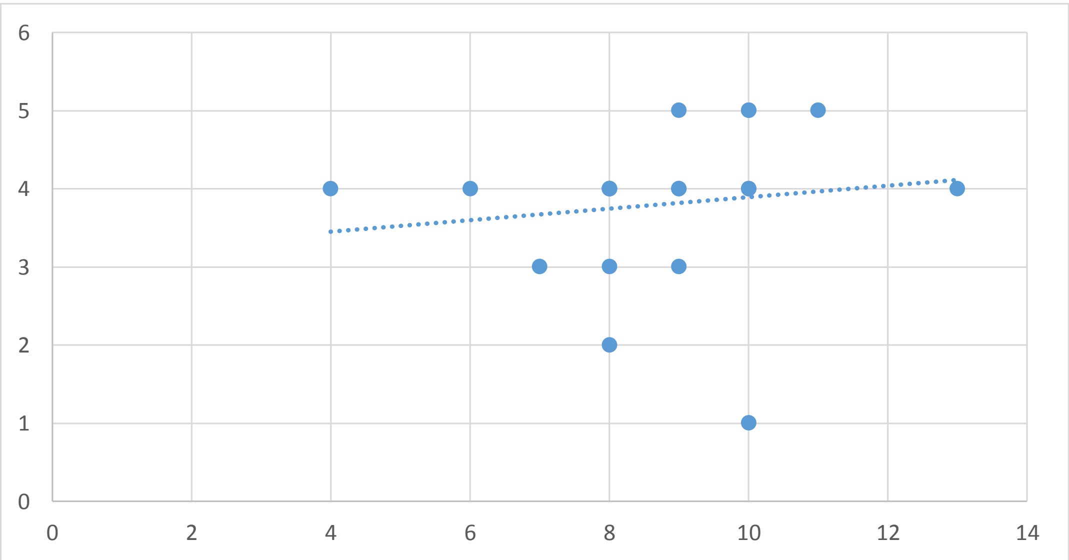
Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quadro 51: Correlação entre a diferença das notas nos testes e escolaridade do responsável feminino

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	ESCOLARIDADE DO RESPONSÁVEL FEMININO
A1	0	7	7	4
A2	0	9	9	4
A3	1	10	9	3
A4	3	13	10	5
A5	0	10	10	4
A6	0	9	9	2
A7	1	8	7	3
A8	2	13	11	5
A9	0	13	13	4
A10	1	10	9	4
A11	3	12	9	5
A12	8	12	4	4
A13	2	12	10	4
A14	1	11	10	1
A15	0	8	8	3
A16	0	8	8	4
A17	2	10	8	4
A18	1	9	8	4
A19	1	11	10	5
A20	4	13	9	4

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 35: Dispersão – diferença das notas nos testes aditivos e a escolaridade do responsável feminino



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Nesta análise o valor do coeficiente linear de Pearson (r) para a correlação entre a escolaridade dos responsáveis femininos dos alunos e a diferença das notas nos testes, foi igual a $r = \mathbf{0,10}$. Este é um resultado positivo e muito próximo a zero, com intervalo $0,1 \leq r < 0,5$. Isso aponta uma correlação fraca positiva, com pouca relação entre as variáveis analisadas.

Este também é um caso de variáveis positivamente correlacionadas, representado pela posição crescente da reta. Como o conjunto de pontos estão dispersos da reta, apontam pouca relação entre as variáveis analisadas. A próxima correlação é sobre a dificuldade do aluno em aprender matemática, vejamos:

Quadro 52: Parametrização dos dados – dificuldade em aprender matemática

DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Não	1
Um pouco	2
Sim	3

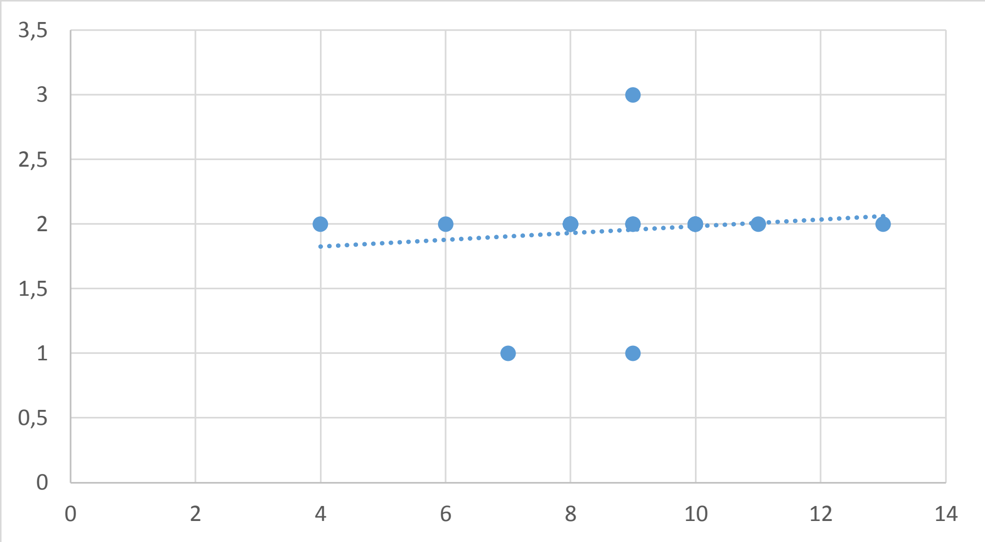
Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quadro 53: Correlação entre a diferença das notas nos testes e a dificuldade em matemática

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	DIFICULDADE EM MATEMÁTICA
A1	0	7	7	2
A2	0	9	9	3
A3	1	10	9	2
A4	3	13	10	2
A5	0	10	10	2
A6	0	9	9	2
A7	1	8	7	1
A8	2	13	11	2
A9	0	13	13	2
A10	1	10	9	2
A11	3	12	9	2
A12	8	12	4	2
A13	2	12	10	2
A14	1	11	10	2
A15	0	8	8	2
A16	0	8	8	2
A17	2	10	8	2
A18	1	9	8	2
A19	1	11	10	2
A20	4	13	9	1

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 36: Parametrização dos dados – dificuldade em aprender Matemática



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

O valor do coeficiente para as variáveis *dificuldade em aprender Matemática* e diferença nas notas foi r **=** 0,14. Indicando uma correlação fraca positiva, pois 0,1 < r < 0,5, ou seja, o resultado do coeficiente linear está muito próximo de zero e é positivo, evidenciando que a dificuldade em aprender Matemática não teve interferência nos resultados dos testes nesta turma.

