Universidade do Estado do Pará
Pró-Reitoria de pesquisa de pós-graduação
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Ideny Espirito Santo Queiros Moraes

O Ensino de Volume de Sólidos Geométricos por atividades

Belém

2018

Ideny Espirito Santo Queiros Moraes

O Ensino de Volume de Sólidos Geométricos por atividades

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.

Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Belém

2018

Ideny Espirito Santo Queiros Moraes

O Ensino de Volume de Sólidos Geométricos por atividades

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará.

Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

Data da Avaliação:

Banca Examinadora

________________________________ - Orientador

Prof. Pedro Franco de Sá

Doutor em Educação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Universidade do Estado do Pará

________________________________ - Membro externo

José Antônio Oliveira Aquino

Doutor em Modelagem Computacional - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil (2008)

Universidade Federal do Oeste do Pará , Brasil

_____________________________ - Membro interno

Ducival Carvalho Pereira

Doutor em Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil (1987)

Universidade do Estado do Pará, Brasil.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a **Deus**, por está comigo em todos os momentos, principalmente nas minhas dificuldades.

A todos os meus familiares, em especial, aos meus pais **Leonor e Luciano Moraes,** pelo apoio, conselho e incentivo em toda a minha trajetória de vida.

Aos meus **irmãos** que incentivaram e contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, compartilhando suas experiências e ajudando sempre que solicitados.

A meu Sobrinho **Sidney José** (*in memoriam*), que sempre me ajudou e fez minha inscrição nesse Programa.

A todos os meus colegas de mestrado que sempre estiveram comigo nesse programa, contribuindo de alguma maneira para este trabalho em especial a meus amigos, **Robério, Wellington, Marcel, Augusto, André, Rodolfo.**

A minha amiga **Ruth Lopes**, que me ajudou com a revisão do texto e contribuiu me apoiando e incentivando sempre nas minhas dificuldades.

A secretária do colegiado **Glads Serra**, amiga e sempre muito atenciosa e prestativa.

A **Universidade do Estado do Pará (UEPA)** pela oportunidade.

Ao meu orientador, professor doutor **Pedro Franco de Sá**, por sua dedicação e paciência na orientação deste trabalho, Pelas opiniões e crítica, total colaboração no solucionar de dúvidas e problemas que foram surgindo ao longo da realização deste trabalho e por todas as palavras de incentivo. Amigo, profissional admirável pela sua competência e dedicação a educação. Sou grato pela oportunidade de ter sido seu orientando.

Aos membros da banca avaliadora, professores **José Antônio Oliveira Aquino e Ducival Carvalho Pereira** pelas considerações no texto de qualificação que muito contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa e avaliação do texto final.

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.

Jacques Bernoulli

RESUMO

MORAES, Ideny Espirito Santo Queiros. **O Ensino de Volume de Sólidos Geométricos por atividades.** 2018. 279f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo avaliar os efeitos da aplicação de uma sequencia didática, diferente da tradicional, para o ensino de cálculo de Volume, sobre a participação dos alunos de uma escola publica do ensino médio regular do Pará nas aulas de matemática e sobre o desempenho da resolução de questões envolvendo volume de sólidos geométricos. Para se alcançar tal finalidade optou-se pela Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, a qual se desenvolveu em quatro etapas. Inicialmente foram feitas as análises prévias, primeira etapa da pesquisa, composta pelos aspectos históricos do Ensino de Geometria Espacial; uma revisão de estudos sobre o tema; estudos diagnósticos; estudos experimentais; Fundamentação teórica; Fundamentação Matemática e consulta aos discentes. A segunda etapa da pesquisa, concepção e análise a priori, apresenta o Ensino de Matemática por atividades e uma Sequencia Didática envolvendo o cálculo de Volume de sólidos Geométricos. A terceira etapa da pesquisa, experimentação, foi realizada em uma escola pública Estadual de Castanhal /PA com 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio. A última etapa da pesquisa, análise a posteriori e validação, foi destinada a análise dos resultados obtidos durante a experimentação; ao tratamento estatístico dos dados obtidos, por meio da comparação percentual dos resultados dos testes, análise dos tipos de erros ocorridos nos testes, do coeficiente de correlação linear de Pearson e do teste de hipótese. A validação dos resultados foi realizada pela confrontação entre os dados obtidos nas análises a priori e a posteriori. Os resultados da comparação apontam para um aumento significativo nas notas do pós-teste; o teste de hipótese comprovou estatisticamente este aumento e nenhum dos fatores socioeconômicos interferiu nos resultados obtidos, constatando que a metodologia de ensino surtiu efeito, o que acarretou em uma melhora significativa no desempenho dos discentes na resolução de questões envolvendo cálculo de volume de sólidos geométricos e suas unidades de medidas.

Palavras-chave: Ensino. Ensino de Matemática por atividades. Ensino de Volume.

ABSTRACT

MORAES, Ideny Espirito Santo Queiros. The Teaching of Geometric Solids Volume by Activities. 2018. 279f. Dissertation (Professional Masters in Mathematics Teaching) - University of the State of Pará, Belém, 2018.

This work presents the results of a research that had as objective to evaluate the effects of the application of a didactic sequence, different from the traditional one, for the calculation of Volume calculation, on the participation of the students of a public school of the regular high school of Pará in mathematics classes and on the performance of solving questions involving volume of geometric solids. In order to achieve this goal, we chose Didactic Engineering as a research methodology, which was developed in four stages. Initially, the preliminary analyzes were made, the first stage of the research, composed by the historical aspects of the Teaching of Space Geometry; a review of studies on the subject; diagnostic studies; experimental studies; Theoretical foundation; Mathematical Rationale and consultation to students. The second stage of the research, conception and analysis a priori, presents the Teaching of Mathematics by activities and a Didactic Sequence involving the calculation of Volume of Geometric solids. The third stage of the research, experimentation, was carried out in a state school in Castanhal / PA with 30 students of the 2nd year of High School. The last stage of the research, a posteriori analysis and validation, was destined to analyze the results obtained during the experimentation; to the statistical treatment of the obtained data, by means of the percentage comparison of the results of the tests, analysis of the types of errors occurred in the tests, the Pearson linear correlation coefficient and the hypothesis test. The validation of the results was performed by comparing the data obtained in the a priori and a posteriori analyzes. The results of the comparison point to a significant increase in the post-test scores; the hypothesis test proved statistically this increase and none of the socioeconomic factors interfered in the obtained results, noting that the teaching methodology had an effect, which resulted in a significant improvement in students' performance in solving questions involving geometric solids volume calculation and units of measurement.

Key-words: Teaching. Teaching by activities. Mathematics teaching. Calculation of volume.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO

A partir da ideia de que a disciplina Matemática não deve ser tratada como uma ciência que busca desenvolver isoladamente o raciocínio e as habilidades cognitivas do educando, fez-se necessário um estudo a cerca da amplitude do ensino da Matemática no âmbito escolar. Em relação a este aspecto é que este trabalho se propõe a apresentar uma proposta de pesquisa para Geometria Espacial no Ensino Médio particularmente para o ensino de volume dos sólidos geométricos. A pesquisa aborda a Matemática como sendo eficaz e influente no desenvolvimento e na formação do educando e também a sua importância no currículo escolar; a educação em sentido amplo como algo essencial para obter-se um comportamento ético dos indivíduos; o ensino da matemática como um meio de suma importância para o desenvolvimento pleno da autonomia; e a formação do cidadão que está fortemente vinculada à prática educativa, sendo a escola o local onde se pratica a cidadania diariamente. Neste sentido Libâneo (1994, p. 94,citado por Maciel,2009,p.16) considera:

> [...] a matemática é importante no ensino, porém é importante esclarecer que esta disciplina não se limita apenas à preparação de um profissional para a área de trabalho, mas assim como nas ciências humanas, também tem grande importância no desenvolvimento social dos educando.

Outro fator importante, além dos mencionados por Libâneo, no ensino da Matemática é o acesso a um grande número de instrumentos e de técnicas intelectuais que, quando devidamente inseridos no contexto, contribuem para que o aluno possa enfrentar problemas de seu cotidiano utilizando os recursos matemáticos que domina, desenvolvendo a capacidade de refletir, compreender, criticar e explicar situações novas segundo D’Ambrosio: “não existe dúvidas que para o desenvolvimento de uma atitude matemática adequada será muito útil para nosso futuro”. (1986, p. 18).

Segundo o que é destacado por Libâneo (1994) e D’Ambrósio (1986) o ensino da Matemática é de suma importância na formação social, intelectual e também, no desenvolvimento da criticidade e da autonomia do educando e são enfáticos em defender a eficácia e a influência da matemática no desenvolvimento e na nossa formação global.

Para onde olhamos, é possível perceber que as formas geométricas e as ideias geométricas se fazem presentes em várias áreas do conhecimento. De acordo com as diretrizes curriculares é considerada a importância do conhecimento geométrico para a localização do indivíduo no espaço e sua percepção do meio, permitindo que o aluno desenvolva sua percepção do meio, sua linguagem e raciocínio geométrico de tal forma a construir conhecimento espacial e conceitos.

Neste sentido e, tomando-se por base as experiências das práticas pedagógicas nos dez anos de docência, percebemos que a Geometria no ensino fundamental nem sempre é apresentada ao estudante relacionada com os demais conteúdos, como a aritmética e álgebra, o que torna mera ilustração e também exemplificação sem levar a formação de conceitos e propriedades.

Em vários estudos realizados é percebido que na realidade a geometria é dada menos ênfase em comparação com outros temas Busca-se, pois, uma forma de abordar no Ensino Médio, os conceitos em geometria não compreendidos durante o aprendizado ou anteriormente. É partindo de situações do mundo real, de maneira que os alunos desenvolvam suas percepções espaciais e a visualização que é muito necessária para que a geometria seja o elo entre a didática pedagógica da matemática e as demais áreas do conhecimento.

Os anseios de uma educação de qualidade são também os anseios de todos os educadores, portanto, a pesquisa a que nos propomos visa resgatar, nos alunos do Ensino Médio, a representação, visualização e a interpretação geométrica, sempre presentes no ensino global, dessa maneira, buscando proporcionar a aquisição desse conhecimento e as relações com os conteúdos de sala de aula, no qual se utiliza dessas informações para se relacionar com as outras áreas da matemática e diferentes áreas do conhecimento através do ensino por atividade. Com isso surge a questão principal deste trabalho: **Que contribuições uma sequência didática, por meio de atividades, podem proporcionar ao ensino de Cálculo de Volume de Sólidos Geométricos no Ensino Médio?**

Nesse sentido, nosso trabalho tem como objetivo **avaliar os efeitos da aplicação de uma sequencia didática, diferente da tradicional, para o ensino de Volume tem sobre a participação dos alunos de uma escola publica do ensino médio regular do Pará nas aulas de matemática e sobre o desempenho da resolução de questões envolvendo volume de sólidos geométricos.** E com base em tratamento estatístico dos resultados dos testes (pré-teste e pós-teste) e do desempenho dos sujeitos durante desenvolvimento das atividades propostas. Para desenvolvimento dessa pesquisa, optamos pela experimentação, com a utilização da Engenharia Didática como metodologia de investigação de acordo com Artigue

(1996), com contribuições nacionais de Machado (2012), Almouloud (2010), Sá e Alves (2011).

Nessa perspectiva nossa opção metodológica pela Engenharia Didática se deu devido o apelo experimental relacionado ao estudo a que se propõe, por ser uma opção metodológica desenvolvida a partir da concepção, realização, observação e análise de sequência de ensino Artigue (1988) *apud* Machado (2008). Metodologia essa que se desenvolveu a princípio com nossas escolhas e hipóteses na fase de **análises preliminares** usando o desenvolvimento de um referencial teórico e o desenvolvimento prático do estudo. Nesta fase do trabalho investigamos o ensino da Matemática através de questionários aplicados a 80 alunos do Ensino Médio da rede pública estadual. Na fase de **análise *a priori*** optamos pelo desenvolvimento de um objeto de aprendizagem, seletivas de atividades, que será instrumento que nos dará suporte para o desenvolvimento das sessões de ensino baseadas no Ensino por Atividades e o planejamento de nossa sequencia didática.

Na **fase de experimentação**, realizaremos nosso trabalho com uma turma do 2º ano do Ensino Médio no município de Castanhal, iniciando com um Pré-teste na primeira sessão; nas sessões seguintes conduziremos as atividades no sentido de promover a descoberta das fórmulas dos sólidos geométricos, bastante útil nos exercícios de aprendizagem, sempre na perspectiva do Ensino por Atividade; concluindo as sessões com um Pós-Teste. Na quarta fase do estudo, de **análise *a posteriori* e validação**, desenvolvemos as análises de todas as informações colhidas durante a fase de experimentação, confrontação dos dados obtidos nas análises *a priori* e *a posteriori.* A seguir veremos o detalhamento destas fases que compõe a Engenharia didática e a forma como esta vem organizada no decorrer do trabalho.

O acesso a pesquisas recentes sobre o conteúdo de volume de sólidos geométricos nos levou a desenvolvermos uma analise em alguns desses estudos, referentes ao processo de ensino e aprendizagem da Geometria, especialmente da Geometria Espacial Métrica, no Ensino Médio. Analisamos estudos extraídos dos bancos de dissertações e teses nos sites da Capes, Ministério da Ciência e Tecnologia, UFSC/SP, DEFCUL, UFG e GT dos anais dos Congressos vinculados a Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

A partir dos estudos realizados o tratamento de dados com o intuito de verificar as obras teóricas mais empregadas, e as pertinentes ao nosso trabalho. Ao selecionarmos as obras teóricas para a realização das sínteses, inicialmente fizemos um fechamento e posteriormente observarmos as convergências e complementaridades.

2- **ANÁLISE PRÉVIAS**

Esta seção tem por objetivo, apresentar os resultados de estudos sobre o ensino de volume de Sólidos Geométricos no qual baseamos contribuições de vários autores, que tem dedicados seus estudos a pesquisa em Matemática sobre geometria Métrica. Nas Análises Prévias, de acordo com Artigue (1996) o pesquisador vai à busca de referenciais teóricos para nortear sua pesquisa, fazendo um estudo epistemológico sobre o desenvolvimento do conteúdo trabalhado, a fim de conhecer como está se dando o ensino habitual do conteúdo trabalhado, a visão dos sujeitos envolvidos, assim como entender a realidade donde será aplicada a experiência da pesquisa.

2.1 O ensino da Geometria

No histórico da geometria no Brasil, Valente (1999), conta que a partir de 1648, os estudos da geometria foram alavancados pela necessidade de preparo militar, onde se constatou que militares sem noções básicas de matemática tinham dificuldades em acertar determinados alvos, realizar leituras de mapas e organizar o material de artilharia. Em 1699, com propósito de suprir essa carência foi criada a aula especializada de fortificações, com os objetivos de ensinar a desenhar e a trabalhar no forte. Também por volta de 1730, a capacitação dos militares se tornou obrigatório e o estudo de geometria foi fundamental para o currículo e desempenho desses militares e assim impulsionou estudos sobre matemática e em particular a geometria.

As tentativas de se colocar para estudo a geometria básica enfrentaram várias rejeições, por não haver professores primários habilitados e por não ser uma disciplina obrigatória para acesso a instituição secundária (VALENTE, 1999, p.113). Sendo assim a geometria ficou sendo assunto tratado somente no ensino secundário. Em 1889 tornou-se obrigatório o "ensino do desenho técnico e desenho geométrico em todo país, haja vista o caráter científico e positivista desses saberes, expressão do rigor e da precisão (KOPLE, 2006, p.13). Segundo Pavanello (1993), a década de 60 é marcada pelo movimento da matemática moderna, tendo como características principais o rigor algébrico e a utilização de símbolos da teoria dos conjuntos. A publicação de livros nesse período tinham conteúdos de geometria, relacionados à noção de figuras geométricas e intersecção de figuras na reta, ponto e plano. Uma abordagem feita de forma intuitiva, desvinculada das noções elaboradas primitiva e empiricamente. A geometria passou a ser desenvolvido sob enfoque das transformações, no qual gerou obstáculo, pois, os professores não tinham domínio sobre esse conteúdo, assim ela foi deixado de lado, dando mais ênfase ao ensino da álgebra. Esse contexto voltou a acontecer devido a criação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) de 1º e 2º graus, a Lei 5692/71 que dava liberdade aos professores para deixarem de não incluir conteúdos geométricos, pois eles em sua maioria se sentiam inseguros em trabalhar conteúdos geométricos.

Até o século XIX, a geometria era tida como uma descrição do espaço físico. Porém o primeiro passo dado no sentido de reduzir os conteúdos geométricos a algébricos se dá no decorrer do século XVII, por Descarte. Nesse contexto geométrico é que no século XIX Félix Klein é quem de acordo com (NASSER, 2004) da o suporte necessários para diferenciar os tipos de geometria. Feitas algumas análises ainda nesse mesmo século a geometria passou a se apresentar de maneira mais completa, incluindo espaço físico e abstrato. Entretanto hoje ainda há um impasse quanto ao papel da geometria, pois alguns matemáticos defendem que a geometria deveria ceder espaço para outros ramos de pesquisa em matemática e outros defendem que a geometria é essencial no processo de aprendizagem escolar, pois está ligada a muitas disciplinas. Conforme Fillos (2006, p. 2):

> A Geometria é descrita como um corpo de conhecimentos fundamental para a compreensão do mundo e participação ativa do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e desenvolve o raciocínio visual.

De acordo com Nacarato & Passos (2003, p.28), O ensino de geometria passou a se recuperar, no final dos anos 70, preocupação dos educadores matemáticos, pois o que se percebe nas pesquisas na década de 1980 é que a geometria era ensinada de forma totalmente desvinculada das outras partes da matemática, ou seja, quando o ensino da geometria ocorria, apresentavam algumas características como: limitação e apresentação de fatos e procedimentos isolados; não valorizando o processo de conhecimento em geometria e transmissão de conteúdo sem significados; abordagem dos temas de geometria exclusivamente no seu aspecto estético; redução ao ensino ao estudo de figuras planas e espaciais; não utilização dos conteúdos no cotidiano dos alunos; e apresentações de deduções prontas para serem memorizadas pelos educando. Estes foram alguns dos motivos que justificavam o caos no ensino da geometria.

Passos & Nacarato (2003, p.23) indicam muitos fatores para essa situação, entre elas destaca-se a reforma do ensino advinda com o Movimento Moderno da Matemática que algebriza os conteúdos geométricos, o despreparo do professor em relação ao desenvolvimento de conteúdos geométricos, criando desta maneira um “vazio” no processo de aprendizagem e nas práticas pedagógicas até os dias de hoje.

Por essas razões surge à necessidade de serem criadas e utilizadas novas metodologias que contemplem o aprendizado dos alunos e os tornem independentes naquele conhecimento. Dessa maneira, com os jogos, material concreto para se manipular os programas computacionais e a resolução de problemas seriam capazes de tornar o ensino de geometria mais significativo para o educando.

A Educação Matemática não pode ser baseada somente em teorias que o livro, apostilas ou o quadro negro apresentam. No contexto atual a educação é muito mais complexa, e atinge o mundo de forma global como defende D’AMBRÓSIO.

> ...chama-se a atenção para a necessidade de se relacionar a matemática com os demais setores da sociedade, sobretudo reconhecendo os novos desenvolvimentos das ciências e da tecnologia. O grande desafio que nós, educadores matemáticos encontramos é tornar a matemática interessante, isto é, atrativa, relevante, isto é útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje (D’AMBRÓSIO, 2001, p. 14 - 15).

Assim é na Educação Matemática que encontramos o apoio necessário para tal transformação.

> A educação matemática que queremos é aquela que se estenda muito além dos muros da escola do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e do Ensino Superior, que forme educadores e pesquisadores em Ensino de Matemática comprometidos com o ensino formal e não formal (FAINGUELERNT, 2004, p. 07).

Diante do exposto a educação matemática é muito importante e se faz presente no cotidiano do aluno, no qual também exige adaptação dos educadores, tal tipo de adaptação. Hoje o importante é tornar o estudo mais prazeroso, eficaz e significativo para o aluno, colocando ele mais próximo da realidade.

> Não há dúvida que numa atividade cujo objetivo é a formação do indivíduo, como é o caso do ensino, não se pode abrir mão do acesso ao conhecimento científico. Mas, levar em consideração as diversas visões deste conhecimento, introduz uma nova concepção de formação, uma formação cuja

> referência é ao mesmo tempo a ciência e o senso comum. (MAIA, 2000a, p.25).

Neste contexto é importante considerar também que não se deve valorizar o conhecimento técnico apenas, mas também o conhecimento popular, ou seja, os dois são importantes, mas devem está juntos. Trazer contexto para a realidade do aluno, apresentar a matemática, a geometria, em particular, de maneira clara, objetiva e contextualizada dentro da realidade dele. Observa-se que a Matemática, Geometria, fórmulas, números, letras, figuras, áreas, volumes, medidas, etc.; são encaradas normalmente pelos educando como castigo e isso deve ser evitado, se fosse proposto uma aprendizagem dinâmica e significativa, que mesmo com teorias e fórmulas não causassem traumas nem medo.

Hoje os materiais didáticos como livros e apostilas contribui muito para a aprendizagem ser deficiente, faltam contexto, aplicações da realidade, imagens e mostrar como o educando possa aplicar determinado conteúdo no seu cotidiano. Os conteúdos geométricos propostos pela maioria dos livros privilegiam a álgebra na sua resolução e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração, e também não tem muito a passagem da geometria empírica para a dedutiva. Esse processo educativo cria no educando concepções impróprias em se tratando aprimoramento dos conceitos geométricos, (MANRIQUE, 2004).

De acordo com Pavanello, citado por Nascimento (SBEM, 2004):

> Além de uma deficiência dos livros didáticos, outro fator importante é o tempo, ou seja, em algumas escolas o conteúdo geométrico é tratado apenas no final do livro didático e muitas vezes não dá tempo para ver o conteúdo, e quando sobra tempo, o mesmo não é visto completo e tem ficado relegado a um plano secundário.

Não deixamos de citar também que a Matemática e em particular a Geometria causa desinteresse, pois os alunos não veem significados no que vem sendo apresentado a ele no que está sendo ensinado. Está faltando mostrar metodologias apropriadas ao que ele está estudando, dá significado a conteúdos e propor estratégias que melhorem seu aprendizado, pois em muitas situações o educando não tem dificuldade para aprender, mas sim desinteresse; pois não conseguem usar a matemática como ferramenta que facilita e sim pensam a matemática como uma barreira.

A geometria está sempre presente em nosso cotidiano, é só observarmos ao nosso redor que vemos figuras, ângulos, área e volume a ser calculada, uma transformação de medidas, uma visão de sólidos, em fim, tudo isso é possível com a ajuda da geometria. Sobre sua importância, Lorenzato (1995) diz que a geometria tem papel essencial na formação dos indivíduos, pois abre possibilidade para uma interpretação mais completa do mundo ou do espaço em que vivemos.

E a busca da função da Matemática é uma atribuição do professor, isto é, dar uma função para o conteúdo que está sendo ensinado. Para tornar o ensino com mais aplicação, mais acesso para o educando, de maneira que ele use a matemática como ferramenta que ajudará no seu aprendizado, A linguagem acessiva desempenha importante papel na construção deste conhecimento. Freitas, citado por Zuchi (2004, p.49) dizia:

> Ao mesmo tempo em que a linguagem é um fator importante para o desenvolvimento mental da criança, exercendo uma função organizadora e planejadora do seu pensamento, ela tem também uma função social e comunicativa. Por meio da linguagem a criança é exposta ao conhecimento humano e adquire conceitos sobre o mundo que a rodeia, apropriando-se da experiência acumulada pelo gênero humano no discurso da história social.

A maneira como o professor fala é muito importante para a compreensão e aprendizagem do aluno. Muitas vezes o aluno não consegue ter uma compreensão com o educador, por ter uma linguagem técnica, muito formal, não condizente com o dialeto do aluno, nesse sentindo os alunos pedem auxílio aos colegas de classe que falam uma linguagem mais informal e em muitos casos sanar suas dúvidas. Em grande parte dos casos é preciso que o professor atinja suas metas falando a língua do aluno, ou seja, uma maneira que seja compreensiva e adequada.

Para se mudar a visão dos alunos sobre a matemática, que é considerada por eles uma matéria difícil, chata e desinteressante, é necessário torná-la prazerosa, interessante e muito útil.

Diante disso, não podemos deixar de resaltar alguns pontos importantes sobre o ensino da Matemática que quando não considerados podem ocasionar em desinteresse por parte do aluno:

- O esclarecimento sobre a importância do conteúdo ensinado e sua aplicação na vida pratica do aluno;

- Propiciar momentos de esclarecimentos sobre a presença da Geometria em nossa vida e de como esses conhecimentos pode contribuir para a transformação do espaço; o que possibilita uma visão mais equilibrada da Matemática.
- O professor assume o papel de facilitador da aproximação do conteúdo matemático e o cotidiano do aluno para que ele possa usar a Matemática como ferramenta para soluções de problemas e situações diárias.
- Nessa perspectiva de tornar o conhecimento pratico o uso da linguagem adequada também assume sua importância;
- Utilizar metodologias que despertem o interesse do aluno e torne o aprendizado agradável e interessante;
- O tempo que se disponibiliza para o ensino dos conteúdos de Geometria deve ser considerável e suficiente para que os conteúdos geométricos sejam bem trabalhados.

Nessa perspectiva D'AMBRÓSIO (2001), considera que o grande desafio que nós, professores de matemática, encontramos é, tornar a matemática mais atrativa, ou seja, relevante, interessante, útil e atual, isto é, contextualizada e de acordo com o mundo de hoje. Já Fainguelernt (2004), diz que a Educação Matemática que pretendemos é aquela que vai muito além das escolas de educação básica e superior.

Como podemos perceber ambos concordam que só conseguiremos avançar e alcançar nossos objetivos de fazer a matemática uma disciplina prazerosa e interessante, é quando for mostrada suas aplicações, principalmente fora do ambiente escolar, na vida cotidiana do aluno.

No caso específico da Geometria plana, por exemplo, esta enfrenta diversos problemas que atrapalham o aprendizado do educando. De acordo com Manrique (2004), alguns livros didáticos têm conteúdos insuficientes, pois os problemas geométricos propostos por eles privilegiam as resoluções algébricas e exigem pouco o raciocínio lógico dedutivo ou demonstração. Mas ainda, não existe de maneira gradual a passagem da Geometria empírica, aquela que o educando trás através de sua vivência, experiências e observações, para a geometria lógica dedutiva, além de muito poucos trabalhos que contemplem a leitura e interpretação de textos matemáticos.

Segundo Pavanello, citado por Nascimento (2004) vai além e diz que outro fator de muita importância é o tempo, isto é, em muitas escolas o conteúdo é tratado no final do livro didático, e é ensinado se der tempo e também quando sobra tempo, o conteúdo é ensinado de maneira superficial, relegado a um plano secundário. Uma forma de se melhorar esta questão do tempo é alternar as aulas de geometria com outros conteúdos matemáticos, não deixando para o final do ano letivo. Como se observa existem diversos fatores que dificultam o aprendizado dos alunos e contribui para o seu afastamento cada vez mais da geometria, por eles considerarem um conteúdo de difícil compreensão, porém existem meios para revertermos essa situação, principalmente quando mostramos o quanto à geometria é importante, isso é possível com organização e criatividade.

De acordo com Lorenzato (1995) o estudo geométrico tem papel fundamental na formação do indivíduo, pois dá base a uma visão mais completa do mundo, uma formalização mais abrangente de ideias em relação a geometria é uma visão mais técnica da Matemática. Já Hershkowits, no qual foi citado por Fainguelernt (1999), diz que a geometria é o encontro entre o conteúdo Matemático e a Matemática como um recurso, isto é, a geometria é o elo entre o conteúdo prático e teórico. Também se observa que a geometria está muito presente no nosso cotidiano, é só observamos ao nosso redor que sempre tem um ângulo, uma reta, uma figura para ser calculados a área e o volume, uma medida para ser transformada, em fim tudo é possível com a ajuda da geometria.

Para o ensino se tornar mais aplicado, mais acessível para o aluno, de maneira que ele consiga usar a Matemática e a Geometria como um instrumento que ajudará na sua jornada, a linguagem é um papel fundamental na construção desse conhecimento. Freitas que foi citado por Zuchi (2004), fala que a linguagem é fundamental para o desenvolvimento cognitivo da criança, exercendo função de organização e planejamento de seu pensamento, tem também função social e de comunicação. Pois muitas vezes o professor falando uma linguagem muito científica não consegue levar o aprendizado para o aluno, já seus colegas falando numa linguagem mais popular, consegue transmitir o que o professor desejava.

A Matemática, particularmente a geometria é uma ferramenta fundamental para nosso aprendizado e para se chegar a um resultado satisfatório é fundamental tornar uma ciência útil e principalmente aplicada no cotidiano.

2.2 Estudos teóricos investigativos

Os estudos teórico/investigativos apresentam uma proposta de investigação a fim de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo de Volume de Sólidos Geométricos.

Morais & Bellemain (2011) investigam a abordagem da grandeza volume nos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio. Neste estudo foram analisadas 7 coleções aprovadas no PNLD 2012 (Brasil, 2011), buscando identificar como essas coleções abordam volume. O marco teórico da pesquisa é a Teoria dos Campos Conceituas. As questões de pesquisa foram: Como é conduzido o trabalho sobre volume no Ensino Médio? **Quais as fórmulas trabalhadas? Como é justificada a validade dessas fórmulas? O princípio de Cavalieri é explorado?** Tais questões tratam de uma análise dos livros didáticos para o Ensino Médio com a finalidade de compreender a abordagem sobre volume proposta nesse recurso didático. A pesquisa teve como principais objetivos analisar a abordagem da grandeza de volume nestes livros de Matemática para o Ensino Médio aprovados no PNLD 2012, além disso, mapear as situações que abordam este assunto, classificar tais situações identificadas, as propriedades do conceito de volume analisar o uso das representações simbólicas na abordagem de volume.

Seu aporte teórico parte dos trabalhos de Gérard Vergnaud (1983, 1990), com a Teoria dos Campos Conceituais e um artigo publicado na revista francesa Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM, vol. 4, 1983) sobre a didática da aquisição do conceito de volume, os trabalhos de Bellemain & Lima (2002) e de Douady & PerrinGlorian (1989), ambos propõem um modelo didático para a construção do conceito de área que consiste em distinguir três quadros: quadro geométrico (figuras geométricas), quadro das grandezas (área) e quadro numérico (medida).

Este trabalho também se apoia na teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud,1990) que define um campo conceitual como um conjunto de situações cujo domínio exige uma variedade de conceitos,procedimentos representações simbólicas interligadas. Sendo na verdade uma teoria cognitiva que tem por finalidade um quadro coerente e princípios básicos ao estudo do desenvolvimento da aprendizagem mais complexa (Vergnaud. 1990).

O trabalho principal consistiu em analisar as 7 coleções aprovadas no PNLD 2012 (Brasil, 2011) listadas a seguir: Coleções aprovadas no PNLD 2012 Conexões com a

Matemática - Juliane Matsubara Barroso - Editora Moderna. Matemática – Contexto & Aplicações - Luiz Roberto Dante - Editora Ática. Matemática – Paiva - Manoel Paiva - Editora Moderna. Matemática Ciência e Aplicações - David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo - Editora Saraiva. Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia - Jackson Ribeiro - Editora Scipione. Matemática Ensino Médio - Maria Ignez Diniz, Kátia Stocco Smole - Editora Saraiva. Novo Olhar – Matemática - Joamir Souza - Ed. FTD. A construção precisa dos critérios de análise se baseia na revisão de literatura, na varredura das coleções, mas também nas críticas e indicações que constam no guia do livro didático do PNLD 2012.

Conforme já descrito acima, no ensino fundamental algumas coleções trabalham a dimensionalidade da grandeza volume, entretanto, não apresentam um estudo consistente. O Ensino Médio é um momento particularmente importante para retomada desse estudo pela existência das grandezas intensivas, ou seja, aquelas que são razão de duas grandezas distintas como velocidade, aceleração. A partir das considerações apontadas no guia do PNLD em relação ao tratamento dado à grandeza volume pelos livros didáticos, foi construído um roteiro de análise, onde se delimitou as variáveis que nortearam essa análise de forma mais minuciosa, tendo em vista os objetivos dessa pesquisa conforme indicado anteriormente.

Em primeiro lugar, realizou-se uma leitura do guia do PNLD, onde identificaram quantitativamente como a grandeza em foco está distribuída nas coleções (ano, capítulo, número de páginas, eixo de conteúdos). A partir da leitura dos dados levantados, pode-se inferir uma tendência a situar o trabalho com volume nos capítulos finais dos livros. Essa tendência já havia sido observada em livros de 9° ano (Morais e Bellemain, 2010), aprovados no PNLD 2008 (Brasil, 2007). Enquanto no ensino fundamental esse conteúdo é trabalhado no bloco das Grandezas e Medidas, no ensino médio ele se insere no eixo da Geometria. E em relação ao número de páginas, contabilizamos aquelas em que trata da geometria espacial, o que não necessariamente corresponde ao cálculo de volume apenas.

Diante desses dados, cabe levantar algumas questões: Quais as implicações da abordagem da grandeza volume no campo geométrico? Concentrar o estudo dessa grandeza em um único ano limita seu estudo? As abordagens são suficientes para a apropriação dos conceitos em jogo? Após a análise minuciosa das coleções, etapa posterior dessa pesquisa, pode-se responder a essas questões. Para finalizar, essa pesquisa, a qual vem sendo desenvolvida no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – CE – UFPE, partirá das “provocações” levantadas pelo guia do PNLD (Brasil, 2011). No entanto, a delimitação dos critérios de análise que irão constituir um roteiro mais sistemático para análise dos documentos e livros didáticos, está ainda em construção.

2.3 Estudos diagnósticos

O trabalho de Rogenski et al (2007) foi realizado com uma investigação no 2º ano do Ensino Médio, abordando a matemática a partir de diferentes situações do dia-a-dia dos alunos. O cinema foi o ponto de partida, relacionando-o às artes, a biologia, à arquitetura e outros aspectos do mundo físico, com a finalidade de demonstrar aos alunos que a Geometria está presente em diversas situações do cotidiano e que é possível associá-la aos conteúdos trabalhados em sala. Nessa perspectiva foram trabalhados conceitos relacionados à proporção, número de ouro e sequências. E segundo os relatos no trabalho, os alunos puderam interagir com o corpo humano, com as obras de arte, com a natureza, com os sólidos e com as figuras geométricas, realizando observações, medições, construções e cálculos.

Quanto aos recursos metodológicos optou-se como ponto de partida, o cinema, atividades consideradas atraentes para os alunos dessa faixa etária, buscando a exploração da história do cinema e com a promoção de uma sessão na própria escola, nessa ocasião foram orientadas a observarem os aspectos matemáticos presentes no filme. Ainda segundo o trabalho os objetivos foram bem definidos e visavam: aproximar os temas apresentados no filme da realidade dos alunos, explorar os aspectos matemáticos do filme em correlação com demais áreas do conhecimento e ainda o desenvolvimento da sensibilidade artística. O trabalho também visou que os alunos identificassem no mundo físico a presença de aspectos matemáticos e sua importância para o entendimento de diversas situações, bem como a percepção do homem como produtor do conhecimento cultural, artístico e científico ao longo de sua própria história.

A questão norteadora foi: De que forma o professor pode apresentar ao aluno novas perspectivas e levá-lo a descobrir a matemática através da Arte? Está foi a motivação deste trabalho que influenciou. Sabendo-se que a matemática desenvolve o raciocínio dedutivo e ajuda na estruturação do pensamento, além disso, também está presente nas diversas atividades humanas e áreas do conhecimento, buscou-se por meio desse estudo, associar arte e matemática.

Dentro das etapas metodológicas deste estudo, após a abordagem inicial, foi aplicado o teste de Van Hiale, adaptado por Nasser (2006 p.83-85) com a finalidade de averiguar o nível de conhecimento dos alunos na turma em pesquisa. Optou-se por aplicar em três etapas,pois à medida que avançavam em cada uma delas, encontravam as respostas do nível anterior.

Na primeira etapa, as atividades propostas apresentaram-se no nível de reconhecimento de figuras geométricas, associando nomes às figuras. Na segunda etapa agora no nível de análise, foram analisadas as figuras conforme suas propriedades e na terceira e última etapa no nível de abstração, propiciou-se que fossem compreendidas as inter-relações entre as figuras geométricas e suas definições. Assim buscou-se simultaneamente a abordagem de figuras tridimensionais e bidimensionais relacionando-as, inicialmente aos sólidos geométricos presentes no filme, sejam eles identificados ou não pelos alunos.

A leitura do livro “A Matemática e a Mona Lisa”, que analisa a ciência e a matemática presentes na obra de Leonardo da Vinci, foi o que motivou o inicio desta pesquisa. O livro contempla o desenvolvimento da ciência e da arte desde os primórdios da civilização, além disso, a dinâmica interna entre elas.

O trabalho proporcionou explorar a Geometria Espacial, assunto considerado de difícil entendimento por boa parte dos alunos, por exigir que se relacionem os elementos presentes nos sólidos geométricos e no decorrer do trabalho essa tarefa foi sendo realizada com maior clareza e os alunos puderam perceber que o seu redor constitui-se de formas geométricas espaciais e que a partir delas podem-se explorar os conceitos geométricos, que são abstratos. Como exemplo foi que no decorrer da proposta, conforme os alunos foram realizando as atividades, puderam identificar situações conhecidas como sólidos e figuras geométricas; o homem vitruviano inserido numa figura bidimensional, o pentagrama, mas não conheciam as proporções do corpo humano.

Este estudo não teve a intenção de levantar questões sobre os problemas de aprendizagem matemática relacionada ao ensino da geometria, uma preocupação crescente entre os educadores, que buscam novas formas de envolver o aluno numa aprendizagem significativa.

No decorrer das atividades propostas foi possível observar que os alunos apresentavam conhecimentos geométricos defasados e principalmente não conseguem relacionar os conteúdos com a sua realidade. E o desenvolvimento da proposta deste trabalho vem proporcionar mudanças significativas nessa construção, percebendo-se maior interesse no assunto, envolvimento nas atividades e construção significativa de conceitos geométricos. E ainda o despertar do gosto pelas artes em suas diferentes formas, fazer a correlação da matemática com as demais áreas de conhecimento e tomar consciência da importância dessa relação para o entendimento de variadas situações diárias.

Segundo o autor o trabalho alcançou seu objetivo chegando a um resultado satisfatório, já que a partir dele os alunos passaram a se apropriar de conhecimentos com os quais poderão criar relações sociais constituídas de sensibilidade, criatividade e criticidade, características essenciais para transformação da realidade em que se encontram inseridos Rogenski (2007).

2.4 Estudos experimentais

Os estudos que analisamos nesta categoria foram desenvolvidos com o propósito de investigar as potencialidades, do ensino de volume de sólidos geométricos por atividades experimentais em que favoreça o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Os estudos analisados nessa categoria foram desenvolvidos por: Santos (2012), Grillo (2014), Pais (2011) Santana (2014), Paula (2011) e Silva (2017) que tiveram como objetivo investigar as potencialidades, do ensino de volume de sólidos geométricos por atividades experimentais.

No caso do trabalho de Santos (2012) a Engenharia Didática foi utilizada como metodologia principal. Neste estudo a autora se propôs a responder o seguinte questionamento**: Como podemos contribuir para que o aluno elabore argumentos que validem a construção de conceitos matemáticos relacionados à formalização do cálculo de volume de sólidos geométrico?**

O estudo teórico realizado para este trabalho e o desenvolvimento baseou-se na teoria das situações didáticas de Brosseau (1996) e, as análises preliminares constaram de: análises preliminares analise *a priori*, fase de experimentação, analise *a posteriori* e validação. A pesquisa de Santos (2012) se utiliza da tecnologia computacional por ser essa ferramenta considerada eficiente no processo ensino aprendizagem de volume de sólidos geométricos nos dias atuais. Considerando esse fator construiu-se um objeto de aprendizagem, (software) que permitiu a descoberta das formulas, pois esse instrumento tecnológico omitia as formulas até que o usuário a descobrisse, o que tornou a descoberta muito mais interessante.

O propósito de seu trabalho era de que os alunos a partir de uma sequência de figuras com respectivos valores das medidas de comprimento, largura e altura para paralelepípedo, aresta para o cubo, área da base e altura para prisma e pirâmide, raio e altura para cilindro e cone e, raio para esfera; conseguia-se descobrir as respectivas formulas.

As atividades com o software foram seguidas de uma atividade de fixação à análise a*posteriori* da sequencia didática evidenciou que antes das atividades os alunos não conseguiam resolver as questões de volume de sólidos geométricos, porém com todos os procedimentos desenvolvidos nas sessões de ensino, contribuíram para os resultados obtidos no pós- testes, onde o percentual de aproveitamento foi bastante expressivo. Com isso a pesquisa concluiu que inicialmente grandes partes dos alunos que participaram da pesquisa não sabiam calcular o volume de sólidos geométricos e, no final, estavam aptos a resolver questões sobre o assunto, superando suas dificuldades iniciais, o que de certa forma fortaleceu a eficiência do ensino por atividade como metodologia eficaz para o ensino de cálculo de volume de sólidos geométricos, SANTOS (2012).

Nos estudos de Grillo (2014) analisaremos os resultados da pesquisa, que apresenta como produto principal uma sugestão didática para as aulas de Geometria Espacial no Ensino Médio; com proposta inicial de experimentos em planificação de sólidos geométricos, particularmente do cubo, com o objetivo de promover a construção abstrata de objetos geométricos de três dimensões. O autor propõe problemas que utilizam essas planificações com o objeto espacial, assim como proporcionar a contextualização da geometria espacial, a ideia é propor atividades não tradicionais, em que os alunos trabalhem em grupos para desenvolver as propostas com poucas interferências do professor.

Tal proposta foi colocada mediante a construção de “folhas de atividades” contendo atividades a serem realizadas pelos alunos e com informação necessária e suficiente para que eles as entendessem e tivessem condições de resolvê-las. Após a aplicação e validação do produto didático conclui-se que o ensino da matemática através de problemas é uma metodologia que propõe o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção de conceitos e da aprendizagem se dá através de sua resolução. Professor e aluno, juntos desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula.

No Brasil, diversos estudo voltado à resolução de problemas no contexto da educação em matemática em vários níveis de ensino, vem sendo desenvolvido e orientados há anos pela profa. Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic. Ela destaca que a necessidade e a forma de trabalhar com resolução de problemas mudaram, e que:

> “hoje a tendência é” caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade de resolução de problemas como uma coordenação complexa e simultânea de vários níveis (PRATO, ALLEVADO, 2010; UNUECHIC, 2006, P.2).

Nesta proposta o aluno constrói o conhecimento a medida que reflete, cria hipóteses e busca soluções para os desafios propostos.

Outro aspecto que privilegiou o aspecto prático da Geometria foi o que Santana (2014) propõe em seu trabalho numa abordagem didática para o calculo de volume dos principais sólidos vistos no Ensino Médio. Buscou enriquecê-la com atividades concretas e com aplicações em situações-problema do cotidiano, pois o pesquisador acredita que nas aplicações concretas, os estudantes podem manipular ou mesmo criar os objetos de estudos no seu cotidiano, ressaltasse os fatos interessantes, curiosos e desafiadores relativos aos conceitos vistos.

Ao tratar dos conceitos da geometria Espacial referente ao cálculo de volume, seguiram-se as recomendações e procedimentos vistos no programa de mestrado, o qual defendeu a seguinte metodologia para trabalhar esse tema no ensino Médio; partir sempre de resultados particulares e estende-los para resultados mais gerais. É uma proposta metodológica que visa tornar o enfoque desse tópico da geometria espacial mais interessante e motivadora de uma aprendizagem significativa.

Nos problemas propostos, ao resolvê-los, seguiu-se as etapas esquematizadas por Polya (1995), as quais facilitaram bastante a compreensão e a estratégia na educação do que foi planejado. Serviram de modelos para que os estudantes os adotem como uma ferramenta e uma metodologia de procedimentos em situações- problemas semelhantes.

A aplicação do Principio de Cavalieri foi determinante e facilitou bastante os argumentos, por sua intuitiva e de fácil acesso aos estudantes do Ensino Médio, uma vez que reduziu o cálculo de volume ao cálculo de área. É um procedimento apropriado e recomendado para o Ensino Médio, pois é simples e, concomitantemente simples e forte matematicamente.

Quando se buscou situações concretas ou virtuais oportunizou ao estudante a criação ou manipulação dos aspectos relativos aos conceitos trabalhados, o que foi considerado ser determinante na motivação e no despertar do interesse do aluno no tema. Nas situações propostas para depois dos conceitos acreditou-se que confirmarão e reforçarão o aprendizado do que foi tratado. Foram situações com fatos interessantes, curiosos e colocam o estudante em posição de desafio tendo grande chance de fazê-lo querer aprender mais sobre o tema. Considerou-se que essa contextualização é um fator importantíssimo nesse aspecto da aprendizagem.

Neste trabalho foram propostos trinta e três atividades, distribuídas ao longo do trabalho conforme cada tópico fora sendo abordado e do objetivo que se buscava. São proposta de atividades que quando tomadas seguindo um planejamento didático adequado, onde os procedimentos de cada passo da atividade (objetivo, competências e habilidades que se pretende desenvolver, recursos didáticos metodologia, conceitos envolvidos, preparo e avaliação) são claramente definidos, podendo cumprir os seus objetivos. Considerou-se que a metodologia trabalhada, segue o que orientam os PCN para o ensino de geometria espacial no Ensino Médio e cumprir o que foi exigido no curso de Mestrado do PROFMAT. Acredita-se ter um impacto na prática didática em sala de aula, uma vez que tenta dar mais firmeza e consistência matemática nos conceitos trabalhados nesse tema no Ensino Médio.

Constitui-se numa busca de mudança na conduta didática de muitos professores do Ensino Médio, tentou-se tomar esse tópico da geometria espacial mais interessante, prazeroso e motivador resultando em um aprendizado mais crítico, buscando valorizar mais a participação ativa do estudante e fugir um pouco do contexto daquela aprendizagem mecânica predominante na escola.

Silva (2017) aborda em seu trabalho uma proposta de investigação metodológica com o propósito de resgatar conceitos de sólido de revolução, de conceito matemático abordados raramente em sala de aula e, com esse conceito fazer levar o aluno a compreender como são criados esses sólidos e como são estabelecidas as relações matemáticas entre suas medidas e propriedades, além de promover um avanço no raciocínio lógico dedutivo e uma melhor percepção do espaço.

As atividades que visavam gradativamente a construção dos sólidos de revolução através do software SuperLOGO 3.0. Este recurso teve por finalidade despertar a curiosidade, o interesse, a capacidade de elaborar conceitos, a investigação, em fim, o pensar e o saber matemático. O trabalho teve como principal objetivo desenvolver habilidades e competências para melhor entendimento de como são criados os sólidos de revolução? O que são? Qual a relação entre medidas e como calcular suas Áreas e Volumes.