O gráfico evidenciou um discreto crescimento da reta e dispersão dos pontos em relação a ela. A seguir verificaremos a correlação entre as notas na Matemática e a diferença das notas dos testes.

Quadro 54: Parametrização dos dados – notas em matemática

NOTAS EM MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Abaixo da média	1
Média	2
Acima da média	3

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quadro 55: Correlação entre a diferença das notas nos testes e as notas em matemática

Continua

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	NOTAS EM MATEMÁTICA
A1	0	7	7	1
A2	0	9	9	1
A3	1	10	9	2
A4	3	13	10	2
A5	0	10	10	2
A6	0	9	9	2
A7	1	8	7	3
A8	2	13	11	3

Conclusão

A9	0	13	13	2
A10	1	10	9	2
A11	3	12	9	2
A12	8	12	4	3
A13	2	12	10	3
A14	1	11	10	2
A15	0	8	8	2
A16	0	8	8	2
A17	2	10	8	3
A18	1	9	8	3
A19	1	11	10	2
A20	4	13	9	3

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

O valor do coeficiente para as variáveis notas em Matemática e diferença nas notas foi $\boldsymbol{r = -0,16}$. Indicando uma correlação fraca negativa, pois$-0,5 < r \leq -0,1$, ou seja, o resultado do coeficiente linear está muito próximo de zero e é negativo, evidenciando que as notas em Matemática não tiveram interferência nos resultados dos testes nesta turma.

O gráfico evidenciou um discreto decrescimento da reta e dispersão dos pontos em relação a ela. A seguir verificaremos a correlação entre a variável distração nas aulas de matemática e a diferença das notas dos testes.

Quadro 56: Parametrização dos dados – distração nas aulas de matemática

NOTAS EM MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Não	1
Na maioria das vezes	2
Sim	3

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Quadro 57: Correlação entre a diferença das notas nos testes e a distração nas aulas de matemática

Continua

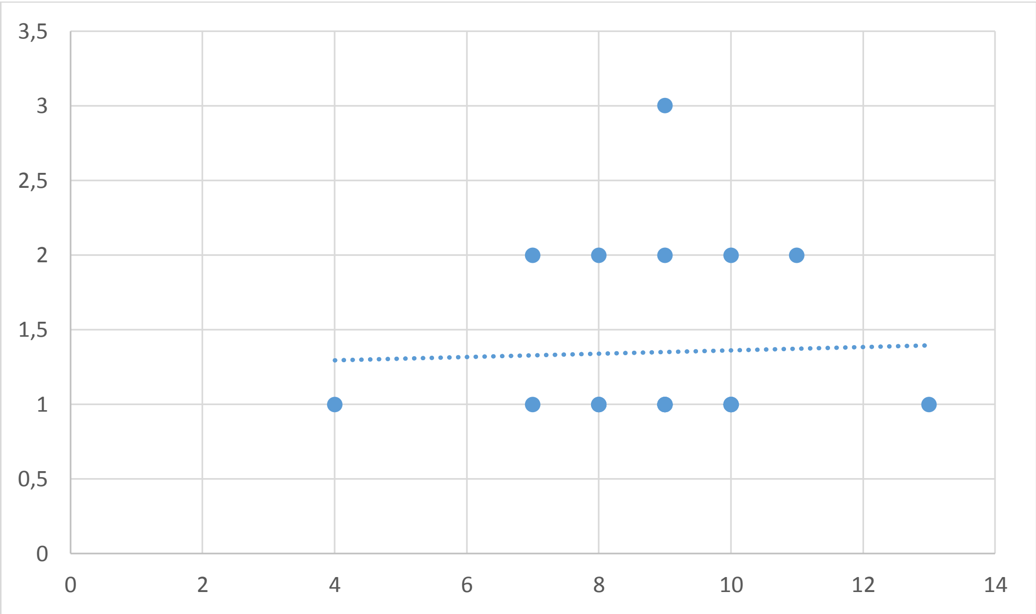
ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇA	SE DISTRAI NAS AULAS DE MATEMÁTICA
A1	0	7	7	2
A2	0	9	9	1
A3	1	10	9	2
A4	3	13	10	1
A5	0	10	10	1
A6	0	9	9	3
A7	1	8	7	1
A8	2	13	11	2
A9	0	13	13	1
A10	1	10	9	1
A11	3	12	9	1
A12	8	12	4	1
A13	2	12	10	2

Conclusão

A14	1	11	10	1
A15	0	8	8	1
A16	0	8	8	1
A17	2	10	8	1
A18	1	9	8	2
A19	1	11	10	1
A20	4	13	9	1

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Gráfico 37: Dispersão – diferença das notas nos testes e a distração nas aulas de Matemática



Fonte: Pesquisa de campo(2017)

O resultado apontou que para as variáveis analisadas, o valor do coeficiente é r **= - 0,035**. Sinalizada assim uma correlação ínfima positiva, com $0 < r \leq 0{,}10$. Com isso, constatamos que a variável distração nas aulas de Matemática não foi determinante nos resultados alcançados, pois o valor da correlação foi desprezível. Novamente o gráfico gerou uma reta discretamente crescente, evidenciando que não houve correlação significativa entre as variáveis estudadas.

5.8 Síntese dos Coeficientes de Correlação Linear de Pearson dos Testes

Quadro 58: Resultados da correlação linear de Pearson entre os fatores socioeconômicos e desempenho nas resoluções das questões

Continua

VARIÁVEL	VALOR DO COEFICIENTE LINEAR DE PEARSON (r)	INTENSIDADE	DIREÇÃO

Conclusão

Trabalho remunerado	r = 0,12.	Fraca positiva	Positivamente correlacionadas
Escolaridade do responsável masculino	r = - 0,13.	Fraca Negativa	Negativamente correlacionadas
Escolaridade do responsável feminino	r = 0,10.	Fraca positiva	Positivamente correlacionadas
Dificuldade em aprender matemática	r = 0,14.	Fraca positiva	Positivamente correlacionadas
Notas em matemática	r = - 0,16	Fraca Negativa	Negativamente correlacionadas
Distração nas aulas de matemática	r = 0,035	Ínfima Positiva	Positivamente correlacionadas

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Neste sentido, a partir das análises dos dados obtidos por meio do teste de correlação entre as diferenças dos alunos nos pré-teste e pós-teste e os fatores socioeconômicos, podemos inferir que o fator determinante para as melhoras significativas dos alunos no pós-teste, deveu-se ao trabalho docente desenvolvido por meio da sequência didática estruturada por meio de atividades, pois não encontramos correlação perfeita ou forte. A seguir, apresentaremos o teste de Hipótese, para contribuir na análise estatística de nossa pesquisa.

5.9 Teste de Hipóteses

A aplicação do teste de hipótese serve para constatar por meio de cálculos estatísticos as demonstrações alcançadas na experimentação, momento em que se evidencia a tomada de decisão amparado pelos parâmetros estatísticos da amostra, esta, oriunda pela retirada dos valores das notas iniciais e finais obtidas pela amostra. Após a remoção de informações necessárias aplica-se a seguinte equação:

$$t = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Em que:

X = Média das notas do pré-teste

μ = Média das notas do pós-teste

σ = Desvio padrão da diferença das notas dos testes

n = número da amostra

Na sequência é realizado o levantamento das hipóteses que podem ser:

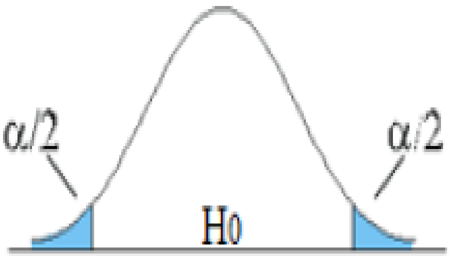
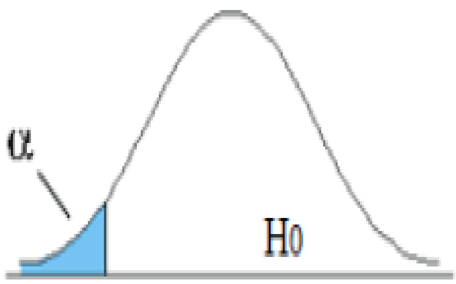
1. Hipótese nula – H_o: Refere-se a uma afirmação sobre um determinado parâmetro da população, que é presumida como verdadeira, até que seja declarada falsa.

2. Hipótese alternativa – H_a: corresponde a uma declaração acerca de um parâmetro da população, que será verdadeira se a hipótese nula for falsa.

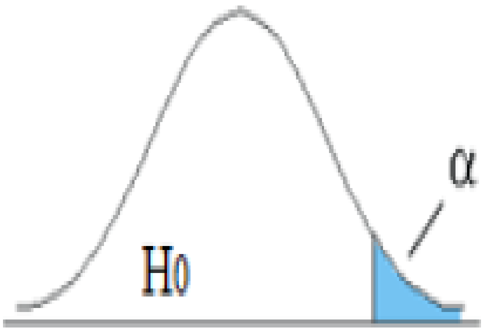
De acordo com as hipóteses levantadas, há uma forma de representar a aceitação de uma delas e a rejeição da outra, por meio da curva normal. Vejamos:

Quadro 59: Tipos de curva normal

Continua

HIPÓTESES	CURVA NORMAL	INTERPRETAÇÃO DA CAUDA
Ho: $\mu_1 = \mu_2$ (média 1= média 2) Ha = $\mu_1 \neq \mu_2$ (média 1≠ média 2)		È um teste bicaudal com regiões de rejeição de Ho em ambas as caudas
Ho: $\mu_1 \geq \mu_2$ (média 1≥ média 2) Há = $\mu_1 < \mu_2$ (média 1< média 2)		È um teste com cauda a esquerda, que possui região de rejeição de Ho na cauda da esquerda.
Ho: $\mu_1 \leq \mu_2$ (média 1≤ média 2)		É um teste com cauda a direita, que possui região de rejeição de Ho, na cauda direita.

(Conclusão)

Ha = $\mu_1 > \mu_2$ (média 1> média 2)		

Fonte: Silva (2015)

5.10 Teste de Hipótese do Experimento

Após analisar o percentual de acertos, erros e brancos nas questões dos testes, aplicamos o teste de hipótese com o intuito de assimilar conclusões estatísticas sobre o pós-teste e, também, sobre a metodologia de ensino utilizada durante o experimento, já que o teste de hipótese reflete tanto os conhecimentos prévios dos alunos quanto os conhecimentos adquiridos no decorrer das aulas.

Para aplicação do teste de hipóteses, inicialmente consideramos as notas absolutas dos alunos nos dois testes. Como foram 13 (treze) questões, as notas foram tabuladas de 0 a 13, de acordo com o número de questões corretas de cada aluno.

Quadro 60: Notas absolutas dos alunos nos testes

Continua

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
A1	0	7
A2	0	9
A3	1	10
A4	3	13
A5	0	10
A6	0	9
A7	1	8
A8	2	13
A9	0	13
A10	1	10
A11	3	12
A12	8	12
A13	2	12
A14	1	11
A15	0	8
A16	0	8
A17	2	10
A18	1	9

Conclusão

A19	1	11
A20	4	13

Fonte: Pesquisa de campo(2017)

Em seguida retiramos os dados para a aplicação do teste com base na fórmula

$$t = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Em que:

X= Média das notas do pré-teste

μ = Média das notas do pós-teste

σ = Desvio padrão das diferenças das notas dos testes

n = número da amostra

Com os dados presentes na tabela 24, teremos:

X = 1,5; μ = 10,4 σ = 1,23; n = 20

Que aplicado à equação resulta em:

$$t = \frac{1{,}5 - 10{,}4}{\frac{1{,}23}{\sqrt{20}}} = -32{,}36$$

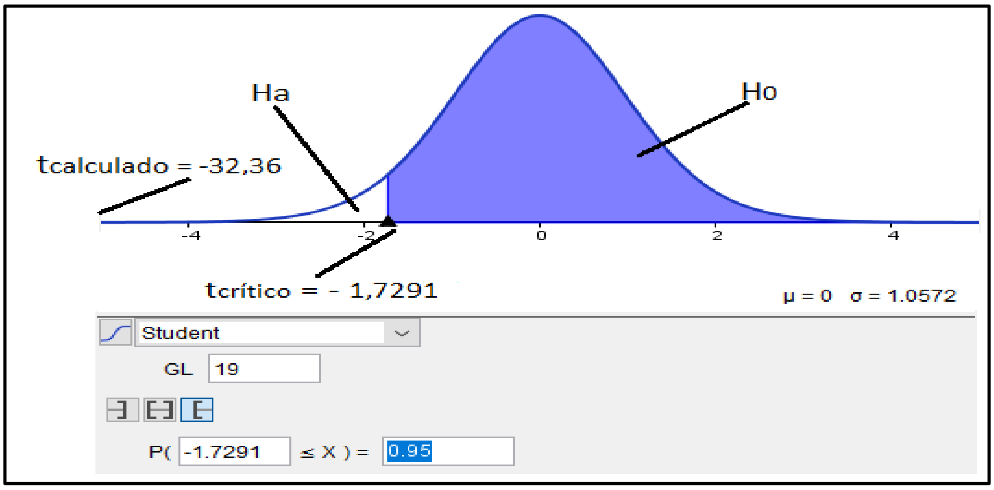
A etapa seguinte foi testar as seguintes hipóteses:

Hipótese nula Ho: $\mu 1 \geq \mu 2$, ou seja, a média do pré-teste foi maior ou igual à do pós-teste;

Hipótese alternativa Ha: $\mu 1 < \mu 2$, isto é, a média do pré-teste foi menor que a do pós-teste.

Com base no resultado do teste utilizamos a curva normal para comparar seus resultados com as hipóteses anteriormente levantadas. Teremos, então, o seguinte gráfico:

Gráfico 38: Diagrama t de Student



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A hipótese inicial está representada no espaço em azul do gráfico. Como o resultado do teste foi -32,36, implica que ele está à esquerda da cauda, ou seja, fora do intervalo do H_o. Neste caso rejeita-se, com certeza de 95%, a hipótese inicial H_o de que $\text{média } 1 \geq \text{média } 2$ e aceita-se a hipótese alternativa H_a, comprovando estatisticamente que $\text{média } 1 < \text{média } 2$, ou seja, o pós-teste apresentou, estatisticamente, melhores notas de que o pré-teste.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido com o **objetivo** de avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de Probabilidade por meio de atividades sobre os aspectos conceituais e desempenho da resolução de questões envolvendo o assunto, que trabalhou inicialmente a diferença entre experimentos determinísticos e não determinísticos e em seguida os conceitos de espaço amostral, eventos, o conceito clássico de probabilidade, o intervalo de variação da probabilidade, a probabilidade da união de eventos disjuntos e não disjuntos, probabilidade condicional, probabilidade de eventos independentes. Com este objetivo, pretendíamos analisar de que forma uma metodologia de ensino que privilegiasse o uso de uma sequência didática poderia conduzir o aluno ao aprendizado de conceitos probabilísticos necessários para a resolução de questões sobre probabilidade e suas propriedades.

As informações obtidas nas análises prévias, foram fundamentais para o planejamento das atividades, formuladas, a partir das dificuldades encontradas pelos alunos e professores durante a pesquisa sobre o ensino de probabilidade. As referidas atividades priorizaram o desenvolvimento de competências e habilidades na identificação dos conceitos necessários para a resolução de diversas questões propostas em cada atividade.

As atividades introdutórias de nossa sequência didática garantiu maior segurança nos alunos para a realização das posteriores, uma vez que, sua finalidade era mostrar situações que abordavam eventos sujeitos ao acaso, bem como o conjunto dos resultados possíveis desses eventos ocorrerem, de modo que, quando chegaram às questões propostas, com a interpretação do enunciado e o espaço para resolução, os alunos já estavam familiarizados com aqueles modelos de questão e os resolveram sem grandes dificuldades, ainda que envolvessem situações diferentes.

Essa formulação estrutural de sequência didática facilitou a progressão gradativa dos alunos, posto que a primeira atividade de aprendizagem contendo situações envolvendo a diferença entre os experimentos determinísticos e não determinísticos, apresentavam situações simples para os alunos identificarem um evento determinístico ou não determinístico. A partir da segunda atividade, foi-se aumentando o grau de complexidade. Por exemplo, na Atividade 2, sobre espaço amostral, alguns eventos que já estavam contidos na atividade 3 e em questões das atividades 2 e 3, que possibilitaram ao aluno refletir sobre o total de possibilidades em um experimento aleatório**,** interpretando as informações presentes no enunciado precisavam ser utilizados na resolução.

Já na atividade 3 sobre eventos, esta trazia situações abordadas na atividade anterior, levando os alunos a identificarem diretamente os subconjuntos de um espaço amostral, reconhecendo os resultados possíveis de um experimento e a cardinalidade destes conjuntos. Neste sentido, o grau de complexidade para auxiliar a progressão dos alunos foi determinada pela utilização de um “novo” conceito a cada atividade aumentando assim o nível de raciocínio dos mesmos.

Vale ressaltar a importância do preenchimento dos quadros contidos em cada atividade de aprendizagem, este procedimento permitiu retomar ao que foi realizado em atividades anteriores e seus conceitos, abrindo espaço para a socialização das opiniões dos alunos, trazendo à tona as dúvidas e dificuldades que ainda persistiam em seu aprendizado. Nestes termos, o preenchimento era uma espécie de revisão dialogada sobre toda a aula e aulas anteriores.

No tocante as correlações contidas na Seção da Análise a Posteriori, referentes aos fatores socioeconômicos levantados no primeiro dia do experimento, não foram fatores determinantes nos resultados do pós-teste. Nesta, os resultados obtidos após as devidas correlações entre a diferença das notas do pré-teste com o pós-teste foram ínfimas ou fracas**.** Bem como, considerando a inclinação dos alunos pela disciplina Matemática, a dificuldade em aprender assuntos matemáticos, suas notas em matemática, quanto ao auxílio que estes estudantes recebem em suas tarefas extraclasse de matemática. As correlações indicaram pelos alunos investigados uma melhora significativa em relação aos resultados dos pré-teste e pós-teste.