O trabalho foi estruturado em três etapas de desenvolvimento; a primeira correspondeu a um levantamento bibliográfico com o objetivo de descobrir e apresentar referencias que tratam da utilização da informática no ensino da geometria com o auxilio da linguagem LOGO e de outros software que intermediam a construção das figuras geométricas e, a definição e construção dos sólidos de revolução segundo Gerson Iezzi e Jacson Ribeiro.

A segunda etapa foi realisada uma análise dos comandos básicos do software Super Logo 3.0 que facilitam a construção de figuras planas e espaciais para a elaboração de um tutorial.

E na última etapa foi desenvolvida uma proposta de intervenção metodológica para que o ensino dos sólidos de revolução através do Super Logo 3.0 onde foram elaboradas atividades que auxiliaram na busca e na construção do conhecimento geométrico para posterior apresentação para os professores de matemática da Escola Estadual de Ensino Médio situada no município de Castanhal.

A proposta foi apresentada aos professores de matemática da escola como ferramenta pedagógica para o ensino e aprendizagem de conceitos e das relações entre as medidas dos sólidos de revolução, oferecendo recursos para visualização da construção do Cilindro, do Cone, do Tronco do cone, da Esfera e de outros sólidos de evolução mais complexa.

Os professores participaram das oficinas de forma mais efetiva e através de um questionário, quanto a utilização da informática como ferramenta pedagógica para o ensino de matemática e na utilização do Super Logo 3.0, trata-se de um software cujos comandos são de fácil compreensão e utilização e como sugestão principal a realização constante de oficinas, sendo extensivas aos alunos, no sentido de aprimorar o ensino e a aprendizagem de matemática naquele estabelecimento de ensino.

A expectativa é que este trabalho provocasse reflexões quanto à utilização de métodos inovadores e desperte maior interesse das partes envolvidas no processo ensino aprendizagem, não apenas na busca, mas também, no aperfeiçoamento e na aplicação de ferramentas que venham contribuir para uma aprendizagem significativa.

2.5 Fundamentação Teórica

Nesta etapa do trabalho apresentaremos a fundamentação teórica que nortearam nossa pesquisa que seguiu os princípios da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) e no Ensino de Matemática por Atividades, apoiados na Técnica da Redescoberta segundo Sá (1999,2009).

Educadores e pesquisadores têm desenvolvido maneiras que façam o educando se interessar pelo estudo da geometria, pois esta é parte integrante de nosso espaço físico e seu estudo faz parte da aprendizagem e do currículo das escolas do Brasil e do mundo. O ensino de geometria, além de ter um grande campo de aplicação prática, permite igualmente o educando construir conhecimentos teóricos. Tais conhecimentos são feitos por temas, definições, postulados e teoremas, eles possibilitam um grande desenvolvimento intelectual, ou seja, uma grande conquista no raciocínio teórico e prático. O pouco uso da geometria, apresentada tardiamente, longe da realidade, não ligadas com outras disciplinas do currículo ou até mesmo sem vínculo com outras áreas da própria matemática, é um vazio a serem preenchido na prática pedagógica de professores, estudantes e outros profissionais envolvidos.

Segundo Pais (2006, p. 111) a Geometria Métrica, especialmente no cálculo de volume de sólidos geométricos é considerada de difícil entendimento porque necessita de visualização e, geralmente no ensino tradicional, o professor utiliza-se apenas de configurações geométricas, ou seja, desenhos geométricos para apresentar aos alunos e propiciar melhor entendimento do assunto, limitando esse entendimento, resultando num trabalho mecânico, limitado e que não estimula a reflexão. Portanto, uma primeira tarefa junto aos alunos, pode ser a de aprender a reconhecer os atributos que podem ser medidos. Muitos destes, se não todos, são estudados nas series iniciais do fundamental: área, capacidade, comprimento, densidade, distância, massa, temperatura, volume, entre outros. De modo geral, esses são atributos ao qual um adulto confere uma medida exceto no sentido mais técnico, assim como uma criança afirmaria que uma bola e um limão são parecidos tanto porque “tem peso” ou “volume” igual ou qualquer outro dos atributos mencionados como área, capacidade, comprimento, densidade, peso, temperatura, volume.

Segundo Rosito (2008), utilizar experimentação é considerado para o estudo de ciência, como essencial para atividade científica. Segundo este contexto o aspecto de ensino é fundamental para o ensino experimental de ciências; o entendimento que se tem dessas aulas e o conhecimento dos métodos essenciais no planejamento de aulas experimentais. O trabalho técnico científico escolar usualmente se baseia pela prática indutiva, o qual utiliza um processo gradativo, consecutivos e característicos, como: observação, experimentação, generalização indutiva, formular hipóteses, tentativa de verificação, comprovar ou recusar e obtenção de conhecimento de forma objetiva. Assim a concepção de ciência é empirista-indutiva para os alunos e também para os educadores (SILVA; ZANON, 2000).

É possível compreender que muitos professores acreditam que é possível comprovar a teoria através da prática realizada pelos educando, que se consegue chegar "por descoberta", a um determinado conceito ou teoria, ou até mesmo recapitular a teoria que foi estudada antes, também tentar compreender determinados conteúdos antes da teoria (SILVA; ZANON, 2000).

Segundo Lopes (2004) o entendimento que os professores têm sobre o estudo e trabalho experimental na ciência, vão ficar condicionados de maneira decisiva a forma como o trabalho experimental é colocado no currículo e também como são feitas as atividades experimentais e a forma de organização do trabalho na sala de aula. De outra forma para construir um conceito de que é trabalho científico e de como este trabalho deve ocorrer, é preciso ter uma ideia formada do que é ciência.

Usar experimentos como ponto inicial, para o desenvolvimento da compreensão de conceitos, é uma maneira de levar o aluno a participar de seu processo de aprendizagem, sair de uma postura passional e começar a agir sobre seus objetos de estudo, sabendo relacionar o objeto com fatos e buscar as causas dessa relação, procurando, portanto, uma ideia, uma explicação da causa para os resultados de suas ações ou de interações (CARVALHO etal,1999).

Perez (1995) sugere uma prática pedagógica que enfatize o desenvolvimento da criatividade do aluno por meio da "Resolução de problemas", pois para ele, quando os indivíduos são livres de problemas mentais ou psiconeurológicos, torna-se possível experimentar experiência de sua vida pessoal, que envolvam conceitos matemáticos em conhecimento matemático.

De acordo com Faigunlernt (1990, p.15) é de muita importância trabalhar os tópicos geométricos de diferentes maneiras, garantindo assim que a partir de experiência com materiais variados, o aluno possa confrontar elaborar modelos de representação e interpretação do objeto geométrico estudado.

Além da ampliação do leque de metodologias e de recursos a serem aplicados ao ensino de geometria, deve-se valorizar também a capacitação dos professores para a utilização desses recursos. Nesse contexto Barrantes e Blanco (2004), consideram que se deve fazer uma reflexão crítica sobre o trabalho dos centros de formação dos professores, possibilitando uma influência sobre a realidade escolar, dada pelo novo ponto de vista que sobre a geometria escolar vem propagando nas propostas curriculares há alguns anos. Portanto, nos questionamos se realmente as atividades experimentais, considerada pela maioria dos docentes como indispensável para o bom desenvolvimento do conhecimento científico é utilizada pelos professores e como isso acontece, além do conceito de experimentação que eles têm.

Apresentaremos aqui as tendências e perspectivas para o ensino de volume apontado nos estudos de literatura concernentes ao tema:

A nova proposta educacional instituída a partir dos PCN, apesar de ainda ser imposta, e excluir o professor do processo de elaboração, parece indicar alguns avanços, principalmente no que diz respeito aos currículos escolares, que poderão ser organizados e discutidos pela equipe pedagógica das escolas.

Essa proposta se fez num momento em que a credibilidade do trabalho escolar tem sido muito questionada. Alguns argumentam que a educação escolar não propicia a formação do educando para o trabalho. Outros argumentam que a escola está perdendo qualidade por se voltar cada vez mais para questões aplicadas no cotidiano e assim se limita a ficar no senso comum. A questão é que cabe à escola uma dupla funcionalidade na sua missão de capacitar o aluno para a vida; pois, ela deve ser cheia de ética, competência técnica e cívica, para poder formar cidadãos críticos, com condições de interagir no meio em que vivem.

Nessa perspectiva julgamos considerarmos vários aspectos como a transversalidade, o ensino da matemática, a ciência contemporânea, a cultura e a Etnomatemática. Em nosso percurso refletimos sobre como podemos contribuir para que os alunos descubram relações, construa seus próprios conceitos matemáticos, relacionado à formalização do calculo de volume de sólidos geométricos. E então nos propomos sugerir atividades através de experimentação e dedução.

Segundo Pais (2011,p.100) a Engenharia Didática se constitui , numa forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática, não uma metodologia exclusiva da pesquisa em didática da matemática. O que concorda Artique, quando a define como uma metodologia de investigação que se caracteriza por um esquema experimental baseados em ações pedagógicas na sala de aula.

Uma investigação por Engenharia Didática deve seguir as seguintes etapas:

- Análises prévias epistemológica dos conteúdos usados que tem como objetivo identificar os problemas do ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de forma fundamentada as questões de hipóteses, fundamentos teóricos e metodológicos da investigação.
- Análises a priori das situações didáticas da ED objetiva a construção de uma sequencia didática para o conteúdo em questão e formulação das hipóteses com base nos resultados obtidos nas análises prévias, ex: o pesquisador elabora e analisa uma sequencia de atividades que serão desenvolvidas, o que denominamos de sequencia didática; essa construção tem por objetivo a produção e seleção de todo o material necessário ao desenvolvimento da sequencia de atividades para o trabalho pedagógico a ser realizado. Está na educação matemática, não precisa necessariamente está baseada somente numas das tendências da mesma ou na conjunção várias tendências.

A sequência didática normalmente é constituída de um conjunto de atividades construídas com base nos resultados obtidos nas análises prévias, que o pesquisador espera que leve os alunos a desenvolverem certas competências e habilidades desejadas com relação ao conteúdo investigativo, essas competências podem ser geral ou mais específica da disciplina como resolver problemas que envolvam conceitos como área e volume, no caso específico da educação matemática.

Em se tratando agora especificamente do uso de atividades para o ensino de matemática Fossa (2000), nos diz que estas devem conter:

• Objetivo claro por parte do educador que for fazer uso das atividades;

• Estar estruturadas, com o propósito de permitir a familiarização pelos alunos;

• Levar os alunos a formular hipóteses a seres investigadas e discutidas entre si;
• Registro final dos resultados obtidos;

• Se organizadas de modo a reunir varias atividades a fim de atingir um número pequeno de objetivos.

Com o objetivo de estabelecer a relação entre as atividades, como proposto no ultimo item acima, o autor propõe um roteiro descrito em cinco etapas. A primeira consiste no lançamento de um problema ou um desafio aos alunos, podendo este surgir de uma situação prática ou de um pequeno texto com informações históricas, esta primeira etapa é de nominada de Provocação. Intitulada de Participação a segunda etapa leva os alunos a analisar o problema proposto e com isso formular e testar suas hipóteses, proporcionado o contexto de redescoberta em que a discussão e a análise terão lugar.

A Precipitação leva os alunos a registrar seus resultados em linguagem apropriada, a Publicação consiste na revelação dos resultados, com objetivo de avaliar a preparação do grupo a fim de continuar a sequencia de atividades, e finalmente a Perturbação que ajuda a relacionar as atividades com o mesmo objetivo ou com objetivos semelhantes.

Com o mesmo foco do ensino por atividades, aplicadas ao ensino de matemática, Sá (2009) nos diz que as atividades devem:

• Apresentar-se de maneira auto-orientadas, para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;

• Conduzir nos alunos as noções matemáticas a partir de três fases, são elas: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica das ideias matemática construídas;
• Socializar os conhecimentos entre os alunos;

• Ter continuidade;

• Ser apresentadas de três maneiras, segundo Dockweiller (1996), desenvolvimento, conexão e abstração.

A partir do momento em que o professor se propõe a adotar metodologias para nortear o ensino das disciplinas em sala de aula, este vem carregado de deveres que competem tanto ao professor quanto aos alunos, que são os atores ativos, diante das novas metodologias que serão ou estão sendo realizadas no ambiente escolar.

Sá (2009), Mendes e Sá (2006), concordam que o ensino de matemática por atividades possibilita aos alunos a construção das noções matemáticas que estão inerentes aos objetivos das atividades. Nesta perspectiva os autores nos colocam que, cabe aos alunos:
• A realização de experimentos, a interpretação, e depois a discussão em classe com o professor e com os colegas de turma.

• Aprender o “que” e o “porque”;

Assim como professor tem suma importância e responsabilidade em sala de aula, mesmo que esta aula seja do tipo expositivo tradicional, ao optar por esta metodologia sua responsabilidade tem importância ainda maior, cabendo ao professor:

• A elaboração das atividades assim como seus respectivos objetivos;

• A orientação aos alunos, sendo este decisivo no processo de aprendizagem dos mesmos.
• A orientação de seus alunos a fim de levá-los a um autodesenvolvimento contínuo mesmo que seja depois do período escolar.

• Percepção em suas aulas de necessidade de inserção de uma nova metodologia, de uma dinâmica experimental a fim de levá-los a perceber a importância da matemática para o mundo.
• Propor situações que conduza os alunos a descoberta de conhecimentos, por meio de
• Levantamento e testagem de suas hipóteses.

Contudo percebemos que ao optar pelo ensino de matemática por atividades, oportunizamos aos alunos a participação ativa no processo de aprendizagem e que estes assim como os professores, possuem papel significativo para o êxito desta metodologia em sala de aula, e esse bom estabelecimento do contrato didático, contribui de forma positiva para o aprendizado em sala de aula e possibilita ao professor um desenrolar mais ativo de suas aulas, não ficando restrito apenas naquele momento da execução do experimento, mas a partir de sua primeira experiência, este ganha com ele uma gama de pensamentos que o levarão a pensar em outros experimentos com outros conteúdos matemáticos Paula (2011, p.?).

Em Sá (2009), são encontradas várias atividades que podem construir uma sequência didática, pois segundo o autor a proposição do ensino de matemática que se baseia em atividades pressupõe uma possível condução do educando a uma construção regular das noções matemáticas que estão presentes nos objetivos da atividade. O que é evidente a partir da elaboração da mesma, até sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelos alunos servirá de embasamento para as discussões e posterior construção dos conceitos que foram adquiridos. Ainda em sua concepção, cabe ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos alunos durante sua realização. Tal abordagem de ensino pressupõe a experiência direta do aluno com situações de seu cotidiano, nas quais a abordagem instrucional é centrada no educando e em seus interesses espontâneos.

Outro aspecto importante é a investigação, que segundo Piaget enquanto o espírito investigador, presente na fase pré-operatória, permanecer em desenvolvimento em outras fases posteriores, conduzirá o educando a um "maturamento" científico e a um matemático que se tornará mais independente e ciente de sua capacidade de se apostar em sua curiosidade e possibilidade de busca do conhecimento por meio da investigação. Nessa proposta se estabelece a colaboração mútua entre professor e aluno durante a construção do saber, pois a característica principal dessa abordagem metodologia de ensinar, está no fato no qual os conteúdos a serem vistos e aprendido serão encontrados pelo próprio aluno, durante o processo de busca e aprendizagem, que é conduzido pelo educador até que seja inserida na estrutura cognitiva do aprendiz, SÁ (2009).

A revisão desses estudos sobre o ensino e aprendizagem do volume de sólidos geométricos nos auxiliou a perceber dificuldades que os alunos poderiam vir apresentar durante o nosso experimento. Nesse sentido enfatizamos a importância de conhecer o processo de construção de conceito; descritos nos estudos diagnósticos, que nos propiciaram perceber antecipadamente algumas dificuldades de visualização, representação e construção do pensamento geométrico, antes já mencionado.

2.6 Fundamentação Matemática

2.6.1 Volume dos sólidos geométricos

Como se sabe sólidos geométricos são muito presentes no nosso cotidiano, e volume é uma necessidade que temos para comparar e comprovar a capacidade de ocupação desses sólidos e que na matemática desafiaram grandes estudiosos e matemáticos ao longo da história, para determinação de uma expressão que simbolizassem ou expressassem um valor numérico. Neste trabalho vamos fazer um estudo mais detalhado sobre as fórmulas desses sólidos e começaremos mostrando algumas das conclusões desses estudos:

2.6.2 Definição Geral de Volume

De acordo com Lima (1991, p.41) a ideia empírica de volume de um Sólido é o número de vezes que esse sólido contém o volume de um cubo unitário, isso leva diretamente a uma fórmula para se calcular esse volume de blocos retangulares, porém como fazemos para calcular os outros blocos de sólidos que não são retangulares?

Como foi mencionado anteriormente, é preciso uma definição mais precisa daquilo que entendemos por "Volume de Sólidos". Nosso propósito é chegar a uma generalização, ou seja, a uma definição geral.

Chamaremos P a um sólido formado pela reunião de um número finito de blocos retangulares justapostos. Para obter seu volume basta somar os volumes dos blocos retangulares que o constituem.

Dado um sólido *S*, desejamos definir precisamente o número *vol(S)*, ou seja, queremos dar um significado exato à ideia inicial, segundo a qual *vol(S)* é o número que exprime quantas vezes *S* contém o cubo unitário.

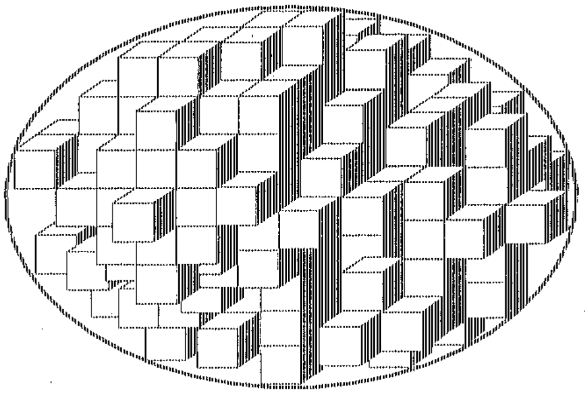
Para cada *P* contido em *S*, sabemos calcular *vol(P)*. O número *V* = *vol(S)*, que estamos procurando, deve satisfazer à condição:

vol(P) $\leq$ *V para todo sólido P contido em S*.

Os números *vol(P)*, volumes de *P* contidos em *S*, fornecem aproximações inferiores pra o volume de *S*. Acrescentando mais blocos retangulares a *P*, sempre tendo o cuidado de permanecer dentro de S, obteremos um sólido *P'*, maior do que *P*, e *vol(P')* será uma aproximação melhor para *vol(S)*.

Queremos que seja possível aproximar *vol(S)* com tanta precisão quanto se deseje por volumes de sólidos contidos em *S*. Esta exigência equivale a requerer que *vol(S)* seja o número real cujas aproximações por falta são os volumes dos sólidos contidos em *S*.

Figura 1: Blocos de sólidos geométricos



Fonte: Lima (1991, p.71)

Seja *S* um sólido cujo volume desejou calcular. Podemos, ainda, considerar os sólidos *Q* que contêm o sólido *S*. Se Soubermos calcular o volume de cada um desses Q. O número procurado, $V = vol(S)$, deve também satisfazer à condição.

V $\leq$ *vol(Q) para todo sólido Q contendo S.*

Os números *vol(Q)*, volumes dos sólidos que contêm o *S*, são valores aproximados por excesso para o volume de *S*. Quanto menor for o bloco retangular *Q* contendo *S*, melhor será a aproximação *vol(Q)* para o volume de *S*.

Podemos, então, afirmar que o número $V = vol(S)$ goza da seguinte propriedade:

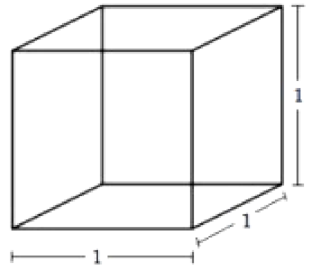
Quaisquer que sejam os sólidos P, contido em S, e Q, contendo S, tem-se vol(P) $\leq$ *V* $\leq$ *vol(Q).*

Com técnicas avançadas, demonstra-se que o volume $V = vol(S)$ para todos os sólidos *S* habitualmente construídos na Geometria. Em outras palavras, dado um sólido geométrico *S*, seu volume $V = vol(S)$ é o único número real que satisfaz à condição acima destacada.

Entretanto, alguns sólidos geométricos podem ter seus volumes calculados de maneira mais direta, por fórmulas que são construídas a partir de seus elementos e propriedades. Estudaremos esses sólidos e seus volumes a partir de uma abordagem que normalmente, não é utilizada no ensino regular, apoiada no Princípio de Cavalieri.

*A unidade de volume é o cubo de aresta 1 e p*ara cada unidade de comprimento temos uma unidade correspondente de volume.

Figura 2: Volume do cubo de aresta 1



Fonte: Autor (2017)

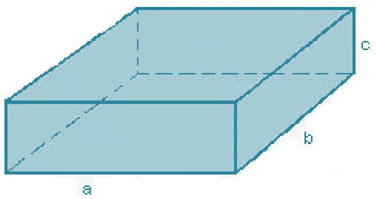
Instintivamente, volume de um sólido geométrico é quantidade de espaço ocupado por ele. Para determinar este espaço através de um número, fazemos a comparação com uma unidade, o resultado dessa comparação dessa unidade é chamado de volume.

Souza *et al* .(2009), no seu grupo de trabalho caracteriza paralelepípedo e cubo da seguinte maneira:

2.6.3 Volume de um paralelepípedo retângulo e do Cubo

O paralelepípedo retângulo é um poliedro formado por seis retângulos. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) a sua altura (c).

Figura 3: Volume do Paralelepípedo



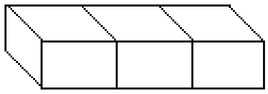
Fonte: Autor (2017)

O volume desse paralelepípedo retângulo (figura 1) será representado por V(a, b, c) e como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujo comprimento, largura e altura medem 1, então V(1, 1, 1)=1.

Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se aumentar a medida de um dos lados, seu volume também aumenta na mesma proporção. Observa-se também se mantivermos constantes a largura e a altura e se multiplicarmos o comprimento por um número natural n, o volume ficará também multiplicados por n, ou seja,

V(na, b, c) =nV (a, b, c)

Figura 4: Bloco de Paralelepípedos justapostos



Fonte: Autor (2017)

A figura 4 acima mostra paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colocados em faces iguais. Naturalmente, o volume total é 3 vezes maior que o volume de um deles.

Este fato, constatado para números naturais, também vale para qualquer número real positivo e isto quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

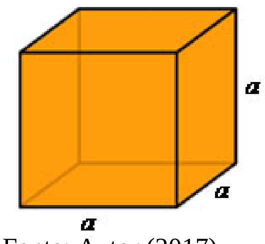
$$
\begin{aligned}
V(a, b, c) &= V(a.1, b, c) \\
&= aV(1, b, c) = aV(1, b.1, c) \\
&= abV(1, 1, c) = abV(1, 1, 1.c) = abcV(1, 1, 1) \\
&= abc.1 \\
&= abc
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular, se a face de dimensões a e b estão contidas em um plano horizontal, chamaremos essa face de base e a dimensão c de altura.

Volume do paralelepípedo= (área da base) x (altura)

O **cubo** é também chamado de hexaedro regular e é um dos cinco sólidos de Platão.

Figura 5: Cubo de aresta *a*



Fonte: Autor (2017)

Como todo sólido o cubo possui volume, ele depende da medida de sua aresta, consideramos apenas uma medida, pois o **cubo** possui todas as arestas de tamanhos iguais, é um paralelepípedo regular, pois, a=b=c e seu **volume** é apresentado pela expressão V = a.b.c, ou seja, no caso do **cubo** temos:

Volume=a.a.a=a^3

Volume do Cubo= (aresta) x (aresta) x (aresta)

Para o cálculo de volumes geométricos dos demais sólidos nos apropriamos do Principio de Cavalieri, pois nos permite apresentar aos alunos do Ensino Médio, que é nosso publico alvo nesse trabalho, de uma maneira mais intuitiva.

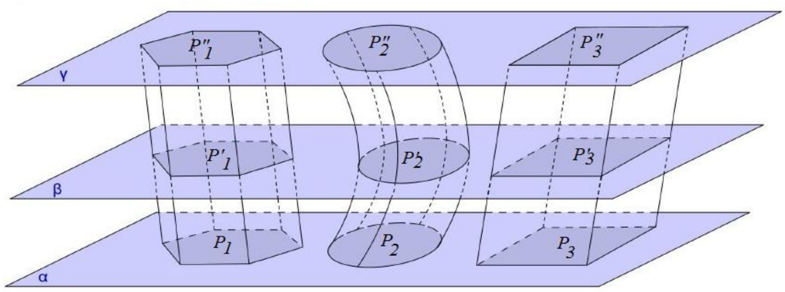
Bonaventura Cavalieri foi um matemático italiano, discípulo de Galileu, que criou um método capaz de determinar áreas e volumes de sólidos com muita facilidade, denominado princípio de Cavalieri. Este princípio consiste em estabelecer que dois sólidos com a mesma altura têm volumes iguais, se as sessões planas de igual altura possuem a mesma área.

A seguir apresentamos uma versão desse princípio.

O Princípio de Cavalieri estabelece que dois ou mais sólidos com mesma altura tenham o mesmo volume, se as secções planas de mesma altura tem mesma área, como se observa a seguir:

São dados três sólidos de mesma altura apoiados em um plano α, S1; S2 e S3. Se todo plano paralelo ao plano α secciona os três sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.

Figura 6: Princípio de Cavalieri para cálculo de volume



Fonte: Menezes (2013)

Se Área (P1)= Área (P2)= Área (P3); Área (P"1) = Área (P"2) = Área (P"3); então:

$V_{S_1} = V_{S_2} = V_{S_3}$

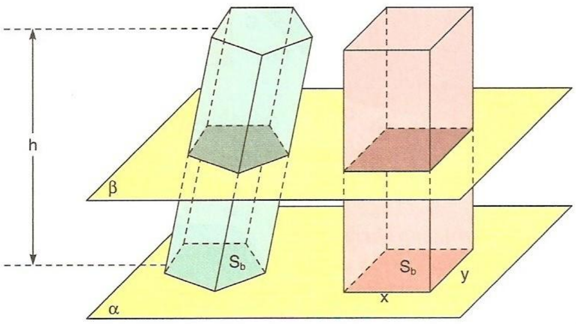
Esse princípio é aceito como verdade no Ensino Médio, devido às técnicas de demonstrações e o instrumento cientifico utilizado para demonstrar, pouco acessível à alunos do 2º ano do Ensino Médio, pois requerem para a sua compreensão conhecimentos de cálculos mais avançados.

2.6.4 Volume do Prisma

Prisma é um poliedro com duas faces congruentes e paralelas (localizadas em planos paralelos) e cujas outras faces são paralelogramos obtidos ligando-se os vértices correspondentes das duas faces paralelas.

Consideremos um prisma e um paralelepípedo retângulo de mesma altura *h* e base igual à S_b contidas no plano α .

Figura 7: Volume do Prisma



Fonte: Souza (2009)

Como as secções transversais determinadas no prisma e no paralelepípedo pelo plano β, paralelo a α, têm áreas iguais, concluímos pelo Princípio de Cavalieri que o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo.

Mas o volume desse paralelepípedo é dado pelo produto de suas três dimensões. Logo:

$V = x.y.h$ ou $V = S_b.h$

Assim, obtemos o volume do prisma:

$\mathbf{V_{prisma} = S_b.h}$

O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área de sua base pela medida da altura.

2.6.5 Volume da pirâmide

A Pirâmide é um sólido geométrico, um poliedro composto por um polígono na face inferior, denominada base da pirâmide e por n faces laterais triangulares com um vértice em comum, denominado vértice da pirâmide. n é o número de lados do polígono da base, também é a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra num ponto do polígono P.

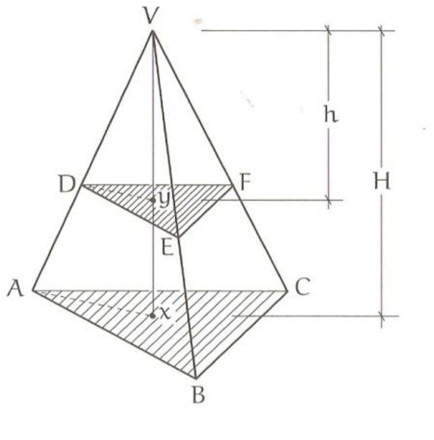
Seu volume pode ser demonstrado utilizando o princípio de Cavalieri:

Dados um plano α, um polígono P contido em α e um ponto V que não pertence a α temos:

Para obter o volume da pirâmide, precisamos de resultados adicionais. Em particular, o que realmente importa é ter a certeza que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume de uma pirâmide não se altera. Para isso, vamos examinar o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

A figura a seguir mostra uma pirâmide de vértice V, base ABC (triangular apenas para simplificar o desenho) e altura H. Um plano paralelo a ABC, distando h do vértice V, produziu nessa pirâmide uma seção DEF.

Figura 8: Pirâmide



Fonte: Oliveira (2016, p.32)

Vamos citar dois fatos importantes com respeito à situação acima:

1. A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

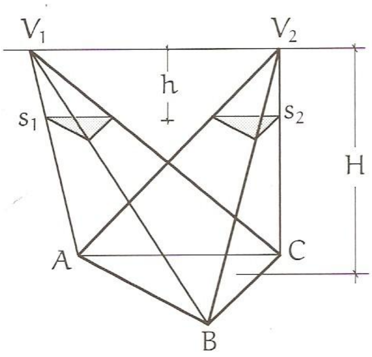
2. A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Teorema: duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.

Demonstração:

A figura a seguir mostra duas pirâmides de mesma base ABC, vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H. Um plano paralelo ao plano ABC e distando h dos vértices das pirâmides, produziu seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

Figura 9: Pirâmides de mesma base e mesma altura



Fonte: Oliveira (2016, p.33)

Seja **A** a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, respectivamente. Pelos argumentos que citamos, temos que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

de onde se conclui que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume, como queríamos demonstrar.

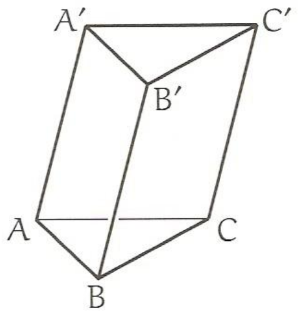
O fato que podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é a chave para a demonstração do volume da pirâmide de base triangular.

Teorema: O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Demonstração:

Consideremos então um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e A'B'C', como mostra a figura a seguir:

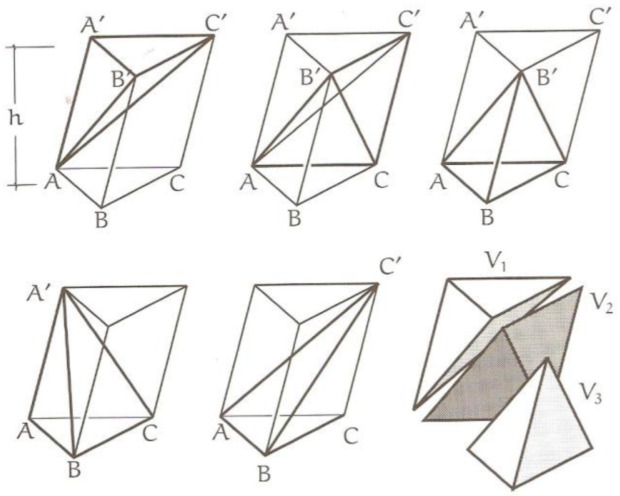
Figura 10: Prisma triangular



Fonte: Oliveira (2016, p.34)

Seja **A** a área de ABC e seja h a altura do prisma. Como sabemos, seu volume é Ah. Vamos agora, dividir esse prisma em três tetraedros: A-A’B’C’, B’-ACC’ e B’-ABC, como mostra a figura a seguir:

Figura 11: Demonstração do volume de uma pirâmide triangular



Fonte: Oliveira (2016, p.34)

Sejam V_1, V_2 e V_3 os volumes respectivos dos três tetraedros citados e seja V o volume do prisma. Pelo teorema anterior, sabemos que o volume de uma pirâmide não se modifica quando, mantendo a base fixa, movemos o vértice em um plano paralelo a essa base. Tendo isto em mente podemos concluir:

$$V_1 = V(A - A'B'C') \overset{(1)}{=} V(A' - ABC)$$
$$V_2 = V(B' - ACC') \overset{(2)}{=} V(B - ACC') = V(C' - ABC)$$
$$V_3 = V(B' - ABC)$$

(1) bases congruentes e mesma altura

(2) O vértice se move paralelo à base, ou seja, pelo teorema anterior o volume permanece inalterado.

Concluímos então que o volume do prisma é igual à soma dos volumes de três tetraedros:

A'-ABC, B'-ABC e C'-ABC

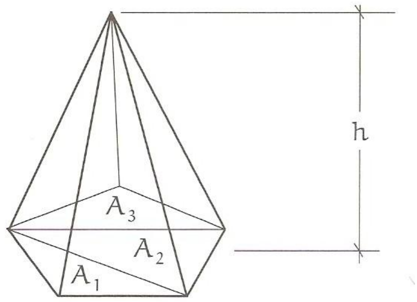
Com a mesma base do prisma e com alturas iguais a do prisma. Logo, cada um deles tem volume igual a um terço do volume do prisma. Demonstramos então que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Teorema: o volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Demonstração:

Para justificar, observe que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

Figura 12: Pirâmide de n lados



Fonte: Oliveira (2016, p.35)

Suponha agora que a pirâmide tenha altura h e que sua base, de área A, tenha sido dividida em n triângulos de áreas.

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$V = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + ... + \frac{1}{3}A_nh$$
$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)h$$
$$V = \frac{1}{3}Ah$$

Como queríamos demonstrar. Fica então estabelecido que:

Volume da pirâmide = $\frac{1}{3}$(área da base) x (altura)

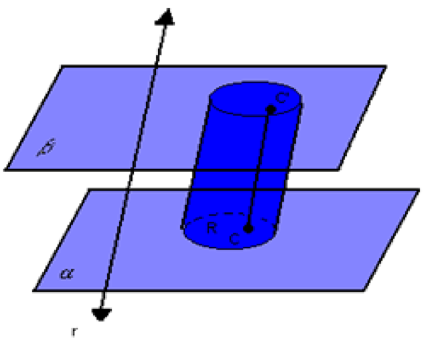
2.6.6 Volume do Cilindro

Chamamos de cilindro, ou cilindro circular, o conjunto de todos os segmentos $\overline{CC'}$ congruentes e paralelos a **r**.

Para obter o volume do cilindro, vamos usar novamente o Princípio de Cavalieri.

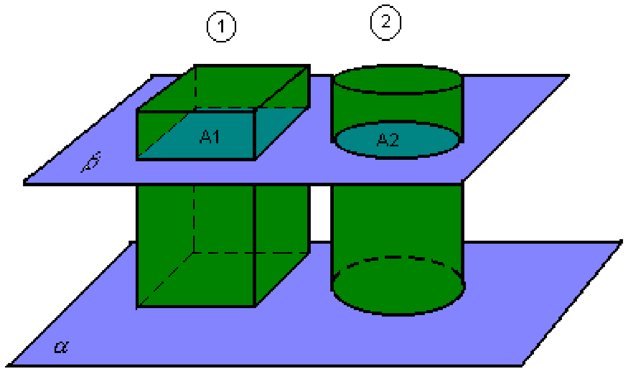
Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α, se todo plano β, paralelo ao plano α, intercepta os sólidos e determinam secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais.

Figura 13: Cilindro em dois planos



Fonte: Somatemática (2016)

Figura 14: Cálculo de volume pelo Princípio de Cavalieri



Fonte: Somatemática (2016)

$\alpha // \beta$ e $A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

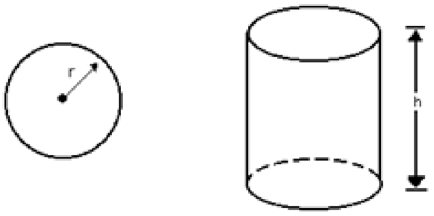
Se o sólido de número 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B.h$.

Assim, o volume de todo paralelepípedo retângulo e de todo cilindro é o produto da área da base pela medida de sua altura:

$\mathbf{V_{cilindro} = A_b.h}$

No caso do cilindro circular reto, a área da base é a área do círculo de raio **r**

Figura 15: Volume de um Cilindro



Fonte: Autor (2017)

Portanto seu volume é:

$\boxed{V=\pi r^2 h}$

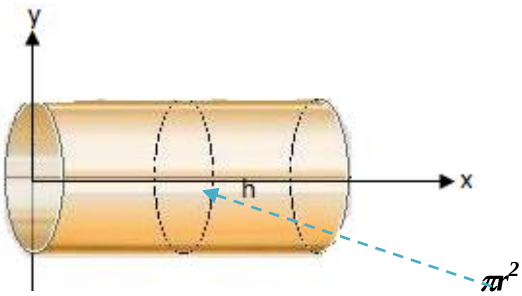
$\mathbf{A_b=\pi r^2}$;

Volume Cilindro= (área da base) x (altura)

Outra maneira de deduzirmos a fórmula do volume do cilindro é através de integral, considerando o plano cartesiano.

Consideremos o sólido de revolução gerado a partir da rotação do gráfico de y em torno do eixo dos x, colocando o sistema de eixos de modo que a origem do sistema esteja no centro da base do cilindro e o ***eixo x*** seja perpendicular à base do cilindro, temos:

Figura 16: Cilindro Gerado pela rotação



Fonte: Adaptado Souza (2016)

Para cada corte transversal na altura ***x***, temos que a secção obtida é um círculo, paralelo à base, cuja área é $\boldsymbol{\pi r^2}$.

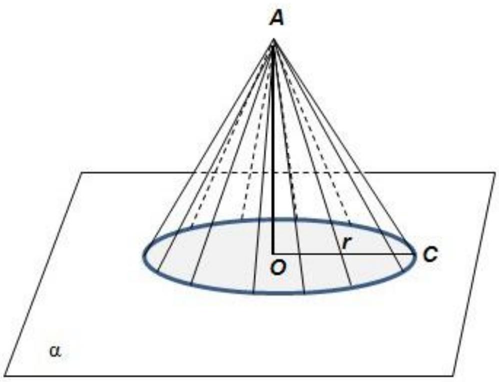
Logo, o volume do cilindro é dado por:

$$\boxed{V= \int_0^h \pi r^2 \boldsymbol{dx} = \pi r^2 \boldsymbol{x}\Big|_0^h = \pi r^2 h}$$

2.6.7 Volume do Cone

Sendo C um círculo de centro O e raio r contido no plano α e A um ponto não pertencente a α, define-se como cone o sólido geométrico formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em A e a outra em um ponto do círculo C.

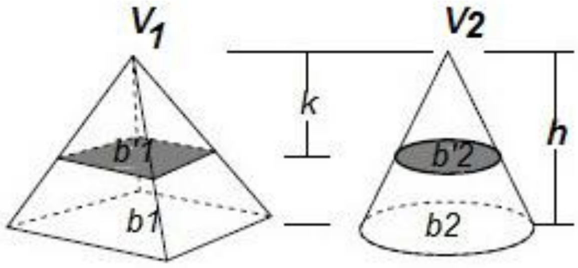
Figura 17: Cone



Fonte: Menezes (2014)

Para deduzir a fórmula do volume do cone considere uma pirâmide de altura $h_1 = h$ e área da base $b_1 = b$ e um cone de altura $h_2 = h$ e área da base $b_2 = b$ apoiados em um mesmo plano com vértices V_1 e V_2 não pertencentes ao plano da base, respectivamente. Note que o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes (mesma área). Se um plano paralelo ao plano da base, intersecta o cone a uma distância k do vértice, também intersecta a pirâmide a uma distância k do seu vértice, gerando secções semelhantes às suas respectivas bases, de áreas b'_1 na pirâmide e b'_2 no cone.

Figura 18: Secção do Cone e da Pirâmide



Fonte: Menezes (2014)

Sabendo que a razão entre as suas áreas é o quadrado da razão de semelhança, então:

$$\frac{b'_1}{b_1} = \left(\frac{k}{h}\right)^2$$

$$\frac{b'_2}{b_2} = \left(\frac{k}{h}\right)^2$$

Comparando as equações, tem-se que $\frac{b'1}{b1} = \frac{b'2}{b2}$, como $b_1=b_2=b$, vem que $\frac{b'1}{b} = \frac{b'2}{b}$

Multiplicando a igualdade por **b**, tem-se $b'_1 = b'_2$, isto significa que as secções têm a mesma área. Logo, pelo Princípio de Cavalieri o cone tem volume igual ao volume da pirâmide, ou seja,

$V_{cone} = V_{pirâmide}$

Como o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}A.h$, conclui-se que:

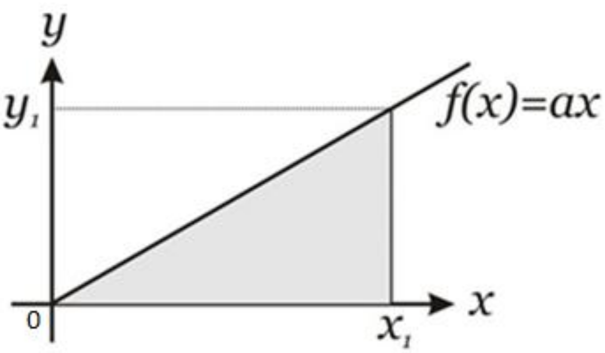
$V_{cone}= \frac{1}{3}A.h$

O volume de um cone é dado por um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Outra maneira de deduzirmos a formula do volume de um Cone, é rotacionarmos esse cone num plano cartesiano e empregarmos a integral definida, observe:

Considere a área sombreada sob a curva $f(x) = ax$:

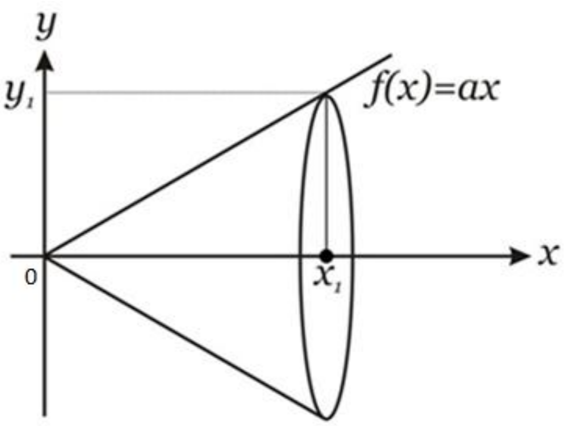
Figura 19: Plano Cartesiano



Fonte: Menezes (2014)

Podemos notar que a figura formada é um triângulo retângulo com um dos vértices na origem. Se rotacionarmos este triângulo 360º em torno do eixo *x*, observamos que a figura formada é um cone com vértice na origem:

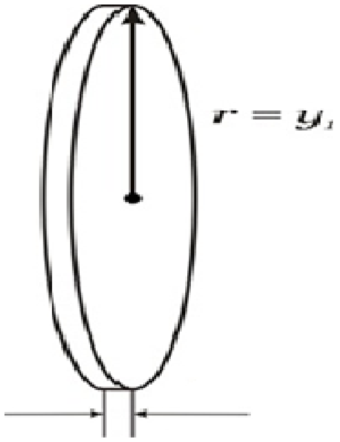
Figura 20: Cone formado pela Rotação



Fonte: Menezes (2016)

Para encontrarmos o volume deste cone, vamos por fatias paralelas ao eixo *y* com larguras infinitesimais *dx* e raio *y*:

Figura 21: Cilindro Fatiado



Fonte: Menezes (2016)

O Volume de um Cilindro é dado por:

V= A_b.h

$V = \pi . r^2 . h$

Como o raio do cilindro de altura infinitesimal é igual a *y* e sua altura é igual a *dx*, podemos reescrever a fórmula de seu volume como:

$$V = \pi . y^2 . dx$$

De acordo com a demonstração podemos dizer que o **cone** é formado por infinitos cilindros de alturas infinitesimais *dx*, onde o raio *y* é variável para cada cilindro. A soma destes cilindros será dada pela integral definida:

$$V = \int_0^{x_0} \pi y^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^{x_0} \pi y^2 \, dx$$

Que equivale a dizer:

$$V = \pi \int_0^{x_0} [f(x)]^2 \, dx$$

Onde, $f(x)$ é a curva $f(x) = ax$ e x_0 são os limites da área sob a curva (o vértice e o centro da base do cone gerado, respectivamente).

Temos então que o volume do cone é dado por:

Mas, $f(x) = ax$, portanto:

$$V = \pi \int_0^{x_0} [ax]^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^{x_0} a^2 x^2 \, dx$$

Integrando em relação a x, temos:

$$V = \pi \left[\frac{a^2 x^3}{3}\right]_0^{x_1}$$

$$V = \pi \left[\frac{a^2 x^3}{3}\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}[a^2 {x_1}^3] \qquad (I)$$

Em contrapartida temos que:

$$f(x) = ax$$

$$y_1 = ax_1$$

$$a = \frac{y_1}{x_1} \qquad (II)$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$V = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 x_1{}^3\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[\frac{y_1{}^2}{x_1{}^2}\, x_1{}^3\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\, y_1{}^2\, x_1$$

Mas y_1 é o raio da base no cone e x_1 é sua altura. Então podemos reescrever o volume do cone de raio da base r e altura h,

$$V = \frac{\pi}{3}\, r^2\, h$$

Se a área da base do cone é:

$$A_b = \pi r^2$$

Temos que:

$$V = \frac{A.h}{3}$$

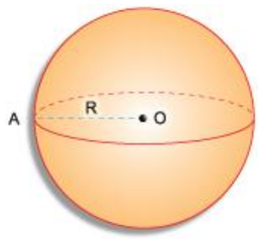
Que é a fórmula para cálculo de volume de um cone.

2.6.8 Volumes da Esfera

Chama-se **superfície esférica** o lugar geométrico dos pontos do espaço que distam uma constante **R** de um ponto fixo **O** denominado centro da superfície esférica.

$\overline{OA}$ é um dos raios da superfície esférica.

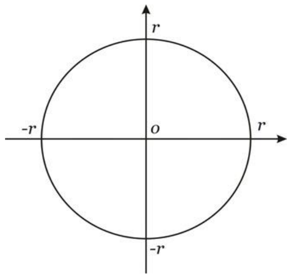
Figura 22: Esfera



Fonte: Souza (2009)

Para esta demonstração, utilizamos o conceito de integral definida. Vamos supor a circunferência abaixo com centro na origem:

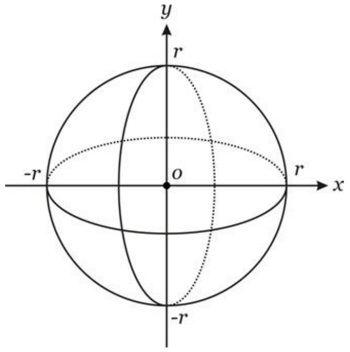
Figura 23: Circunferência



Fonte: Ziul (2016)

Se rotacionarmos a circunferência em torno do eixo *x*, obteremos uma esfera de centro na origem e raio r.