Dessa forma podemos constatar, a considerável contribuição da metodologia utilizada para a boa aceitação do experimento, o que se reforçou pelos resultados estatísticos obtidos pelo teste de Hipótese – correlação entre as notas do pré-teste e do pós-teste, apresentou uma significativa melhora no desempenho dos alunos, confirmando os bons resultados da metodologia aplicada durante a etapa da experimentação.

Em relação ao uso do Ensino por Atividades, como metodologia de ensino, acreditamos que o objetivo de avaliar seus efeitos para o processo ensino-aprendizagem da probabilidade, foi extremamente satisfatório, visto que contribuiu para que os alunos identificassem as regularidades e descobrissem os conceitos estabelecidos em cada atividade de ensino. Com base nos resultados já apresentados na seção da análise a posteriori e validação, consideramos que nossa hipótese sobre os efeitos dessa metodologia de ensino para nosso estudo foi ratificada.

Admitimos que nossa pesquisa apresentou algumas limitações, dentre as quais destacaremos as situações que abordavam espaços amostrais compostos; como o lançamento sucessivo de dois dados ou o lançamento de um dado e uma moeda; a questão do esclarecimento dos possíveis resultados como a ideia de um par ordenado (Moeda, dado). Estas situações estavam contidas nas primeiras atividades, mas que foram sendo tratadas nas atividades posteriores.

Na atividade 7, referente à probabilidade de eventos não complementares, relaciona-se a mais esclarecimento e diálogo sobre os elementos comuns contidos nos eventos não disjuntos, acreditamos que estes esclarecimentos levariam os alunos a sanar os erros analisados e apresentados na seção análise de erros no pós-teste sobre estes conceitos, visto que os participantes mostraram em suas respostas erros parciais nestas questões.

Na atividade 10, sobre o conceito de eventos independentes, concerne a utilização de eventos que apresentavam muitos elementos para o espaço amostral e seus respectivos eventos, cujo objetivo era levar o alunos a percepção da ideia de dois eventos independentes, o que por sua vez, dificultou alguns cálculos na resolução das questões propostas.

Portanto, em relação aos bons resultados obtidos nesta pesquisa, esperamos que seja apreciado pelos professores que atuam na educação do estado do Pará, pelas sugestões pedagógicas apresentadas e pelas dificuldades surgidas, no decorrer da experimentação, comuns em sala de aula. Também acreditamos que seu teor abre espaço para novas investigações sobre o ensino de probabilidade; abordando principalmente os conceitos mais complexos, como os de probabilidade condicional e a probabilidade de eventos independentes, bem como, tendo como sujeitos, alunos de outras séries.

7. REFERÊNCIAS

ALCÂNTARA, Ricardo Ribeiro. **Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina 2014.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Engenharia Didática:** características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT-Revista Eletrônica de Educação Matemática.** V3.6,p.62-77,UFSC:2008.Disponível em:https://periódicos.ufsc.br > download. Acesso em:13 dezembro 2015.

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BATANERO, Maria Carmen; GODINO, Juan Dias; CAÑIZARES, Maria J. **Azar y Probabilidad Matematicas:** Cultura y Aprendizaje. Editorial Sintesis. Espanha. 1996.

BARBETTA, Pedro Alberto. **Estatística Aplicada às Ciências Sociais**. 8ª ed. Florianópolis: ed. da UFSC, 2012.

BIAJOT, Emerson Donizet. **Experimentos Probabilísticos**: noções probabilidade no ensino fundamental II.2013.107f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática, São Carlos,2013.

BRASIL (2006). Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica - Brasília. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2, 2006.

BRASIL (1998). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em:<http:portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/matemática.pdf>. Acesso em 27 de outubro de 2016.

BRASIL (2011). Ministério da Educação. **Plano de Desenvolvimento da Educação – PDE.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. Prova Brasil. Matrizes de referência, tópicos e descritores: Brasília, 2011.

BRASIL (2012). Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Matrizes de referência, tópicos e descritores:** Brasília, 2012. Disponível em:https://download.inep.gov.br/educação_basica/enem/downloads/2012/matriz_referência_enem.pdf. Acesso em:27 de outubro de 2016.

BRITO, Bosco Silveira. **Ensino de probabilidade:** Proposta de ensino através de experimentação. 2015.96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões coma matemática.** 1ª edição. Editora Moderna. São Paulo-SP. 2010.

CABERLIM, Cristiane Candido Luz. **Letramento probabilístico no ensino médio:** um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos.2015.141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

CAZORLA, Irene Maurício; GUSMÂO, Tânia Cristina; YUMY CATAOKA, Verônica. **Validação de uma Sequência Didática de Probabilidade a partir da Análise da Prática de Professores, sob a ótica do Enfoque Ontossemiótico**. Boletim de Educação Matemática, vol. 24, núm.39, agosto, 2011, pp.537-560. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291222099011

CONDURÚ, Marise Teles; MOREIRA Maria da Conceição Ruffeil. **Produção científica na universidade**: normas para apresentação. Belém. UEPA, 2007.130 p.
CORRÊA, Rosana dos Passos **Ensino de Funções Trigonométricas por Atividades.**2016. 390f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Educação, Belém,2016.

DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. **Probabilidade:** Um Curso Introdutório. Edusp. São Paulo-SP. 1997.

DUARTE, Rafael Luz. **Introdução à Estatística e Probabilidade**: uma abordagem contextualizada no cotidiano dos alunos.2013.55f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza,2013.

ENEM 2013 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em 15 dezembro de 2015.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**; tradução: Hygino H. Domingues.- Campinas, SP: Editora da Unicamp,2004.

FERNANDES, José Antônio et al.. **Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta.** Avances de Investigación em Educación Matemática,4,5-26. Disponível em: <https//www.researchgate.net>publication>. Acesso em: 20 de janeiro de 2016.

FERNANDES, José Antônio et al. **Comparação de probabilidade de acontecimentos formulados de forma explicita e implícita.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v.10, n.2, p.42-60,2015. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n2p42*.* Acesso em: 20 janeiro de 2016.

FLOR, Reginaldo Pereira. **Um Estudo Sobre a Teoria das Probabilidades Discretas:** Contribuição para a Formação Continuada de Professores .2014.64f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2014.