Figura 24: Circunferência Rotacionada



Fonte: Ziul (2016)

Temos que a equação da circunferência é:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Como a esfera tem centro na origem, temos que $a = 0$ e $b = 0$, logo:

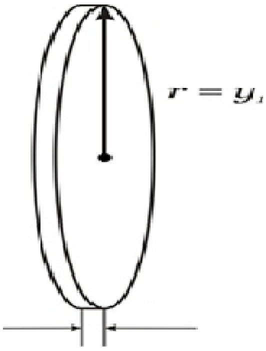
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, tomando o positivo temos:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Para encontrarmos o volume desta esfera, vamos supor fatias de larguras infinitesimais ***dx*** e raio *y*.

Figura 25: Cilindro infinitesimal dx



Fonte: Menezes (2016)

O volume do cilindro é dado por:

$$V = A_b.h$$

$$V = \pi r^2.h$$

Como o raio do cilindro de altura infinitesimal é igual a ***dx*** e seu raio da base é igual **ay,** podemos reescrever a fórmula de seu volume como:

$$V = \pi y^2 dx$$

Podemos dizer que a esfera é formada por infinitos cilindros de alturas infinitesimais *dx*, onde seu raio *y* é variável para cada cilindro.

A soma desses cilindros de alturas infinitesimais é dado pela integral definida:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 \, dx$$

Como:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Temos:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$V = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r}$$

Resolvendo a integral:

$$V = \pi \left[\left(r^2\, r - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left((-r)^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) - \left(\frac{-3r^3 + r^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \frac{\pi}{3} \left(2r^3 + 2r^3\right)$$

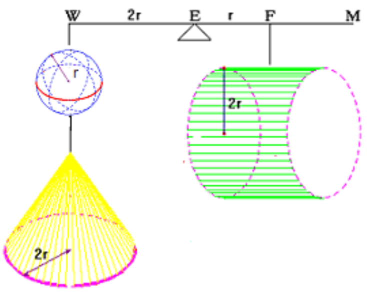
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Que é a fórmula para o cálculo do volume de uma esfera.

2.7 O método de equilíbrio

O princípio fundamental do método de Arquimedes consiste na ideia de que para determinar uma área ou um volume, deve-se cortar a região correspondente em um número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas muito finas e pendurar esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume com centros conhecidos, como mostra a figura abaixo:

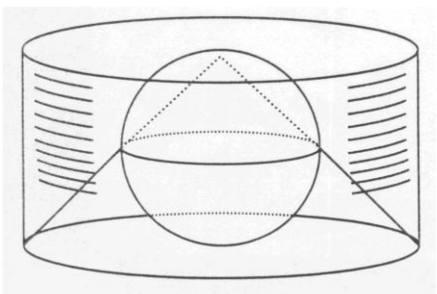
Figura 26: Método de Equilíbrio



Fonte: Silva (2005)

Para obter o volume da esfera Arquimedes usou seu princípio do equilíbrio e utilizou três sólidos: um cone, um cilindro e uma esfera. Sendo o diâmetro do cilindro duas vezes o diâmetro da esfera. Os sólidos serão colocados conforme a figura a seguir.

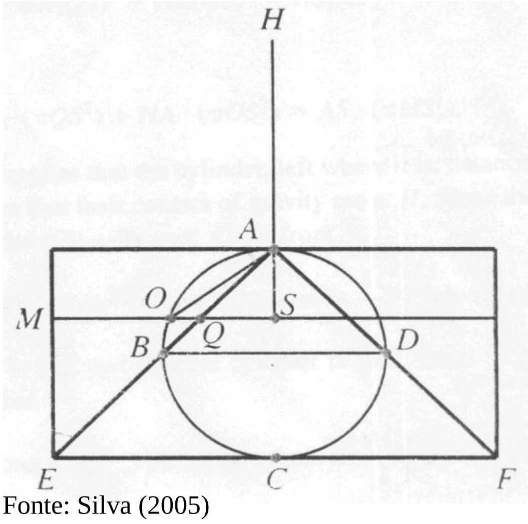
Figura 27: Cilindro, cone e esfera.



Fonte: Silva (2005)

Arquimedes primeiramente cortou transversalmente a figura e em seguida considerou seções cortadas por planos paralelos à base do cilindro. Como as seções ilustradas pela figura a seguir.

Figura 28: Cilindro, Cone e esfera “cortados” paralelamente.



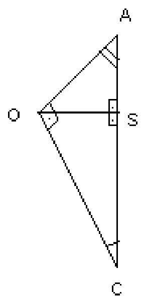
Fonte: Silva (2005)

Baseado nas figuras acima ((Figura 27 e 28) Arquimedes definiu:

AC e BD diâmetros da esfera iguais a 2R; EF o diâmetro do cilindro igual a 4R. Foi feito um corte paralelo a base do cilindro passando por M que encontra o diâmetro AC em S. A linha MS encontra a esfera no ponto O e o cone no ponto Q. O ponto A é o ponto médio de HC e serve como fulcro, ou seja, serve como o ponto de apoio da alavanca de braços AH e AC, com AH = AC.

Arquimedes precisava provar o fato geométrico que: $AS \cdot AC = AO^2$ Para isso consideraremos o triângulo AOC, que é retângulo, pois está inscrito em uma semicircunferência.

Figura 29: Triângulo Retângulo



Temos que o triângulo AOC é semelhante ao triângulo ASO pelo caso AA, logo:

$$\frac{AO}{AC} = \frac{AS}{AO} => AS.AC = AO^2$$

Agora usando os lados AC e AS, Temos que:

$$\frac{AC}{AS}=\frac{AC}{AS}.\frac{AC}{AC}=\frac{AC^2}{AS.AC}=\frac{AC^2}{AO^2}$$

Considerando o triângulo ASO e aplicando o teorema de Pitágoras, temos que:

$AO^2 = AS^2 + OS^2$, logo,

$$\frac{AC}{AS}=\frac{AC^2}{AO^2}=\frac{AC^2}{AS^2+OS^2} => \ AS.AC^2 \ = \ AC.(AS^2+OS^2)$$

Como AC é o diâmetro da esfera e MS é o raio do cilindro, temos que, AH = AC. Sabemos também que EF = 2· AC =>2· MS = 2· AC => AC = MS. Logo, AH = AC = MS. No triângulo AQN, temos que AS é altura e mediana, portanto o triângulo AQN é isósceles e com isso o triângulo AQS também é isósceles, logo, AS = QS.

Como, $AC.(AS^2+OS^2)$= $AS.AC^2$ temos que:

$AC\cdot AS^2 + AC\cdot OS^2 = AS\cdot AC^2$ =>
$AH\cdot QS^2 + AH\cdot OS^2 = AS\cdot MS^2$

Multiplicando se todos os membros por p, temos:
$p \cdot AH\cdot QS^2 + p \cdot AH\cdot OS^2 = p \cdot AS\cdot MS^2$
$AH\cdot (p \cdot QS^2) + AH\cdot (p \cdot OS^2) = AS\cdot (p \cdot MS^2)$

Ao observarmos as demonstrações podemos perceber que ($p \cdot Ms^2$) representa a área do círculo da base do cilindro, ($p \cdot QS^2$) representa a área do círculo da base do cone e ($p \cdot OS^2$) representa a área do círculo máximo da esfera. Com isso podemos concluir que ao cortar um número muito grande de tiras até formar todo o sólido, você terá o volume total deste sólido. Como saber onde colocar o cilindro na balança se a lei da alavanca de Arquimedes nos diz que a esfera e o cone quando colocados na balança com seus centros em H equilibrarão com o cilindro? Vamos agora nos concentrar no estudo de Arquimedes sobre o equilíbrio da alavanca.

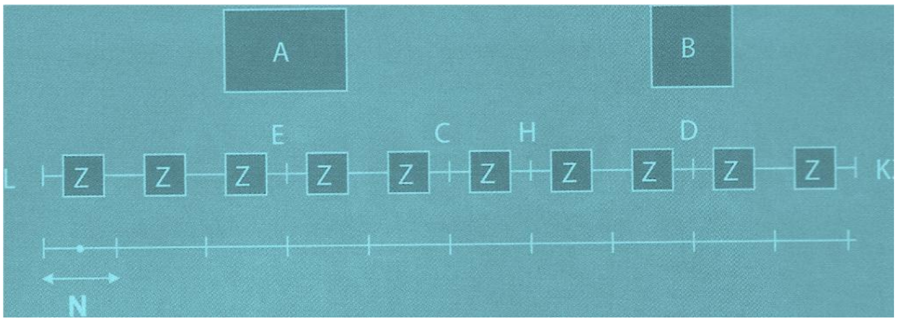
Consideraremos a principio três postulados que tratam do equilíbrio da alavanca: pesos iguais se equilibram a distâncias iguais, pesos desiguais não (postulado 1); se dois pesos se equilibram a certa distância e a um deles é acrescentado ou subtraído algo, o equilíbrio se rompe (postulados 2 e 3). Com base nisso, deduz-se que as grandezas se equilibram a uma distância inversamente proporcional aos pesos: a demonstração é dividida em duas partes, que tratam, respectivamente, do caso em que as grandezas são comensuráveis e3 incomensuráveis.

No presente estudo nos limitaremos a demonstração do caso em que as grandezas são comensuráveis.

Pode-se exprimir a condição de equilíbrio de pesos diferentes colocados a distâncias diferentes do fulcro dizendo que o momento estático, dado algebricamente pelo produto PxL, é o mesmo para os dois pesos.

Arquimedes demonstrou isso da seguinte forma: sejam A e B duas grandezas comensuráveis, cujos centros de gravidade são, respectivamente, E e D, como mostra a figura a seguir.

Figura 30: Reta ilustrativa de Arquimedes



Fonte: Silva (2005)

Seja C o ponto do segmento ED, tal que $\frac{EC}{DC} = \frac{A}{B}$. Trata-se de demonstrar que C é o centro de gravidade da grandeza composta por A e B. Começa-se duplicando o segmento ED e acrescenta-se o segmento DK igual a CE a partir do segmento D e o segmento LE igual a CD a partir de E. SE H é tal que HD = DK, resultará que LH = 2·CD e HK = 2·CE; temos, assim, $\frac{HK}{LH} = \frac{A}{B}$.

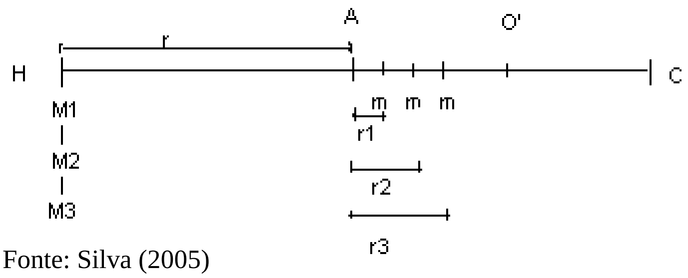
Em seguida, A e B são divididas em partes Z iguais entre si (isto pode ser feito, pois elas são comensuráveis) e, analogamente, HK e LH são divididos em tantos segmentos N iguais quantas forem, respectivamente, as partes de A e de B. Cada parte de Z é colocada então no centro de um segmento N. A configuração resultante, conforme o que foi demonstrado nas proposições precedentes, terá como centro de gravidade o ponto médio de LK, isto é o ponto C.

O sistema dos pesos que incidem sobre o segmento LH, pesos que juntos compõem A, tem seu centro de gravidade no ponto médio E, enquanto o sistema composto pelos pesos do segmento HK, que compõe B, tem seu centro em D: "Por isso diz Arquimedes – A será posto em E e B será posto em D". Dado que o centro de gravidade global é C, segue-se que "se A está em E e B em D, os pesos estarão em equilíbrio em C".Para obter a conclusão, portanto, a passagem fundamental é a que assegura a equivalência entre o sistema de pesos que se encontram no segmento LH e o peso A colocado em E. Citemos, a este respeito, Dijksterhuis: "O ponto crucial da demonstração consiste no fato de que à alavanca são suspensas não as grandezas iniciais, mas dois sistemas de grandezas que são, respectivamente, do mesmo peso A e B e cujos centros de gravidade estão nos pontos E e D, considerados respectivamente como posições A e B. Isso significa que a influência de um corpo suspenso na alavanca depende, 10 exclusivamente, da gravidade do corpo e da posição de seu centro de gravidade, ao passo que a forma não tem importância."

Então se determinadas grandezas se equilibram a certa distância, grandezas iguais a elas também se equilibrarão à mesma distância. Em outras palavras, o equilíbrio não é perturbado quando grandezas equivalentes são substituídas às anteriores e colocadas à mesma distância.

Então no caso específico da nossa demonstração analisaremos a figura a seguir.

Figura 31: Esquema do método Equilíbrio



Fonte: Silva (2005)

Se colocarmos pesos $M1$, $M2$, $M3$, (que são as tiras do cone e da esfera) em H, ou seja, a uma distância r do fulcro A e pesos iguais m (que são as tiras do cilindro) a distâncias $r1$, $r2$, $r3$, do fulcro A e usando a definição de momento teremos que:

$M1 \bullet r = m \bullet r1$

$M2 \bullet r = m \bullet r2$

$M3 \bullet r = m \bullet r3$

:

:

$Mn \bullet r = m \bullet rn$

Somando-se todas as equações obteremos: **(2)**

$$(M1+M2+M3+\ldots+Mn).\ r=m.(r1+r2+r3+\ldots+r.n).\ \left(\frac{n}{n}\right)=m.n.\ \left(\frac{r1+r2+r3+\ldots+r.n}{n}\right)$$

Assim fica óbvio que se pendurarmos todas as tiras de cada sólido em sua devida posição no fim teremos o sólido inteiro e com isso contaremos com seu volume integral sem alterações.

Com isso Arquimedes cortou o cilindro até o centro AO' das figuras, onde as contas se apresentavam mais razoáveis de serem feitas e concluiu com os cálculos acima que o cilindro deveria ser colocado no ponto médio de AO', ou seja, o cilindro será colocado em $AS=\frac{AO}{2}=\frac{R}{2}$. Como o volume do cilindro e do cone já era conhecido por Eudoxo e Demócrito, Arquimedes deduziu a fórmula abaixo usando como base a equação **(1)** trocando-se as áreas pelos volumes devido ao fato **(2)** mencionado acima e usando a lei da alavanca.

Com isso:

AH·VE(volume da esfera) + AH·VCo(volume do cone) = AS·VC(volume do cilindro)

Como as figuras foram cortadas em tiras até AO' consideraremos apenas a metade do volume da esfera e sabendo que o volume do cone, $VC=\frac{1.\pi.}{3}r^2$ (área da base) · h(altura do cone que é igual a R) e que o volume do cilindro, $VC=\pi.r^2$ (área da base) · h(altura do cilindro que é igual a R), teremos que:

$$2R.\frac{VE}{2}+2R.\frac{1.\pi.}{3}R^2.R=\frac{R}{2}.\pi.2R^2.R \Rightarrow= VE+\frac{2\pi.R^3}{3} \Rightarrow$$

$$VE=2\pi.R^3-\frac{2\pi.R^3}{3} \Rightarrow VE=\frac{6\pi.R^3-2\pi.R^3}{3} \Rightarrow VE=\frac{4\pi.R^3}{3}$$

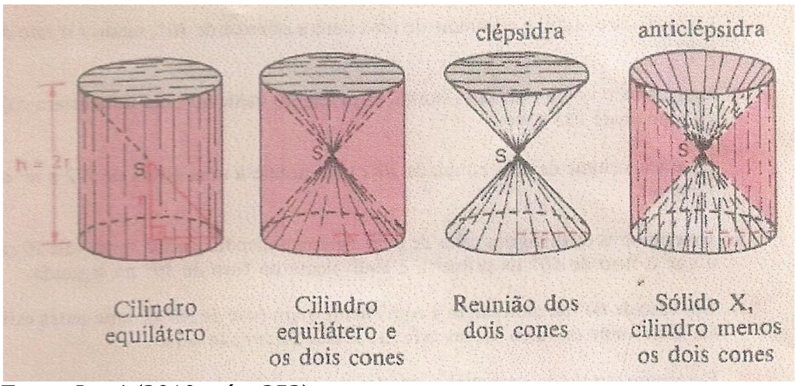
c.q.d.

Outra maneira de demonstrar a fórmula do volume da esfera

Consideremos um cilindro de raio da base *r* (a altura é *2r*) e tendo como *S* o ponto médio do eixo do cilindro.

Tomemos dois cones, tendo como bases as do cilindro e *S* como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado *Clépsidra*).

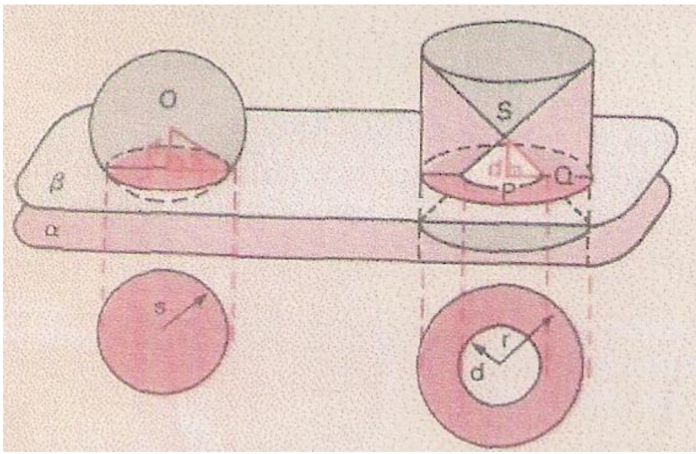
Figura 32: Clépsidra



Fonte: Iezzi (2010, pág. 253)

Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones, vamos chamar de sólido *X* (este sólido *X* é chamado *anticlépsidra).*

Figura 33: Anticlépsidra



Fonte: Iezzi (2010, pág. 253)

Consideremos agora uma esfera de raio *r* e o sólido *X* descrito acima.

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α, que o cilindro (que originou o sólido *X)* tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido *X*, estejam num mesmo semiespaço dos determinados por α.

Qualquer plano secante β, paralelo a α, distando *d* do centro da esfera (e do vértice do sólido *X),* também secciona o sólido *X*. Temos, portanto:

Área da secção na esfera = $\pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$ círculo

Área da secção no sólido *X* = $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$ coroa circular

As áreas das secções na esfera e no sólido *X* são iguais. Então, pelo *Princípio de Cavalieri*, a esfera e o sólido *X* têm volumes iguais.

Vesfera = **V**sólido X

Mas:

Vsólido X = Vcilindro - 2.Vcone = $\pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot (\pi r^2 \cdot r/3) = \pi r^2 \cdot 2r - 2\pi r^3/3 = 4\pi r^3/3$

Conclusão: O volume de uma esfera de raio r é de $4\pi r^3/3$

$V = 4\pi r^3/3$

2.8 Consulta aos discentes

De acordo com Pais (2002) a segunda fase (análise preliminar) da engenharia didática, metodologia adota por nós, requer fazer algumas inferências, tais como levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada.

Por este motivo, mostraremos nesta seção o resultado de uma pesquisa realizada a 80 (oitenta) discentes de matemática, sobre as dificuldades dos alunos com relação a este conteúdo.

Para a realização desta pesquisa fizemos usos de questionários (apêndice) com 18 (dezoito) questões subjetivas e 10 questões objetivas, e pré-teste de análise do conhecimento prévio do aluno, as quais representavam o ponto de vista dos entrevistados delineando de forma precisa e clara o que se deseja para garantir a uniformidade de entendimento por parte desses alunos, contribuindo assim, para a eficácia, precisão e padronização dos resultados.

2.8.1 Elaboração do instrumento

Foi proposta pela professora da disciplina uma estratégia numa abordagem de pesquisa quantitativa onde os dados foram levantados através de aplicação de questionário e pré-teste de análise do conhecimento prévio do aluno. O questionário constou de 18 questões subjetivas e 10 questões objetivas, nos quais representam o ponto de vista dos entrevistados delineando de forma precisa e clara o que se deseja para garantir a uniformidade de entendimento por parte dos mesmos, contribuindo assim, para a eficácia, precisão e padronização dos resultados.

Na realização da pesquisa foi escolhida uma amostra de 80 alunos do 3º ano do Ensino Médio, dos turnos noturno e vespertino de três escolas estaduais, localizadas na área urbana do município de Castanhal, obedecendo as seguintes etapas: Revisão de literatura, elaboração do instrumento de consulta, avaliação do instrumento, coleta de informações, sistematização dos resultados e analise dos resultados.

Devido ao objetivo da pesquisa optamos por um questionário contendo 18 questões, entre estas constavam questões sobre dados pessoais, questões sobre a relação do aluno com a disciplina matemática e questões envolvendo o campo conceitual. Analisando as ideias principais coletadas nos questionários, organizaram-se as respostas dos sujeitos para cada categoria, contendo as manifestações positivas, negativas e intermediárias expressas nas respostas dos alunos, possibilitando a apreensão do pensamento coletivo deles quanto ao sentimento em relação à disciplina Matemática e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

2.8.2 Aplicação

No primeiro momento foi elaborado um formulário contendo questões acerca dos dados pessoais dos alunos, sobre sua relação com a matemática e suas possíveis limitações. E no segundo momento foi feita a avaliação do instrumento por meio de uma análise realizada pelo professor orientador. O terceiro passo referente à produção de informações que ocorreu nos mês de janeiro do corrente ano em que os alunos participantes responderam aos questionários e realizaram o pré-teste proposto, de maneira participativa sem qualquer rejeição, mostrando-se dispostos a contribuir com a pesquisa o que ocorreu também com os professores das respectivas turmas que foram bastante receptivos à pesquisa e muito contribuíram para o andamento do trabalho.

Em última instância ocorreu à sistematização dos dados por meio da ponderação das informações fornecidas na pesquisa que geraram quadros e gráficos que ilustram os resultados.

2.8.3 Instrumento de avaliação diagnóstica

Para a coleta de dados foram aplicados dois instrumentos: um questionário informativo (fechado, com questões de múltipla escolha, apresentando questões sobre a identificação dos alunos). Uma prova de percepção, desenvolvida á partir do instrumento de Van Hiele (1980, *apud* Santos (2012)).

Neste tópico descrevemos os instrumentos diagnósticos que servirão de parâmetro para a avaliação de nossa sequencia. Eles nos auxiliaram no entendimento de como se dá a formação dos conceitos de volume de sólidos para esse grupo de alunos. O instrumento aqui tratado é o pré-teste, o qual apresentaremos a seguir.

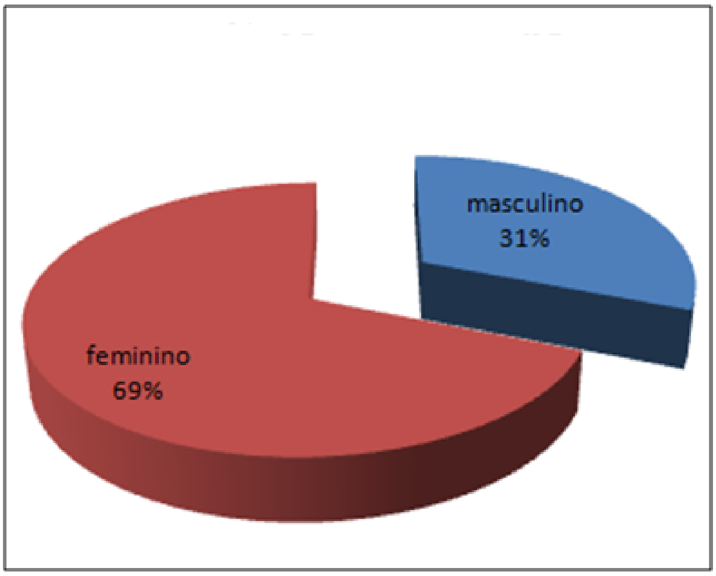
O pré- teste teve por finalidade avaliar os conhecimentos anteriores do aluno a respeito do ensino de volume e no sentido de servir de termômetro, para avaliar se o mesmo dominavam os conteúdos matemáticos considerados como pré-requisitos para o trabalho que desejamos realizar. Essa avaliação tem, portanto, a função principal de diagnósticos, para posterior desenvolvimento de uma sequencia didática.