FREUND, John Ernst. **Estatística Aplicada:** economia, administração e contabilidade. Tradução Claus Ivo Doering. 11. Ed.- Porto Alegre: Bookman. 2006.

GONDIM, Hellen Fernandes. **Probabilidade e probabilidade geométrica**: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino médio.2013.78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS,2013.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7ª edição. Atual Editora. São Paulo-SP. 2007.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: volume único.** São Paulo: Atual, 2011.

LIMA, Felipe Mascagna Bitencourt . **O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos**.2013.119p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, São Carlos,2013.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 2. Rio de Janeiro-RJ. 1998.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Probabilidade**. 4ª edição. São Paulo-SP. 1993.

LOPES, José Marcos; TEODORO, João Vitor e REZENDE, Josiane de Carvalho. **Uma proposta para o ensino de probabilidade no ensino médio.** Zetetiké – FE/Unicamp – v.19, n.36 – jul/dez 2011. Disponível em:<www.fe.unicamp.br>. Acesso em: 21 outubro de 2015.

LOPES, José Marcos. **Mudanças nas práticas de ensino de probabilidade em professores de ensino médio.** X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador – BA, 7 a 9 de julho de 2010. Disponível em: http://www.lematec.no-ip.org/CDS/ENEM10/artigos/CC/T11_CC27.pdf. Acesso em 21 outubro de 2015.

MENDES, Iran Abreu; SÁ, Pedro Franco de. **Matemática por Atividade:** sugestões para a sala de aula. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MEYER, Paul L. Probabilidade: **Aplicações à Estatística**. 2ª edição. LTC Editora. Rio de Janeiro-RJ. 2009.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Tradução Diego Alfaro; consultoria Samuel Jurkiewicz. — Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9ª edição. Editora SBM. Rio de Janeiro-RJ. 2006.

MORAES, Luís Cláudio Longo. **Ensino de probabilidade**: historicidade e interdisciplinaridade.2014.130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica-RJ,2014.

MORAES, José Agissander Oliveira de. **Probabilidade Geométrica e Aplicações**.2014.35 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia-Go,2014.

MOREIRA, Andrea de Paula Machado. **Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula do Ensino Médio.**2015.159 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, 2015.

NEVES, Fábio Costa de Oliveira. **Ensino de probabilidade:** Tipos de Eventos.2015.96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

NUNES, Victor Arantes. **A Utilização dos Jogos Lotéricos Para o Ensino de Probabilidade no Ensino Médio**.2015.102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Seropédica, RJ, 2015.

OLIVEIRA, Marcos Oliveira de. **Análise do Ensino de probabilidade**.2015.112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e naturais, Belém,2015.

PARÁ, Secretaria de Estado de Educação. Sistema Paraense de Avaliação Educacional (SISPAE). **Revista Pedagógica**. Ensino Médio Matemática. 2014.

RIBEIRO, Rossano Evaldt Steinmetz. **Uma proposta de ensino de probabilidade no ensino médio.**2012.116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SÁ, Pedro Franco de; ALVES, Fábio José da Costa. A engenharia didática: **alternativa metodológica para pesquisa em fenômenos didáticos**. In: MARCONDES, Maria Inês, OLIVEIRA, Ivanilde Apoluceno de, TEIXEIRA, Elizabeth (Org.). Abordagens Teóricas e Construções Metodológicas na Pesquisa em Educação – Belém: EDUEPA, 2011.p.145-160.

_____. **Atividades para o ensino de matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SANTANA, Michaelle Renata Moares de. **O Acaso, o Provável, o Determinístico**: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental.2011.94f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Recife,2011.

SILVA, Benedita das Graças Sardinha da. **Ensino de Problemas Envolvendo as Quatro Operações por meio de Atividades.**2015. 224f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Educação, Belém,2015.

SILVA, Lucicleide Bezerra da. **A Estatística e a Probabilidade nos Currículos dos Cursos em Licenciatura de Matemática no Brasil.**2014. 127f. Dissertação(Mestrado) –

Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife,2014.

SILVA, Fabrício Menezes Netto da. **Jogos no Processo de Ensino - Aprendizagem de Probabilidade.**2013. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

SILVA FILHO, Haroldo Costa. **Probabilidade e Valor Esperado Discussão de Problemas para o Ensino Médio**.2016.73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,2016.

SILVA, Silvio Tadeu Teles da. **Ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas por Atividades.**2014. 221f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Educação, Belém,2014.

SPIEGEL, Murray Ralph .**Probabilidade e Estatística**. Coleção Schaum; traduzido por Alfredo Alves Farias. São Paulo-SP. 2004.

_____. **Estatística.** Coleção Schaum; traduzido por Pedro Consentino. São Paulo-SP. 1976.

SHULTE, Alberto P.; SMART, James R. **Teaching Statistics and Probability**. Series: Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics); 1981.

STEVENSON, William James. **Estatística Aplicada a Administração**. 1ª Edição, Editora Harbra, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Questionário para discentes

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DEMATEMÁTICA

Prezado (a) aluno (a),
Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em sigilo. Muito obrigado!

01-Idade: _________anos. **02- Gênero:** ( ) Masculino ( ) Feminino

03- Você estudou o Ensino Fundamental em que tipo de escola:
( ) Estadual ( ) Municipal ( ) Particular ( ) Conveniada ( ) Outra. Qual? ___________

04- Você já ficou em dependência?
( ) Não ( ) Sim. Em qual (is) disciplina(s)?_________________________

05- Você gosta de estudar matemática?
( ) Detesto ( ) Suporto ( ) Gosto um pouco ( ) Adoro

06- Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?
( ) Professor particular ( ) Família. Quem? _______________________
( ) Outros. Quem? _________________ ( ) Ninguém.

07- Além do horário escolar, com que frequência você costuma estudar matemática?
( ) Todo dia ( ) Somente nos fins de semana ( )Somente no período de prova
( ) Apenas na véspera da prova ( ) Nunca.

08- Você consegue entender as explicações dadas nas aulas de matemática?
( ) Sempre ( ) Quase sempre ( ) Poucas vezes ( ) Nunca.