2.8.4 Resultados e análise

Perfil dos alunos entrevistados

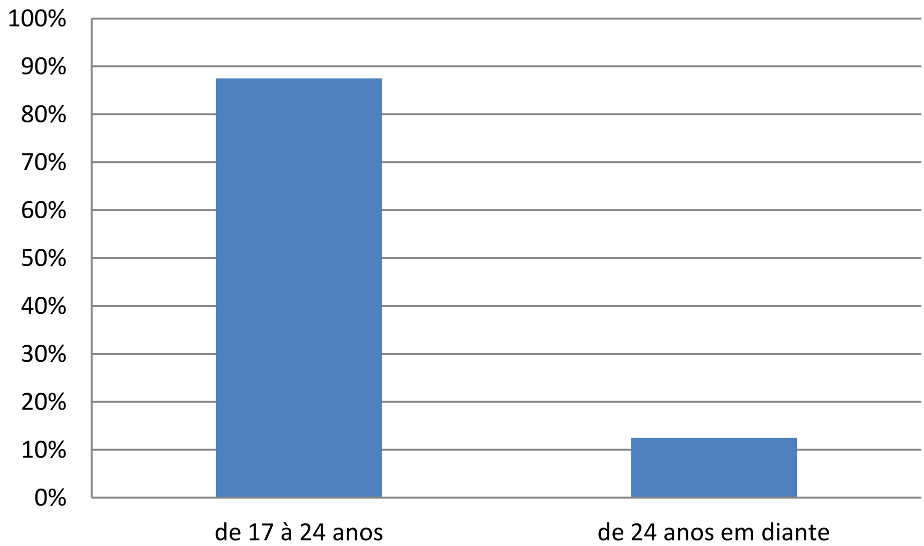
A sistematização dos resultados obtidos gerou o seguinte perfil de aluno: Dos 80 alunos consultados, 31% eram do sexo masculino e 69% do sexo feminino, evidenciando a predominância do sexo feminino nessa modalidade de ensino. Em relação à idade, a maior parte 87% dos alunos pesquisados se encontra nas faixas etárias entre 17 e 24 anos e 13% e tinha mais que 24 anos o que revelou que os alunos neste nível encontram-se dentro de uma faixa etária normal.

Gráfico 1: Gênero



Fonte: Pesquisa de Campo (2016)

Gráfico 2: Faixa de Idade

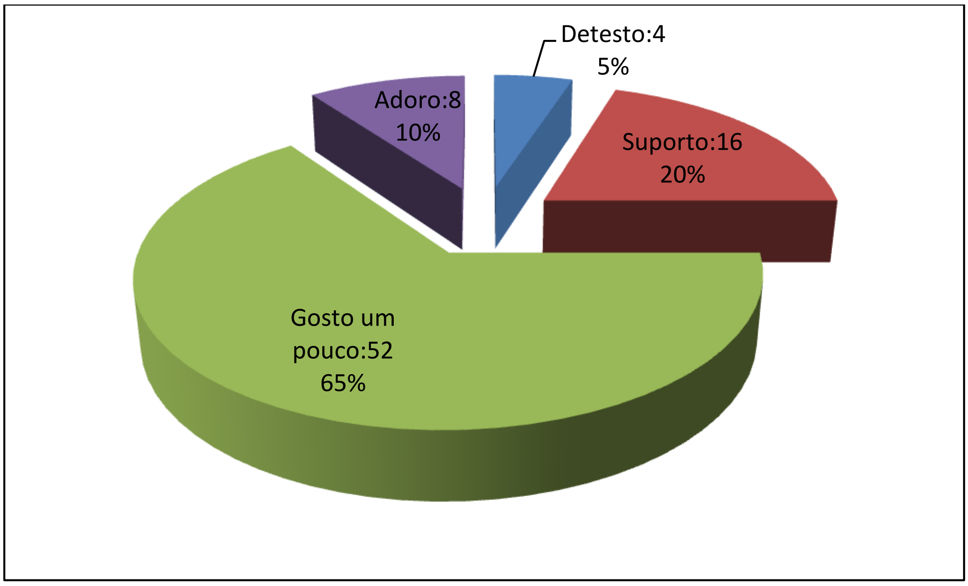


Tais dados ressaltam que a porcentagem de jovens que concluem o ensino médio na idade certa- até os 17 anos – aumentou em 10 anos, passando de 5%, em 2004, para 19% , em 2014. Os dados estão em um estudo do Instituto Unibanco, feito com base nos últimos dados do IBGE. Há, no entanto, 1,3 milhão de jovens entre 15 e 17 anos que deixaram a escola sem concluir os estudos, dos quais 52% não concluíram se quer o ensino fundamental.

“Este é o subgrupo mais vulnerável, pois são brasileiros que, caso não voltem a estudar, terão altíssima probabilidade de inserção precária no mercado de trabalho, além de não terem tido seu direito à educação básica assegurada”, Agencia Brasil (2016).

Outro dado levantado foi sobre a dependência de disciplinas e o que se constatou foi que, dos alunos consultados, 90% não estão em dependência escolar, 6% encontram-se em dependência em Matemática e 4% em outras disciplinas o que podemos considerar ser um índice considerável de reprovação na disciplina de matemática. A análise das respostas revela que há uma manifestação predominante positiva em relação ao gosto pela disciplina de Matemática, opondo a ideia de que os alunos não gostam, ou têm aversão, medo ou temor da disciplina, como demonstram os percentuais e o gráfico a seguir: 65% gostam da disciplina, 10% gostam muito, 20% acham uma disciplina suportável mesmo não sendo a disciplina preferida destes alunos e somente 5% dizem não gostar de Matemática.

Gráfico 3: Gosto por Matemática

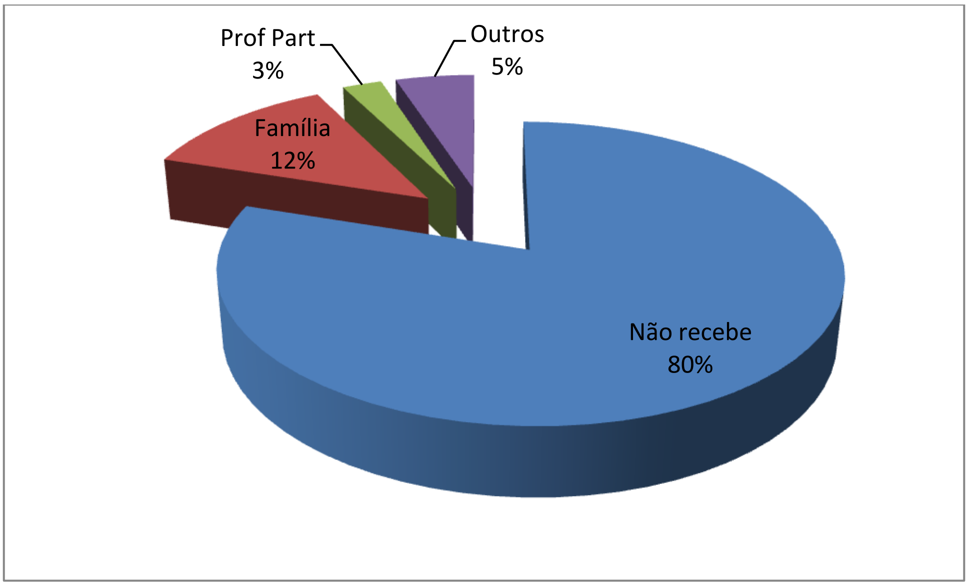


Fonte: Pesquisa de campo (2016)

Nas respostas foi possível também diagnosticar que a metodologia utilizada pelos professores é fator determinante no ato de ensinar e aprender. A apuração das respostas revela isso.

Quando questionados se recebiam o auxilio de pessoas na realização de sua tarefas escolares, 80% disseram não receber qualquer tipo de ajuda, 12% declarou receber de familiares, 5% de outros e somente 3% recebem de professores particulares. Este é um fator a se considerar se avaliamos o grau de dificuldade que esses alunos apresentam na aprendizagem dos conteúdos matemáticos, pois não são temas que somente através de leituras você consegue superar as dificuldades, geralmente se faz necessárias explicações direcionadas para a superação de qualquer dificuldade encontrada.

Gráfico 4: Ajuda para o Estudo



Fonte: Pesquisa de campo (2016)

Quanto ao período de estudo fora da escola, 50% declarou só estudar no período de provas, 25% estudam as vésperas das provas, 16% só nos fins de semana, 6% não estudam Matemática, além das aulas e somente 3% estudam diariamente. Isso acaba comprometendo a efetivação do conhecimento matemático, se consideramos que somente assistir às aulas não é suficiente para a construção sistematizada do conhecimento, já que em nossa realidade nos deparamos com diversos fatores entre eles o tempo mínimo de carga horária semanal entre outros fatores, que acabam tornando necessário um esforço maior por parte do aluno na construção do hábito de estudar também fora da escola.

Quando questionados sobre como se sentem no momento da prova de matemática, 3% disseram sentirem-se contentes, 11% sente medo ao serem avaliados, 35% conseguem manter a tranquilidade e 51% ficam preocupados com a avaliação.

No concernente aos instrumentos de avaliação utilizados pelos professores, os entrevistados disseram que 90% avaliam através de provas e somente 10% usam outros instrumentos avaliativos. Aqui fica claro que mesmo diante da necessidade de uma compreensão teórica que oriente a prática pedagógica e que seja subsidiária da ação pedagógica dinâmica e construtiva, nos deparamos com professores que ainda utilizam somente a prova como instrumento de avaliação.

Sobre as dificuldades em aprender os conteúdos de matemática, 9% disseram não ter nenhuma dificuldade, 75% admitiram encontrar certa dificuldade e 16% admitiram ter muita dificuldade.

Desde a década de 80, buscou-se a valorização no aprendizado da Matemática, a compreensão do que são importantes nos aspecto sociais, linguístico, antropológicos, além do cognitivo Brasil (1998). Esta valorização apareceu como resposta aos baixos desempenhos na aprendizagem da Matemática nas décadas anteriores. Também nos anos 90, observou-se o surgimento do que ficou conhecido como "Ensino Renovado" com o propósito de verificar que não era mais tarefa do cálculo que os alunos tinham os piores resultados, mas sim nas atividades de ordem complexas, no qual exigiam flexibilidade, raciocínio e espírito crítico (ponte, 2004).

Isso nos leva a concluir que apesar dos esforços no sentido de propor mudanças no ensino da Matemática nos últimos anos, esta disciplina continua sendo considerada a grande vilã dentre as áreas do conhecimento, responsável pelos altos índices de reprovação dos alunos. E os problemas que se levantam em relação ao ensino da Matemática em todos os níveis não são novos e se apresentam de forma variada e com grau de complexidade distinto.

Nesta etapa do trabalho é possível refletir e perceber alguns dos aspectos que dificultam essa relação do aluno com a disciplina Matemática, tais como: Pré-conceito de que essa é uma disciplina difícil, formação inadequada dos professores, uso de metodologias tradicionais, pouco incentivo a utilização de novos recursos pedagógicos, falta de contextualização e dificuldades no uso da linguagem matemática.

No referente ao entendimento das explicações dadas pelos professores de matemática, 56% dos alunos entrevistados disseram que quase sempre entendem o que os professores explicam 23% entendem parcialmente as explicações, 20% sempre entendem e 1% não entendem. Diante desse resultado podemos considerar que um número expressivo compreende o exposto pelos professores, o que nos faz acreditar que os professores buscam ser entendidos pelos alunos com a finalidade de tornar compreensivo o conhecimento ensinado.

Quanto à abordagem dos conteúdos, 91% dos entrevistados declararam que os professores costumam abordar o assunto pela definição, 5% apresentam situações-problemas, 3% iniciam com experimentos para chegar a um conceito e 1% usam jogos para depois sistematizar os conceitos. E para a fixação desses conteúdos 64% passam listas de exercícios, 30% usam atividades do livro didático, 5% o fazem através de jogos e 1% através de questões diversas contextualizadas.

Segundo Pais (2006, p. 111) a Geometria Métrica, especialmente no calculo de volume de sólidos geométricos é considerado de difícil entendimento porque necessita de visualização e, geralmente no ensino tradicional, o professor utiliza-se apenas de configurações geométricas, ou seja, desenhos geométricos para apresentar aos alunos e propiciar melhor entendimento do assunto, limitando esse entendimento, resultando num trabalho mecânico, limitado e que não estimula a reflexão.

Em relação ao uso de recursos tecnológicos nas aulas de matemático 98% dos professores não utilizam nenhum recursos em suas aulas e somente 2% utilizam esse recurso muito importantes na facilitação da aquisição do conhecimento matemático nos dias atuais.

O uso da informática tem adquirido importância significava nos meios educacionais, por exemplo, de outros setores, uma presença tão constante que nós educadores não podemos ignorar, pois utilizar as chamadas Tecnologias de informação e comunicação, os TIC, é um tema muito discutido em muitos debates da sociedade atual, sendo considerado suas potencialidades e suas limitações no contexto de hoje em nossas escolas.

Segundo Reis (2009) o conceito de tecnologia educacional pode ser considerado como o conjunto de procedimentos (técnicas) que usam “facilitar” os processos de ensino aprendizagem com as utilizações de meios (instrumentais, símbolos ou organizadores) e suas consequentes transformações culturais.

Sobre a importância das tecnologias e as relações com a matemática D’Ambrosio (1996), comenta:

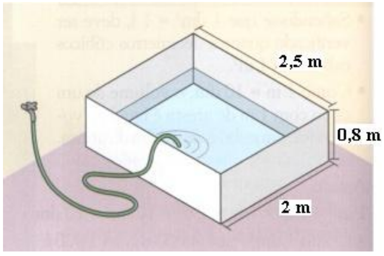
> Ao longo da evolução humana, matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbológica. A tecnologia entendida como congruência do saber (ciências) e do fazer (técnica) e a matemática são

intrínsecas à busca solidária do saber viver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível.

No quadro em que os alunos entrevistados deveriam marcar os conteúdos que lembravam ter estudado e o grau de dificuldade encontrada em cada um dos temas abordados, estes distribuídos em: fácil, muito fácil, regular e difícil; interessante foi observar que ao compararmos o resultado das questões propostas no pré-teste (segundo instrumento de avaliação aplicada), percebe-se que conteúdos declarados pelo aluno como fácil de aprender quando confrontado a resolver situações que exigiam para a solução da situação problema foram deixadas em branco em algumas situações e em outras o mesmo aluno não conseguiu chegar numa resposta. Talvez pela falta de clareza na formação dos conceitos, dificuldade de leitura e interpretação dos assuntos e dos comandos entre outra, possibilidades. A exemplo temos a questão número 08 do teste feito pelos alunos e mostrado abaixo:

Uma mangueira, que despeja água numa piscina no formato de um paralelepípedo, que mede 2 metros de comprimento, 0,8m de altura e 2,5m de largura, de acordo com a figura abaixo: O volume desta piscina, em m³, é:

Figura 34: Ilustração do paralelepípedo



Fonte: http://portal.mec.gov.br/

Esta questão, apesar de exigir um grau de complexidade baixa devido a simplicidade no comando e direto, para aqueles que já estudaram o conteúdo, apenas 1 aluno dos que foram submetidos ao pré-teste conseguiu resolve-la, talvez por não terem assimilado o assunto como deveriam ou até mesmo pela deficiência na leitura interpretativa, não sabemos ao certo.

Quanto aos padrões de respostas entre as três turmas, não se diferenciaram muito em relação às mesmas questões, uma análise das atividades realizadas sintetizados num quadro com percentuais atribuídos colabora com essa hipótese. Neste quadro analisaremos as respostas dadas pelos alunos a respeito de suas percepções sobre o nível de dificuldades sentidas por eles quanto à aprendizagem de cálculo de volume, de acordo com suas experiências vivenciadas na escola e em seguida traçamos uns comparativos com os resultados do pré-teste.

Para melhor visualização dos resultados da pesquisa nos graus de dificuldades de aprendizagem dos conteúdos apresentados individualmente pelos alunos, dispusemos neste quadro informativo.

Quadro 1- Nível de dificuldade das questões segundo os alunos

Assunto	**Grau de dificuldade para aprender**				
	Muito fácil	**Fácil**	**Regular**	**Difícil**	**Muito difícil**
Ideia de volume	5%	18%	66%	11%	0%
O metro cúbico seus múltiplos e submúltiplos	4%	16%	66%	14%	0%
Cálculo de Volume do **cubo**	2%	25%	60%	13%	0%
Cálculo de Volume do **paralelepípedo reto**	5%	18%	51%	26%	0%
Cálculo de Volume do **paralelepípedo obliquo**	0%	10%	73%	17%	0%
Cálculo de Volume do **prisma reto**	0%	4%	73%	23%	0%
Cálculo de Volume do **prisma oblíquo**	9%	14%	59%	18%	0%
Cálculo de Volume do **cone reto**	13%	22%	52%	13%	0%
Cálculo de Volume do **cone oblíquo**	8%	24%	57%	11%	0%
Cálculo de Volume do **cilindro reto**	7%	25%	56%	12%	0%
Cálculo de Volume do **cilindro oblíquo**	6%	16%	62%	16%	0%
Cálculo de Volume da **esfera**	5%	10%	70%	15%	0%
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura **simples** e apresentam imagens para ilustrar a situação	5%	14%	55%	17%	9%
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura e	12%	12%	52%	9%	15%

apresentam imagens para ilustrar a situação					
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura simples e não apresentam imagens para ilustrar a situação	9%	16%	50%	12%	13%
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura composta e não apresentam imagens para ilustrar a situação	4%	24%	36%	16%	20%
Problemas sobre **volume de Tronco de Pirâmide**	3%	18%	50%	18%	11%

Fonte: Pesquisa de Campo (2016)

Ao analisarmos o quadro percebemos que nenhum dos conteúdos propostos foi de fácil resolução, esse fato é percebido também no trabalho de SANTOS (2012) e, pode ser explicado por vários fatores, dentre eles por ser conteúdo deixado em segundo plano e muitos não lembram ou não estudaram esse assunto.

A maioria dos alunos representados por mais de 50%, consideraram os conteúdos regulares, porém o aproveitamento no exame diagnóstico não comprova o fato, isso possivelmente se deve a dificuldade de se estudar geometria de maneira satisfatória ou motivadora.

Pouco discente, consideraram o conteúdo de muita dificuldade ou difícil, mas o que se observa neste trabalho e no trabalho de SANTOS (2012) é que o aproveitamento não condiz com o declarado pelos alunos.

Nesse ponto convém-nos resgatar algumas informações do referencial teórico desenvolvido neste estudo, que revelou a partir de uma fragilidade na aprendizagem de Cálculo de Volume de Sólidos Geométricos no Ensino Médio, seja pelo aproveitamento dos alunos nas questões, seja pela metodologia indicada para esse assunto.

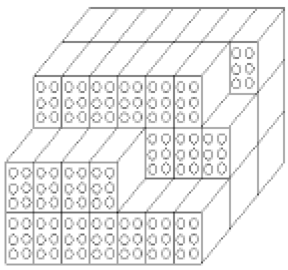
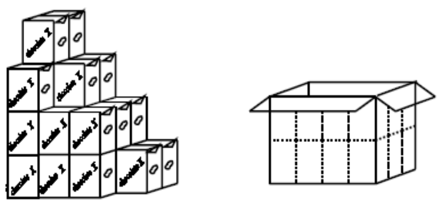
2.8.5 Sobre os descritores

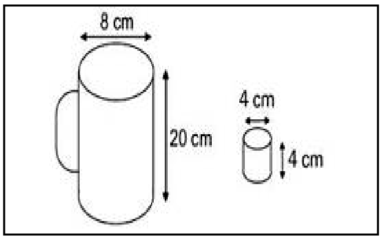
Segundo os descritores aplicados nos principais vestibulares do país referente a ensino de volume, o aluno tem habilidade e competência, baseado no grau de instrução. Para esse trabalho as habilidades e competência referem-se a aluno do 2º ano do ensino médio.

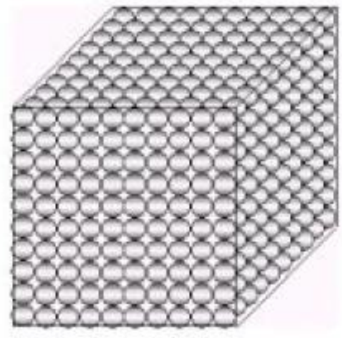
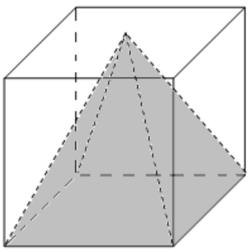
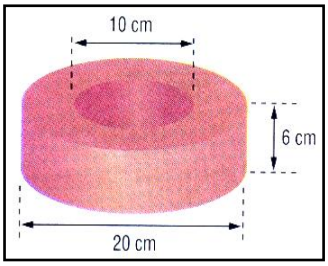
A forma de apresentação das questões foi enfatizada para analisar a habilidade para conceitos espaciais. As questões privilegiadas, em alguns momentos exigiam representação e manipulação mental em outros exigiam habilidade verbal. As figuras selecionadas foram os poliedros (cubo, paralelepípedo, cilindro, pirâmide).

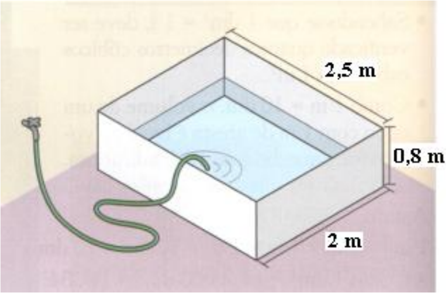
Segundo Moraco & Pirola (2007) uma maneira de verificar o nível de formação de conceitos de um indivíduo seria partindo da análise da linguagem utilizada para descrever suas propriedades, demonstrando assim, que como os procedimentos e as atitudes, os conceitos são de fundamental importância na aprendizagem da Geometria.

Quadro 2- Questões, descritores e analises.

Questões Propostas	**Descritores e Análises**
01-. Quantos tijolos formam o sólido abaixo? 	*Resolver problema envolvendo noções de volume* A primeira questão que aborda a ideia de volume tinha diversas maneiras de resolução, teve uns dos maiores acertos, em comparação com as outras nove questões e uma das formas de resolução consistia em contar os tijolos que formavam o sólido geométrico, a partir de estratégias que deem ideia de multiplicação dos lados: comprimento, largura e altura. Essa questão teve como resultado mostrado no gráfico acima.
02- Quantas caixas de chocolate sobrarão após encher a caixa? 	*Resolver problema envolvendo a ideia de volume* A segunda questão que abordava ideia de volume e paralelepípedo perfeito,

	comprimento, largura e altura, para encher uma caixa de chocolate. Essa questão teve um número razoável de acertos, tal questão exigia essas duas habilidades básicas, essa questão teve como resultado o mostrado a cima:
03- Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos. Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os copinhos. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá enche no máximo quantos copinhos: 	*Resolver problema envolvendo cálculo de volume cilindro* A terceira questão relacionada a cálculo de volume de cilindro, a proposta era encontrar o volume de cilindro, a habilidade era encontrar o volume de uma leiteira e uma caneca, com objetivo de verificar a capacidade (volume) de cada figura. Questão considerada simples, mas com uma quantidade grande de erros, talvez por não domínio da fórmula para resolução, como observável no quadro 1.
04- Um motorista transporta areia em um caminhão que possui carroceria medindo 6m de comprimento 2,5 de largura e 1m de altura. Quantos m^3 de areia esse motorista transporta neste caminhão?	*Solucionar problema envolvendo cálculo de volume do prisma* A quarta questão relacionada à ideia de prisma (paralelepípedo), talvez por não ter o desenho de apoio (desenho da carroceria de um caminhão) ou por não ter domínio do conteúdo, hipótese levantada. Essa questão teve um grande número de alternativas em branco.

05- Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado quantas bolinhas? 	*Resolver problema envolvendo cálculo de volume do cubo* A quinta questão ilustra um cubo cujo lado possui 10 bolinhas, solicitava-se a quantidade de bolinhas empregadas no total da figura. Para se chegar ao resultado, bastava multiplicar a quantidade de bolinhas referentes a cada lado. Questão considerada de grau simples, porém com um número expressivo de erros. Observe a cima.
06- Um empresário produz sólidos pedagógicos de plástico, como por exemplo, pirâmides. Ele quer embalá-las em caixas no formato de um cubo, sabendo que a pirâmide está inscrita, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3, então o volume do cubo, em m^3, é igual a: 	*Resolver problema envolvendo cálculo de volume pirâmide e cubo* A sexta questão relacionada a pirâmide e cubo, questão considerada de grau intermediário, cuja exigência era saber aplicar as fórmulas, boa parte dos alunos deixaram-na em branco, como mostra a tabulação:
07- Uma peça de madeira tem as dimensões e forma da figura abaixo. Qual é o volume de madeira empregado para fabricar esta peça?  	*Resolver problema envolvendo cálculo de volume de cilindro* A sétima questão relacionada a uma peça cilíndrica, está questão é considerada de nível intermediário, pois teria que ser calculado o volume duas vezes, era uma peça cilíndrica de madeira com um furo no meio, a maioria deixou em branco como mostrados no quadro 1.
08- Uma mangueira, que despeja água numa piscina no formato de um paralelepípedo, que mede 2	*Resolver problema envolvendo cálculo de volume de paralelepípedo*

metros de comprimento, 0,8m de altura e 2,5m de largura, de acordo com a figura abaixo: 	Essa questão faz referência a cálculo de volume de um paralelepípedo, com todas as medidas fornecidas na figura, houve muitos que não tentaram resolve essa questão, consideramo-la de nível fácil. A hipótese é de que o aluno não domine calcule de volume de prisma.
09- Qual o volume de uma esfera que possui 10 cm de raio.	*Resolver problema envolvendo cálculo de volume da esfera* A questão refere-se a volume de esfera, considerada de nível de dificuldade médio, tendo necessidade do conhecimento da fórmula V=$\frac{4\pi r^3}{3}$, depois era só substituir o valor do raio. Porém, muitos deixaram essa questão em branco, como verifica-se no quadro 1..
10- cone reto mede 8 *cm* de raio e 15 *cm* de altura. Qual o seu volume?	*Resolver problema envolvendo cálculo de volume do cone* Essa questão abordava, volume de cone, e assim como a nona questão precisava da aplicação da fórmula V=$\frac{\pi r^2 h}{3}$, depois substituir os números na fórmula. Um índice expressivo em branco nessa questão.

Fonte: Pesquisa de Campo (2016)

2.8.6 Resultados dos Testes de Cálculo de Volume

Em nossa analises havia perspectivas de que os alunos concluintes do ensino médio apresentassem domínio sobre alguns assuntos em geometria que, teoricamente, tivesse um domínio de alguns assuntos dessa área, já que tais conteúdos constam no currículo das séries anteriores do ensino fundamental e médio.

A resolução das questões propostas no teste está expressa no quadro abaixo.

Quadro 3- Resultados dos testes sobre cálculo de volume

Questão	Em Branco	Errado	Parcialmente Certo	Certo
01	34%	49%	0%	17%
02	35%	34%	0%	31%
03	64%	25%	2%	9%
04	81%	16%	0%	3%
05	49%	39%	2%	10%
06	85%	14%	1%	0%
07	83%	17%	0%	0%
08	84%	13%	2%	1%
09	76%	20%	1%	3%
10	80%	16%	1%	3%

Fonte: Pesquisa de Campo (2016)

Em relação à análise da habilidade percentual, a percepção de figuras geométricas o aluno requer um nível bem menor de formação de conceitos, limitando-se ao conhecimento de suas propriedades.

Segundo Regi (2001) os alunos em um nível superior de pensamento em geometria, ou seja, aqueles que conhecem as propriedades das figuras e que sabem relacioná-las, geralmente possuem habilidades mais desenvolvidas.

Quanto aos alunos menos habilidosos, revelou a pesquisa que estes desenvolveram estratégias variadas de contagem dos outros sem, no entanto, conseguirem sistematizar essa contagem e, portanto, errando o resultado final.

2.8.7 **Análise dos índices de erros**

- De posse das medidas, os alunos não tinham convicção das operações a serem efetuadas.
- As dificuldades se relacionam com a nomeação dos sólidos, havendo confusão entre elementos da geometria plana e a geométrica espacial.
- Falta de interpretação das situações problemas.
- O não conhecimento das fórmulas ou não utilização delas.
- Falta de falta de conhecimento prévio de conteúdos como cálculo de área.

2.8 Análise dos erros cometidos na resolução de problemas

Esses desempenhos insatisfatórios ocorridos neste trabalho, com ensino de volume, são problemas já conhecidos, entre eles, no insucesso com a disciplina no ensino fundamental, curso que os alunos adquirem conhecimentos de área e noções de espaço nos primeiros anos de estudo. Também a utilização de metodologias de ensino tradicionais que não consideram os avanços das teorias de aprendizagem.

As primeiras questões que exigiam análise e percepção de espaço houve grandes números percentuais de erros ou em branco. Nota-se que a forma como o aluno analisa o enunciado pode causar dificuldade na compreensão, por ele não ter o conhecimento do assunto tratado ou não ser direcionado nos anos anteriores por uma metodologia significativa, na qual prime pela busca do conhecimento. Segundo Onuchic (1999) relata que resolver problemas é uma abordagem mais significativa e que está fundamentada nas recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que informam que os conceitos e habilidades matemáticas são passíveis de serem aprendidos no contexto da resolução de problemas.

Grande parte das respostas dadas nas questões do questionário, mostra que o aluno não possui base teórica pra resolver as questões, isso é notável nas questões 6 a 10,no qual faz-se necessário a utilização de fórmulas.

Nesse trabalho, a exemplo de outros consultados como referência (Santos 2012), é frequente a não utilização da fórmula para o cálculo do volume por parte dos alunos, talvez por não se lembrarem delas. Outra dificuldade detectada, foi a não interpretação de situações-problema, principalmente nas questões 1,3,5 e 8; fato que pode comprometer o resultado final das referidas questões.

Numa análise mais profunda dos quadros de resultados, concluímos que boa parte dos alunos que participaram do trabalho não tinham noções básicas de conhecimento de cálculo de volume, o que nos leva a crer que não tiveram contato com o esse conteúdo.

Os resultados desta etapa do trabalho apresentaram elementos significativos, que revelam potencialidades, mas também a deficiência e obstáculos do ensino de matemática em nossas escolas públicas e ao mesmo tempo nos leva a indagarmos sobre os possíveis fatores que estão influenciando neste resultado. Eles serão ainda objeto de pesquisa e analise mais aprofundada, porém os resultados já apontam para uma necessidade de reflexão e intervenção na melhoria da qualidade de ensino da geometria.

3- CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Nesta seção, analisaremos previamente as questões que irão compor o pré-teste e o pós-teste assim como a nossa sequencia didática propostas para os alunos do 2° ano (segundo ano) do ensino fundamental, sendo esta dividida em duas seções: **Seção de Aprendizagem** e **Seção de Fixação**, a fim de, determinar algumas variantes e procedimentos possíveis que podem ser de total relevância para a realização das atividades no momento da experimentação. Iniciaremos com a análise das questões que compões o pré-teste e o pós-teste.

Como em todo processo de aprendizagem os aluno ou qualquer pessoa que esta dentro deste processo está inerente a obstáculo que podem favorecer ou não o processo de aprendizagem, caracterizados por Brousseau (2008) em obstáculos epistemológico, uma vez que este são manifestados pelos erros, e ignorá-lo é inútil e devemos recebê-lo de maneira explícita e integrar sua negação ao conhecimento novo, em particular na forma de contra exemplos, neste sentindo este obstáculo vem a ser um construtivo do saber.

A fim de verificar a presença de alguns obstáculos no processo de resolução das questões do pré-teste (cf. apêndice C) e pós-teste (cf. apêndice D) e das situações didáticas ou a didáticas que podem favorecer esses obstáculos, veremos a seguir a análise a priori destas questões.

3.1 O ensino de Matemática por atividade

Segundo Ronca & Escobar (1988, p.7*) apud* Santos (2012) o ensino por atividade de Redescoberta é uma configuração prática do Método da Descoberta que nasceu do movimento "Educação Progressiva", iniciado no final do século XIX e foi muito difundido no ensino da Matemática na década de 1980. Nesse período os estudiosos perceberam que não bastava rever a metodologia sem se questionar sobre os objetivos da educação, já naquela época, que "o problema é muito mais amplo e envolve principalmente um questionamento dos próprios objetivos da educação na sociedade atual. Para que ensinar?". Esse questionamento ainda é atual e deve ser privilegiado quando buscamos metodologias, novas ou não, que tenham por objetivo fundamental "despertar no aluno a capacidade de elaborar sobre as informações, desenvolvendo o seu poder de raciocínio" (RONCA & ESCOBAR, 1988, p.17), que é o objetivo da descoberta e, consequentemente, do Ensino por Atividades.

Ainda segundo Ronca & Escobar (1988, p.17) a aprendizagem por Descoberta refere-se a uma situação de ensino, na qual o professor não explicita para os alunos os conceitos e princípios que deverão ser aprendidos, fornecendo exemplos. No nosso caso, apresentaremos atividades, que facilitarão aos alunos deduzirem formas de calcular o volume de sólidos geométricos.

Assim, o ensino por atividades caracteriza-se por propiciar ao aluno a possibilidade de descobrir e/ou redescobrir os fundamentos da Matemática durante o desenvolvimento da atividade. Mendes (2001) enfatiza como característica essencial dessa maneira de encaminhar o ensino da Matemática, "o fato de que os tópicos a serem aprendidos estão para ser (re) descobertos pelo próprio aluno durante o processo de busca a que é conduzido pelo professor até que eles sejam incorporados à estrutura cognitiva do aprendiz". (p.59). Ainda segundo Mendes (2001), a utilização de atividades de redescoberta pressupõe colaboração mútua entre professor e aluno durante o ato de construção do saber. Essa construção necessita do estabelecimento, pelo professor, do nível de estruturação do trabalho dos alunos além da extensão das etapas de estudo que deve ser percorrido para atingir a redescoberta. De acordo com Moura as características principais da atividade de ensino são as seguintes:

> A atividade, (...), é do sujeito, é problema, desencadeia uma busca de solução, permite um avanço do conhecimento desse sujeito por meio do processo de análise e síntese e lhe permite desenvolver a capacidade de lidar com outros conhecimentos a partir dos conhecimentos que vai adquirindo à medida que

> desenvolve a sua capacidade de resolver problemas. A atividade é desse modo um elemento de formação do aluno e do professor (MOURA, 1996, p.35).

Diante dessas características é importante definir os papeis de seus agentes: A atividade de ensino assume, portanto, o papel do elemento organizador e formador da aprendizagem da criança. Sendo assim, o objetivo do professor é levar a criança a dar forma ao modo teórico por meio do qual um problema pode ser solucionado em uma situação de aprendizagem, que é considerada como um problema de aprendizagem.

A partir das teorias da abordagem histórica- cultural e da atividade teórica de Moura (1996) redefini-se o espaço de aprendizagem, como sendo o local que se realiza a aprendizagem dos sujeitos que são orientados ação intencional de outros. Esta intencionalidade é feita através de atividades orientadas de Ensino (MOURA, 1996), no qual são aquelas atividades que são estruturadas de modo a permitir que os educando interaja o conteúdo, negociando significados, com o propósito, de solucionar de forma coletiva uma situação problema. Ela é dita orientadora, pois define o que é social na ação educativa e considera a dinâmica das interações que a maioria das vezes chega aos resultados esperados pelo educador (MOURA, 2001, p.155)

Decorrente disto, a atividade de aprendizagem, que nesta concepção está inserida na atividade de aprendizagem o qual permite a introduzir as bases que são necessárias para o desenvolvimento cognitivo dos educando, formando- as na teoria, na análise e no planejamento. O que fica claro aqui é que estas situações tem por objetivo a apreensão dos conceitos teóricos.

Ronca & Escobar (1980) também enfatizam a necessidade de percepção, pelo professor, de que a descoberta deve ser inserida num contexto que propicie condições para o desenvolvimento pleno do aluno. E, nesse sentido, há necessidade de planejamento e organização das atividades ou da sequência de atividades, o estabelecimento de objetivos; a identificação do conteúdo; os procedimentos; até a definição dos critérios de avaliação. Segundo Sá (2009, p. 18), o ensino da Matemática por atividades visa “conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos das atividades”. Nesse sentido destaca o autor que cada etapa da experimentação vivida pelo estudante, servirá de apoio para discussão posterior e construção final dos conceitos em desenvolvimento.

Nessa perspectiva, a tendência é que a atividade seja desenvolvida pelo aluno com autonomia, a partir da prática de descobrir que, segundo Bruner (1961) apud por Ronca & Escobar (1980), habilita o aluno a adquirir informações de forma que estejam disponíveis para a solução do problema, ensinando-o a organizar informações descobrindo regularidades e relações.

Nossa proposta é apresentar aos alunos e demais interessados no processo, situações e atividades que os possibilite criar um ambiente para o desenvolvimento de atividades educativas que constituam um espaço de aprendizagem caracterizado por um sistema de atividades capaz de contribuir na construção do conhecimento matemático de forma construtiva e significativa.

3.2 Sequência Didática e analise a priori das atividades

Nesta etapa do trabalho apresentamos uma sequência didática detalhada incluindo sugestões de distribuição das atividades do projeto ao longo da pesquisa de campo e de formas de avaliação, aplicação da proposta na turma de 2º ano do Ensino Médio no Município de Castanhal. Nos relatos das experiências ao longo da pesquisa na realização das etapas, mostrando de forma mais minuciosa os vários aspectos que foram abordados na realização das atividades propostas, além de ilustrações e depoimentos de alunos que participarão do trabalho. E finalmente, destacaremos como nossa proposta se correlaciona com os Parâmetros Curriculares Nacionais e com a Proposta do Ensino por atividade, além de pontuarmos os desdobramentos e aprofundamentos que pretendemos incorporar na realização do trabalho em suas próximas etapas.

A sequência didática é constituída de um conjunto de atividades construídas com base nos resultados obtidos nas análises prévias, que o pesquisador espera que levam os alunos a desenvolverem certas competências e habilidades desejadas com relação ao conteúdo investigativo, essas competências podem ser geral ou mais específica da disciplina como resolver problemas que envolvam conceitos como o cálculo de volume, no caso específico da educação matemática e, essa é nossa pretensão.

A metodologia principal deste trabalho será desenvolvida de acordo com o ensino por atividade Sá (2009). Neste são encontradas várias atividades que podem construir uma sequência didática, pois segundo ele a proposição do ensino de Matemática baseado em atividades pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. O que é evidente a partir da elaboração da mesma, até sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante servirá de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção. Ainda segundo Sá (2009), cabe ao professor preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos alunos durante sua realização. Tal abordagem de ensino pressupõe a experiência direta do aluno com situações de seu cotidiano, nas quais a abordagem instrucional é centrada no educando e em seus interesses espontâneos.

Na sequência apresentaremos algumas atividades que subsidiará nosso trabalho de pesquisa, estando elas sujeitas à adaptações se necessárias, estas serão aplicadas sob os enfoques de aprendizagem e de fixação de aprendizagem.

Como em todo processo de aprendizagem os aluno ou qualquer pessoa que esta dentro deste processo está inerente a obstáculo que podem favorecer ou não o processo de aprendizagem, caracterizados por Brousseau (2008) em obstáculos epistemológico, uma vez que estes são manifestados pelos erros, e ignorá-lo é inútil e devemos recebê-lo de maneira explícita e integrar sua negação ao conhecimento novo, em particular na forma de contra exemplos, neste sentindo este obstáculo vem a ser um construtivo do saber.

A fim de verificar a presença de alguns obstáculos no processo de resolução das questões do pré-teste (cf. apêndice J) e pós-teste (cf. apêndice K) e das situações didáticas ou adidáticas que podem favorecer esses obstáculos, veremos a seguir a análise a priori destas questões.

Após verificarmos inicialmente as dificuldades e obstáculo que poderão surgir no momento da resolução das questões no pré-teste e pós-teste, a partir deste momento vamos ver nossa sequencia didática para o ensino e aprendizagem de volume de sólidos geométricos, sendo esta dividida, conforme falamos inicialmente, em duas seções: Seções de Aprendizagem e Seções de Fixação, assim como suas respectivas análises a prior.

Para esta seção a sequencia didática contamos com 9 (nove) atividades, correspondendo a: ideia de volume, unidade de volume, volume de paralelepípedo, volume do cubo, volume do prisma, volume do cilindro, volume do cone, volume da pirâmide e volume da esfera .

Cada seção de atividades é composta por roteiro de atividades e as folhas de figuras contidas nos apêndices, este materiais compunham cada uma das nove atividades.

ATIVIDADE 1

TITULO: Ideia e conceito de volume

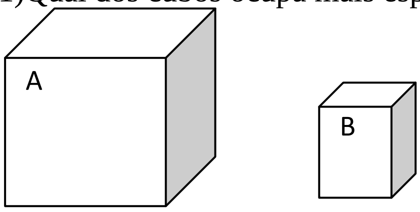
OBJETIVO: Conceituar volume

MATERIAL: Roteiro da atividade, caneta ou lápis.

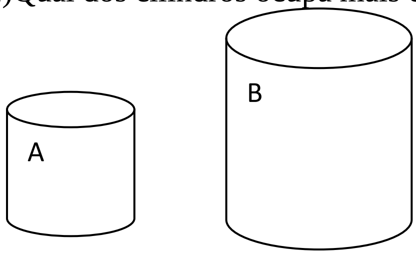
PROCEDIMENTO:

Responda o que se pede nas questões a seguir.

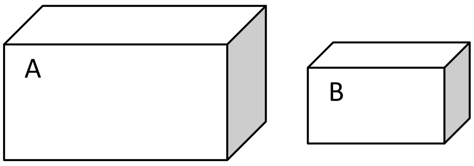
1)Qual dos cubos ocupa mais espaço?



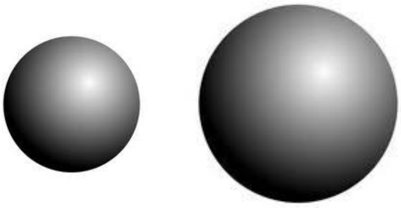
2)Qual dos cilindros ocupa mais espaço?



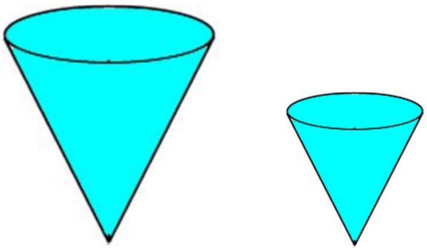
3)Qual dos paralelepípedos ocupa mais espaço?



4)Qual das esferas ocupa mais espaço?

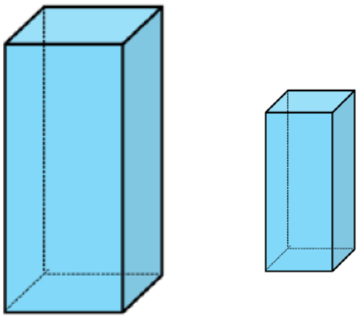


5) Qual dos Cones ocupa mais espaço?

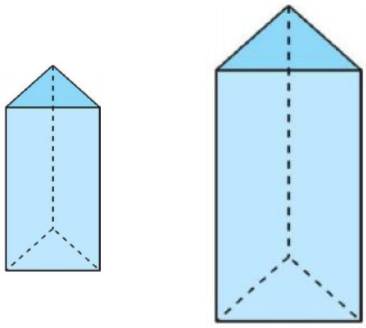


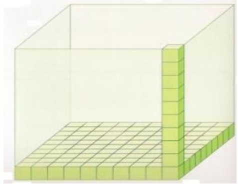
6) Qual das Pirâmides ocupa mais espaço?

7) Qual dos Prismas ocupa mais espaço



8) Qual dos Prismas ocupa mais espaço



9- Quem tem maior volume?	10- É possível saber exatamente quantos cubinhos unitários cabem nesse cubo maior?
	

A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume?

O que é o volume de um corpo?

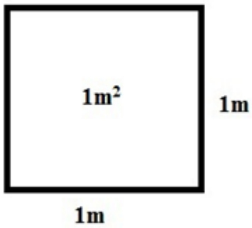
O surgimento do metro cúbico

Os homens primitivos provavelmente sentiram a necessidade de medir distâncias para informar a seus semelhantes a que distância se encontrava a caça, a pesca, os perigos, etc. As primeiras unidades de medida de comprimento foram criadas tomando-se o corpo humano como referência. O dedo polegar, por exemplo, inspirou a polegada (≅ 2,54 cm); o pé humano deu origem ao pé (≅ 30,48 cm); a milha corresponde a mil passos (≅ 1.609,34 m). Algumas dessas unidades são utilizadas até hoje na Inglaterra e nos Estados Unidos. Mesmo no Brasil, os diâmetros de barras e tubos metálicos ainda são expressos em polegadas. Uma medida importante é o volume. Desde a Antiguidade, jarros e vasilhas foram utilizados como unidades de medida para comercializar líquidos como o vinho, o leite, etc. É o caso da ânfora dos romanos, equivalente a aproximadamente 25,44 litros. Curiosamente, até o século XIX era comum, no interior do Brasil, a compra e venda de arroz, feijão, milho, etc, em litros, já que as balanças eram raras e custavam caro.

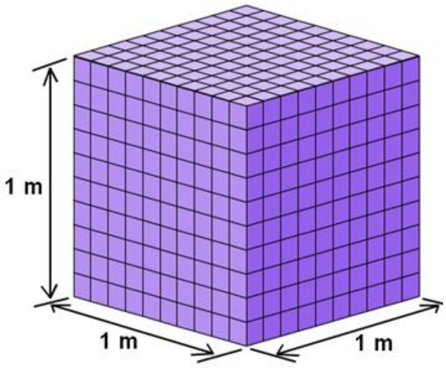
Na história da humanidade, surgiram muitas unidades de medida, o que terminou gerando muita confusão. Para a ciência, para a tecnologia e mesmo para as transações comerciais do dia-a-dia, é importante que se adote um sistema (conjunto) de unidades simples, correlacionadas de modo racional e, se possível, válidas em todas as partes do mundo. Uma grande vitória foi conseguida com o chamado sistema métrico decimal. Veja, por exemplo, que as unidades de comprimento, de área e de volume estão relacionadas entre si: para o comprimento, o metro (m)

1 m

é a unidade básica; para a área, o metro quadrado (m^2)

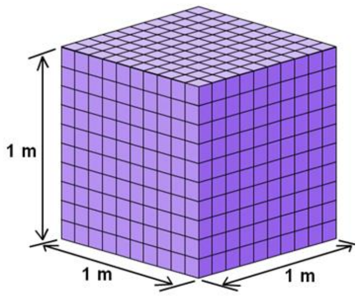


é uma unidade derivada; para o volume, o metro cúbico (m^3)



é outra unidade derivada. O sistema métrico decimal foi criado na França, em 1799, e adotado no Brasil em 1862. Atualmente, esse sistema é utilizado em quase todos os países. Racionalização ainda maior foi conseguida com o Sistema Internacional de Unidades (SI), que o Brasil adotou em 1962. Assim surgiu o metro cúbico, que hoje é utilizado como unidade padrão do volume.