09- Qual(ais) forma(s) de atividade(s) você costuma ser avaliado em matemática:
( ) Provas/simulado ( ) Testes semanais ( ) Seminários ( ) Pesquisas ( ) Projetos
( ) outros. Quais? _____________________________

10- Como você se sente quando está realizando uma avaliação de matemática?
( ) Tranquilo ( ) Medo ( ) Preocupação ( ) Raiva ( ) Calafrios ( ) Outros.
Qual? ____

11- Quando você estudou Probabilidade, a maioria das aulas
( ) iniciaram pela definição seguida de exemplos e exercícios
( ) iniciaram com uma situação problema para depois introduzir o assunto
( ) iniciaram com um experimento para chegar ao conceito
( ) iniciaram com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo
( ) iniciaram com a História do assunto

12- Para fixar o conteúdo de Probabilidade seu professor costumava:
( ) apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
( ) apresentar jogos envolvendo o assunto
( ) solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático
( ) solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolver
( ) não propor questões de fixação

13- Hoje, você resolve questões de probabilidade com facilidade?
( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

14- Em sua opinião, qual a importância dos conhecimentos de probabilidade para o indivíduo?
( ) Nenhum pouco ( ) Muito pouca ( ) Um pouco ( ) Muita

15 – A respeito de Probabilidades e seus conhecimentos, preencha o quadro abaixo.

Assunto	Você lembra de ter estudado?		Grau de dificuldade				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito difícil
Experimentos determinísticos							
Experimentos Aleatórios							
Espaço Amostral.							
Número de elementos do espaço amostral.							
Evento							
Número de elementos de um evento.							
Eventos simples (elementar).							
Evento certo.							
Eventos mutuamente exclusivos: $A \cap B=\emptyset$							
Evento complementar A^c.							
União de Eventos**:** AUB							
Interseção de Eventos**:** $A\cap B$							
Evento impossível.							
Frequência relativa de um evento simples.							
Definição de Probabilidade							
Probabilidade em Espaço Amostral Equiprovável: $P(A)=\frac{N\ (A)}{\mathrm{N(S)}}=\frac{casos\ favoráveis}{\text{Casos possíveis}}$							
Probabilidade do evento certo.							
Probabilidade do evento impossível.							
Probabilidade do evento complementar.							
Probabilidade da união de dois eventos disjuntos: $\mathrm{P(AUB)}=\mathrm{P(A)}+P(B)$							
Probabilidade da união de dois eventos: $\mathrm{P(AUB)}=\mathrm{P(A)}+P(B)-P(A\cap \mathrm{B})$							
Conceito de probabilidade Condicional.							
Calculo de Probabilidade Condicional: $P(A/B)=\frac{P\ (A\cap \mathrm{B})}{\mathrm{P(B)}}$							
Multiplicação de probabilidades: $P\ (A\cap \mathrm{B})=\mathrm{P(A/B)}.P(B)$							
Questões envolvendo Probabilidades Condicionais							

Calcular probabilidades através do diagrama de árvores das possibilidades.							
Questões envolvendo jogos.							
Questões envolvendo probabilidade a outras áreas como: Genética, Política, meteorologia, estatística...							
Questões envolvendo Probabilidade tendo como espaço amostral e eventos: retas, áreas, volumes.							

Resolva as questões abaixo:

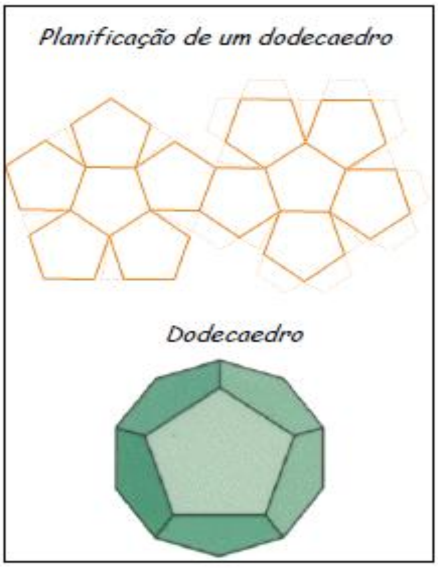
01) Ao lançarmos uma moeda, qual a probabilidade de obtermos cara?

02) Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é anotado**.** Qual a probabilidade de obtermos o número 7?

03) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

04) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Umas das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

05) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente.



Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?

06) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

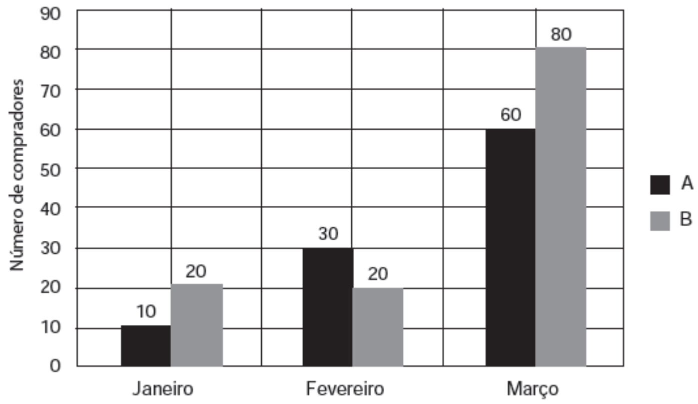
	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$ 50,00	34	25	40
Compras acima de R$ 50,00	10	28	43

Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

07) Em um cesto de roupas há 10 meias, das quais três estão rasgadas. Retirando-se uma meia do cesto duas vezes, e sem reposição, qual é a probabilidade de que as duas meias retiradas não estejam rasgadas?

08) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

APÊNDICE B:TCLE

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa intitulada: **O Ensino de Probabilidades por meio de atividades**, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Marcel Brito Soares e Sebastião Medeiro Coutinho,** vinculados a Universidade do Estado do Pará. Nesta pesquisa nós estamos buscando avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de probabilidades tem sobre a participação dos alunos de "**Estadual de Abaetetuba"** nas aulas de matemática e sobre o desempenho de resolução de questões envolvendo probabilidades.

Suas respostas serão tratadas de forma **anônima** e **confidencial**, isto é, em nenhum momento será divulgado o seu nome em qualquer fase do estudo. Quando for necessário exemplificar determinada situação, sua privacidade será assegurada uma vez que seu nome será substituído de forma aleatória. Os **dados coletados** serão utilizados apenas **NESTA** pesquisa e os resultados divulgados em eventos e/ou revistas científicas.

Sua participação é **voluntária**, isto é, a qualquer momento você pode **recusar-se** a responder qualquer pergunta ou desistir de participar e **retirar seu consentimento**. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a instituição que forneceu os seus dados, como também na que trabalha. Sua **participação** nesta pesquisa consistirá em responder as perguntas a serem realizadas sob a forma de entrevista e **.**

Você não terá nenhum **custo ou quaisquer compensações financeiras. Não haverá riscos** de qualquer natureza relacionada à sua participação. O **benefício** relacionado à sua participação será de aumentar o conhecimento científico na área de ensino de matemática.

Uma via original deste **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido** ficará com você. Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: **Marcel Brito Soares (91-988170580) ou Pedro Franco de Sá (91-xxxxxxxxxx)**. Poderá também entrar em contato com a Direção do Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djalma Dutra s/n. Telegrafo. Belém-Pará-CEP: 66113-010; fone: 4009-9542.

Belém, ____ de ______________de 2017.

___________________________ ______________________

Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação Matemática PMPEM/UEPA

Marcel Brito Soares
Mestrando PMPEM/UEPA

Declaro estar **ciente** do inteiro teor deste **TERMO DE CONSENTIMENTO** e estou de acordo em participar do estudo proposto, sabendo que dele poderei desistir a qualquer momento, sem sofrer qualquer punição ou constrangimento.

____

Participante da pesquisa

APÊNDICE C:Pré-teste e Pós-teste

Aluno(a):____

Resolva as Questões

01) No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento “sair um número primo”.

02) Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente.

03) Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número:

a) menor do que 21?

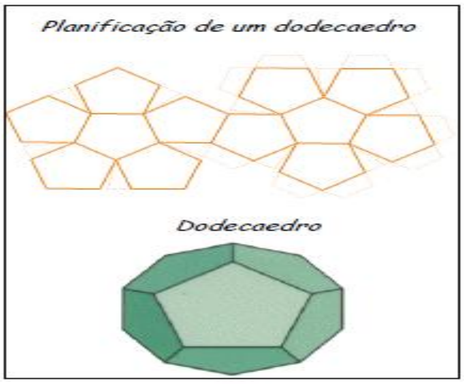
b) maior do 20?

04) Um determinado procedimento cirúrgico tem ao longo dos anos mostrado uma eficiência de 99%. Ciente disto, um paciente pergunta ao médico quantas operações já havia realizado. O médico responde que realizou 99 cirurgias, todas com sucesso. Após a resposta do médico o paciente decidiu que não queria ser operado, pois segundo seus cálculos, sua operação não teria sucesso. Você concorda ou discorda da decisão do paciente? Justifique sua resposta.

05) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Umas das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

06) Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

07) Podemos construir um dado em forma de dodecaedro, isto é, de um poliedro de 12 faces. Um desses dados, com as faces numeradas de 1 a 12, será lançado e, quando parar, será observado o número na face voltada para a frente. Qual é a probabilidade do número observado ser múltiplo de 2 ou de 3?



08) No lançamento simultâneo de dois dados, determine a probabilidade de não sair soma 4 nas faces voltadas para cima.

09) Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de $1/5$. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

10) Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$50,00	34	25	40
Compras acima de R$50,00	10	28	43

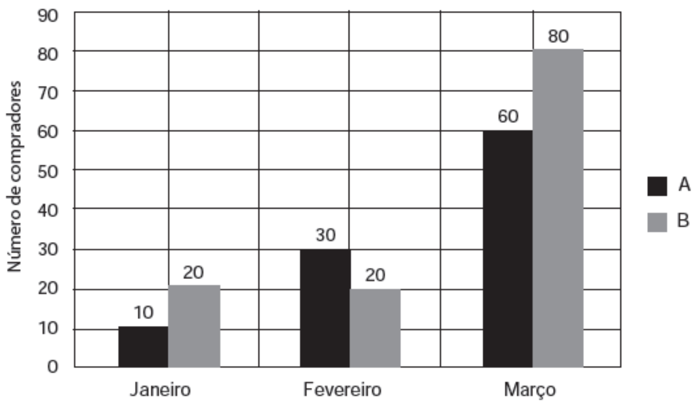
Umas das compras efetuadas é escolhidas ao acaso.

Qual a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo que seu valor não excedeu R$ 50,00?

11) Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

12) Lançando dois dados comuns, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

13) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

APÊNDICE D: Questionário para discentes participantes

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno (a),

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em sigilo.

Muito obrigado!

Nome:____

1-Idade: ______ anos. **2**- Série:__________________________________

3- Gênero: ( ) Masculino ( ) Feminino

4- Você estudou o Ensino Fundamental em que tipo de escola: ( ) Estadual ( ) Municipal ( ) Particular ( ) Outra. Qual? ____________________________

5- você é dependente ou repetente desta série? ( ) Não ( ) Sim

6- Você trabalha de forma remunerada? ( ) Sim ( ) Não ( ) Às vezes

7- Quem é o seu responsável masculino? ( ) Pai ( ) Avô ( )Tio ( )Irmão ( ) Não tenho ( ) Outro. Quem? ___________

8- Quem é o seu responsável feminino? ( ) mãe ( ) avó ( ) tia ( ) Irmã ( ) Não tenho ( ) Outro. Quem? ____________

9- Qual a escolaridade do seu responsável masculino? ______________

10- Qual a escolaridade do seu responsável feminino? ______________

11- Qual a profissão do seu responsável masculino? ________________

12- Qual a profissão do seu responsável feminino? _________________

13- Você tem dificuldade em aprender matemática? ( ) Não ( ) Um Pouco ( ) Muito

14- Quem o auxilia nas tarefas extraclasse de matemática? ( ) Professor particular ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Irmão ( ) Amigo(a) ( ) Ninguém ( ) Outros. Quem?

15- Suas notas de matemática geralmente são: ( ) Acima da média ( ) Na Média ( ) Abaixo da Média

16- Você se distrai nas aulas de matemática? ( ) Não, eu sempre presto atenção ( ) Sim, eu não consigo prestar atenção ( ) Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática

17- Você costuma estudar matemática fora da escola. ( ) Só no período de prova ( ) Só na véspera da prova ( ) Só nos fins de semana ( )Todo dia ( ) Alguns dias da semana.