O metro cúbico (símbolo: m^3) é uma unidade de medida de volume equivalente a mil litros. É o padrão no Sistema Internacional de Unidades e é derivado do metro, sendo equivalente ao volume de um cubo com arestas de 1 metro. O metro cúbico equivale também a um quilolitro.



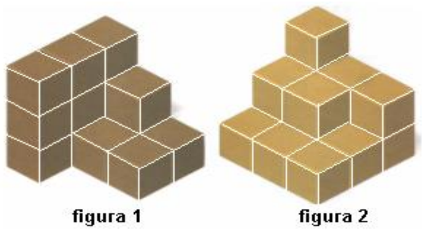
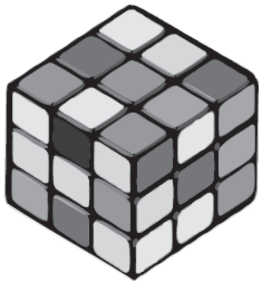
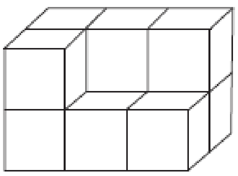
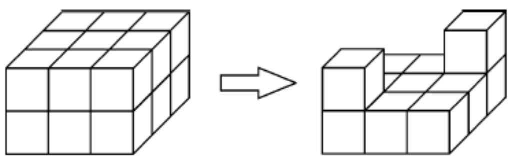
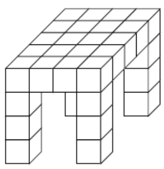
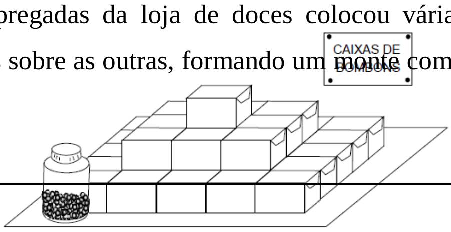
De acordo com o texto acima responda o que se pede:

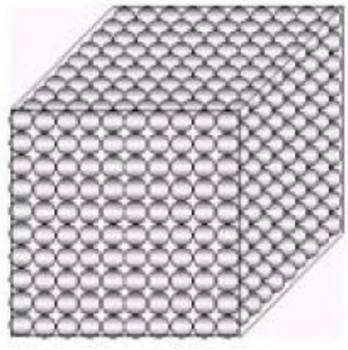
O que é volume?

Analise *a priori* da atividade 1 – Ideia de volume

Nossa justificativa e hipótese para essa atividade, que envolve a parte visual dos sólidos geométricos é que o aluno tenha ciência que existe diferentes maneira de se ocupar um sólido, devido a seu formato. Mostrar os diferentes sólidos geométricos, para que o aluno chegue por intuição no conceito de volume e do metro cúbico. Espera-se que o grau de dificuldade dessa atividade possa está nos diferentes maneiras de conceituar o volume, e também nas transformações das unidades de volume e capacidade.

Noções de volume (Descritor D14 - Resolver problema envolvendo noções de volume**)**

01- Marcelo brincando com seu jogo de montagem construiu os blocos abaixo.  Considerando cada cubo como 1cm³, o volume da figura 1 e 2, respectivamente, é: (A) 14 cm³ e 15 cm³. (B) 10 cm³ e 10 cm³. (C) 15 cm³ e 15 cm³. (D) 12 cm³ e 13 cm³.	02- Cada quadradinho que compõe as faces do cubo mágico da figura abaixo mede 1 cm.  Qual é o volume desse cubo? A) 1 cm^3. B) 9 cm^3. C) 18 cm^3. D) 27 cm^3.
03- A figura abaixo representa um conjunto de cubos, todos iguais, cujos volumes correspondem a $1m^3$.  Quanto vale, em m^3, o volume do conjunto, incluindo os cubos não visíveis? (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12	04- Na figura, cada cubo tem volume 1. O volume da pilha, incluindo-se os cubos invisíveis no canto, é:  a) 6 b) 8 c) 9 d) 10
05- Quantos cubos é que se retiraram do primeiro bloco?  A) 4 B) 5 C) 6 D) 7	06- O Tomás fez uma mesa a partir de pequenos cubos (figura abaixo).  Quantos cubos é que ele usou?
07- Uma das empregadas da loja de doces colocou várias caixas iguais umas sobre as outras, formando um monte como o que vê na figura.  	08- Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado:

O preço de uma caixa é de R$ 2,50. O valor pago por um cliente que compra todas as caixas do monte é:	

Fonte: Moraes (2017)

Atividade 2: Unidades de medida

A palavra "medir" indica uma *comparação* com uma grandeza padrão. A necessidade da padronização das medidas no mundo e da criação de um sistema mais preciso deram origem ao Sistema Métrico Decimal em 1791. Mais tarde o mesmo foi substituído pelo (SI) - conhecido por nós como Sistema Internacional de Unidades.

Roteiro das atividades

Título: Transformação de unidade

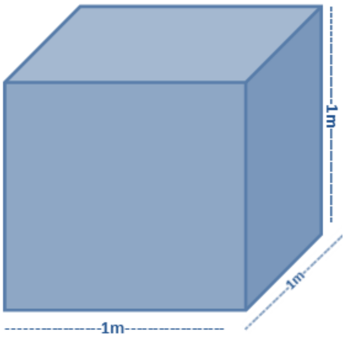
Objetivo: Descobrir uma maneira de transformar de m^3 para dm^3

Material: Roteiro da atividade, canetas ou lápis.

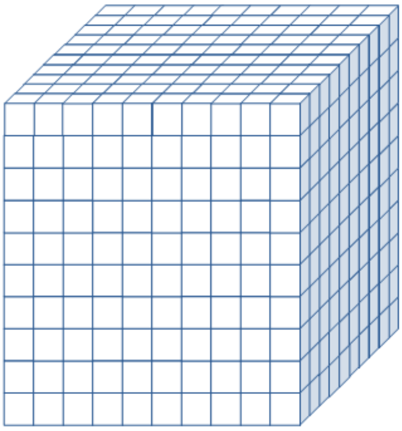
Procedimento:

Como já sabemos a unidade padrão de medida de volume é o metro cúbico que é um cubo com um metro de aresta.

Agora considere que o cubo a seguir tem 1m de aresta, ou seja, é um metro cúbico.



Agora imaginemos que as arestas do metro cúbico foram dividas em 10 partes iguais cada e que cada ponto obtido foi ligado por um segmento de reta a outro ponto da aresta paralela. A figura obtida terá a imagem a seguir



Responda as questões:

1) Qual o valor da aresta de cada cubinho obtido coma divisão do metro cúbico?

2) Em quantos cubinhos o metro cúbico foi dividido?

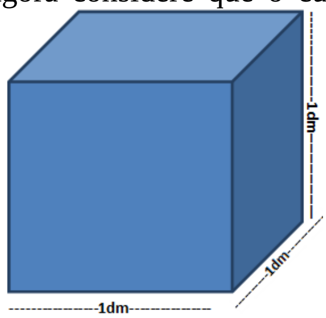
Cada cubo de 1dm de aresta é denominado de **decímetro cúbico** que é representado por **1dm^3**.

3) Quantos decímetros cúbicos cabem em um metro cúbico?
4) Que fração do metro cúbico corresponde um decímetro cúbico?
5) Complete os espaços a seguir:

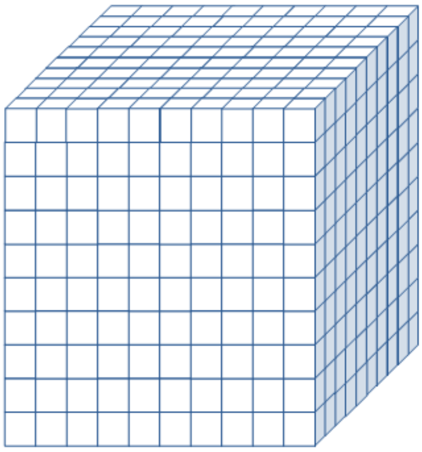
   1m^3 =......... dm^3

   1dm^3= .... m^3 ou 1dm^3 =......... m^3.

Agora considere que o cubo a seguir tem 1dm de aresta, ou seja, é um decímetro cúbico.



Agora imaginemos que as arestas do metro cúbico foram dividas em 10 partes iguais cada e que cada ponto obtido foi ligado por um segmento de reta a outro ponto da aresta paralela. A figura obtida terá a imagem a seguir.



Responda as questões:

6) Qual o valor da aresta de cada cubinho obtido coma divisão do decímetro cúbico?
7) Em quantos cubinhos o decímetro cúbico foi dividido?

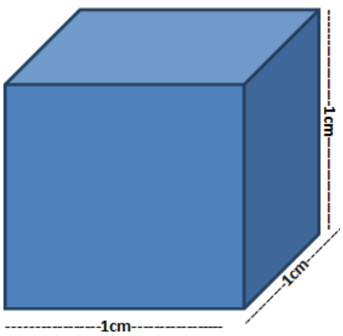
Cada cubo de 1cm de aresta é denominado de **centímetro cúbico** que é representado por **1cm^3**.

8) Quantos centímetros cúbicos cabem em um decímetro cúbico?
9) Que fração do decímetro cúbico corresponde um centímetro cúbico?
10) Complete os espaços a seguir:

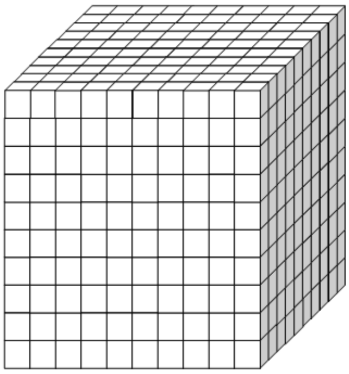
1dm^3 = ... cm^3

1cm^3= .... dm^3 ou 1cm^3 =......... dm^3.

Agora considere que o cubo a seguir tem 1cm de aresta ou seja é um centímetro cúbico.



Agora imaginemos que as arestas do metro cúbico foram dividas em 10 partes iguais cada e que cada ponto obtido foi ligado por um segmento de reta a outro ponto da aresta paralela. A figura obtida terá a imagem a seguir.



Responda a s questões

11) Qual o valor da aresta de cada cubinho obtido coma divisão do centímetro cúbico?
12) Em quantos cubinhos o centímetro cúbico foi dividido?

Cada cubo de 1mm de aresta é denominado de **milímetro cúbico** que é representado por **$1mm^3$**. O milímetro cúbico é um **submúltiplo** do metro cúbico.

13) Quantos milímetros cúbicos cabem em um centímetro cúbico?
14) Que fração do centímetro cúbico corresponde um milímetro cúbico?
15) Complete os espaços a seguir:

$1cm^3$ = ... mm^3

$1mm^3$= .... cm^3 ou $1mm^3$ =......... cm^3.

Preencha o quadro a seguir

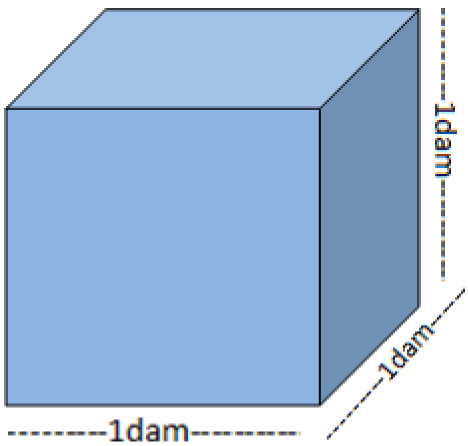
m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1			
	3000		
		4000000	
			5000000000
2	2000		
8			
			6000000000
0.5			

	1,2		
		321000	
			647882929293

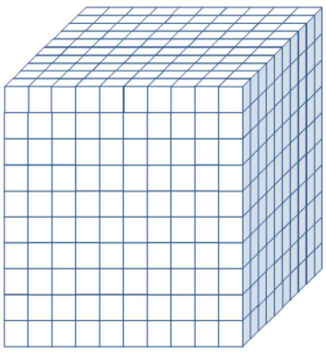
Descubra uma maneira prática de transformar as unidades de medida de volume.

Conclusão

Agora considere que o cubo a seguir tem 1dam de aresta, ou seja, é um decâmetro cúbico.



Agora imaginemos que as arestas do decâmetro cúbico foram dividas em 10 partes iguais cada e que cada ponto obtido foi ligado por um segmento de reta a outro ponto da aresta paralela. A figura obtida terá a imagem a seguir.



Responda as questões:

16) Qual o valor da aresta de cada cubinho obtido coma divisão do decâmetro cúbico?
17) Em quantos cubinhos o decâmetro cúbico foi dividido?

Cada cubo de 1m de aresta é denominado de **metro cúbico** que é representado por **1m^3**.

18) Quantos metros cúbicos cabem em um decâmetro cúbico?

19) Que fração do decâmetro cúbico corresponde um metro cúbico?

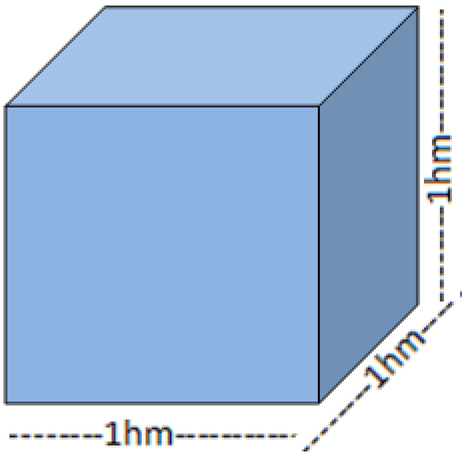
20) Complete os espaços a seguir:

$1dam^3$ = ... m^3

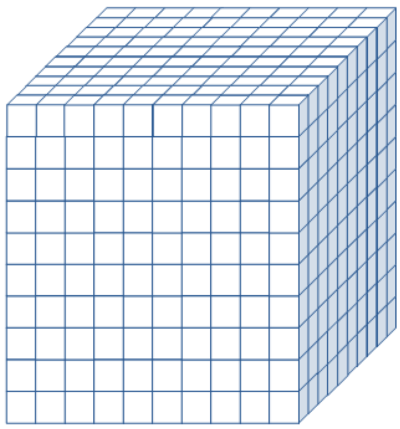
$1m^3$= .... dam^3 ou $1m^3$ =......... dam^3.

....

Agora considere que o cubo a seguir tem 1hectômetro de aresta, ou seja, é um hectômetro cúbico.



Agora imaginemos que as arestas do hectômetro cúbico foram dividas em 10 partes iguais cada e que cada ponto obtido foi ligado por um segmento de reta a outro ponto da aresta paralela. A figura obtida terá a imagem a seguir.



Responda as questões:

21) Qual o valor da aresta de cada cubinho obtido coma divisão do hectômetro cúbico?

22) Em quantos cubinhos o hectômetro cúbico foi dividido?

Cada cubo de 1hm de aresta é denominado de **hectômetro cúbico** que é representado por **1hm^3**.

23) Quantos decâmetros cúbicos cabem em um hectômetro cúbico?

24) Que fração do hectômetro cúbico corresponde um metro cúbico?

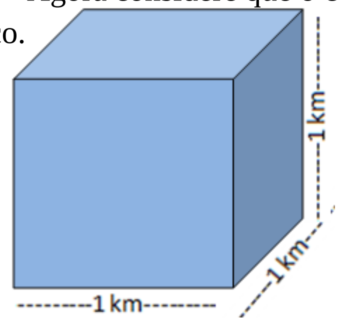
25) Complete os espaços a seguir:

$1hm^3$ = ... dam^3

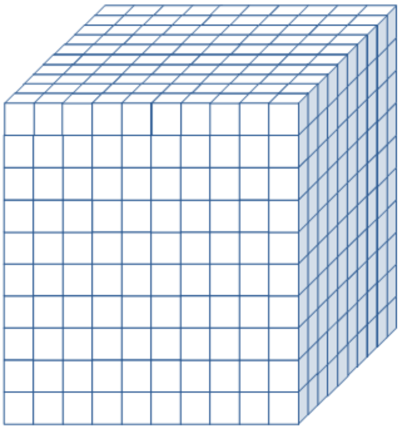
$1dam^3$= .... hm^3 ou $1dam^3$ =......... hm^3.

....

Agora considere que o cubo a seguir tem 1kilômetro de aresta, ou seja, é um kilômetro cúbico.



Agora imaginemos que as arestas do quilômetro cúbico foram dividas em 10 partes iguais cada e que cada ponto obtido foi ligado por um segmento de reta a outro ponto da aresta paralela. A figura obtida terá a imagem a seguir.



Responda as questões:

1) Qual o valor da aresta de cada cubinho obtido coma divisão do quilômetro cúbico?
2) Em quantos cubinhos o quilômetro cúbico foi dividido?

Cada cubo de 1km de aresta é denominado de **quilômetro cúbico** que é representado por **$1km^3$**.

3) Quantos hectômetros cúbicos cabem em um quilômetro cúbico?
4) Que fração do quilômetro cúbico corresponde um metro cúbico?
5) Complete os espaços a seguir:

$1km^3$ = ... hm^3

$1hm^3$= .... km^3 ou $1hm^3$ =......... km^3.

Preencha o quadro a seguir

km^3	hm^3	dam^3	m^3
1			
	3000		
		4000000	
			5000000000
2	2000		
8			
			6000000000
0.5			
	1,2		
		321000	
			647882929293

Descubra uma maneira prática de transformar as unidades de medida de volume.

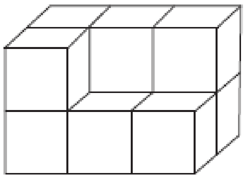
Conclusão

Analise *apriori* da atividade 2 – Unidade de Volume

Nossa hipótese para esta atividade, seguindo uma sequencia previamente orientada no roteiro e pelo professor orientador, é que os alunos consigam compreender as unidades de volume e saibam transformar tanto os múltiplos como os submúltiplos de maneira gradativa, ou seja, ele seja levado a compreensão de como transformar as unidades.

Exercício de aprofundamento

01- A figura abaixo representa um conjunto de cubos, todos iguais, cujos volumes correspondem a $1m^3$.



Quanto vale, em m^3, em dm^3 e em cm^3 o volume do conjunto, incluindo os cubos não visíveis?

02- O tanque de combustível de um veículo contém 10,006 m³ de gás. Nessas condições, é correto dizer que o tanque contém 10 m³ mais X cm³ de gás, em que X é igual a:

(A) 6.

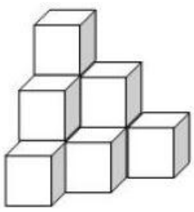
(B) 60.

(C) 600.

(D) 6 000.

(E) 60 000.

03- Um estoquista, ao conferir a quantidade de determinado produto embalado em caixas cúbicas medindo 64000 cm^3 de volume, verificou que o estoque do produto estava empilhado de acordo com a figura que segue:



Ao realizar corretamente os cálculos do volume dessa pilha de caixas, o resultado obtido foi:

a) 0,64 m³

b) 1,6 m³

c) 6,4 m³

d) 16 m³

e) 64 m³

04- Na leitura do hidrômetro de uma casa, verificou-se que o consumo do último mês foi 36 m³. Quantos litros de água foram consumidos? (ATENÇÃO: 1 litro = 1 dm³)

05- é a capacidade, em litros, de uma caixa-d'água cujo volume interno é de 0,36 m³?(ATENÇÃO: 1 litro = 1 dm³)

06- Expresse em litros sabendo que1 litro = 1 dm³ :

a) 70 dm^3

b) 83,6 dm^3

c) 5 m^3

d) 2,8 m^3

e) 3500 cm^3

f) 92 cm^3

ATIVIDADE 3

TITULO: Volume do paralelepípedo

OBJETIVO: descobrir uma maneira indireta de determinar o volume de um paralelepípedo

MATERIAL: quadro de paralelepípedos, roteiro da atividade, caneta ou lápis e calculadora (opcional)

PROCEDIMENTO

• Considere um cubinho como unidade de volume;

•Considere a aresta do cubinho como unidade de comprimento;

•Determine o comprimento, a largura, o comprimento e o volume cada paralelepípedo do quadro de paralelepípedo;

•Com as informações obtidas (no apêndice C) preencha o quadro abaixo.

Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!

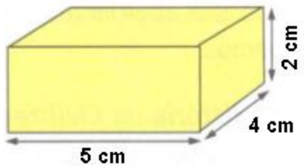
CONCLUSÃO:

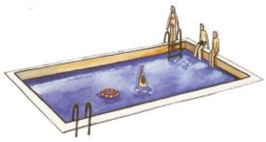
FORMULA:

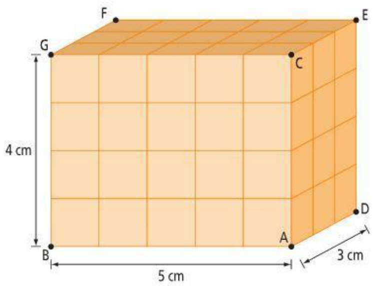
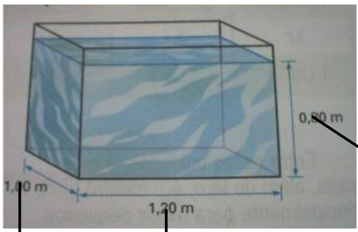
Analise *apriori* da atividade 3 – Volume do Paralelepípedo

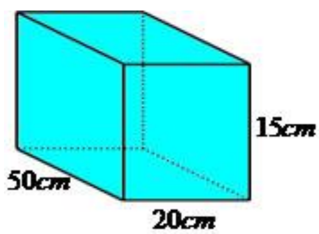
Nossa hipótese para esta atividade, seguindo a sequencia previamente orientada no roteiro e pelo professor orientador, é que os alunos consigam fazer a sistematização, chegando à fórmula do cálculo de volume de paralelepípedo sem grandes dificuldades.

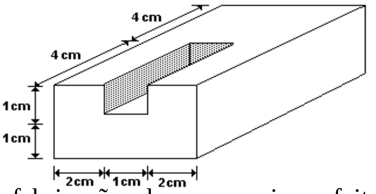
Paralelepípedo D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

<table>
<tr>
<td>01- Quantos cubos iguais a este, que tem 1 cm³ de volume, eu precisaria colocar dentro da figura abaixo para não sobrar nenhum espaço interno?


A) 40
B) 50
C) 10
D) 80</td>
<td>02- O Sr. José, residente em Fafe, quer construir uma piscina no seu jardim. Para iniciar a construção, foi necessário abrir um buraco paralelepípedo com as seguintes dimensões: 12 m de comprimento, 5 m de largura e 1,5 m de profundidade.

a) Calcule o volume de terra que foi removida do buraco.

b) Um trator leva 4 m^3 de terra em cada viagem que faz. Quanta viagem precisa fazer para levar a terra toda?</td>
</tr>
<tr>
<td>03- Qual o volume do sólido abaixo?

</td>
<td>04- Observe a figura abaixo:


0,80 m
1,00m
1,20 m
O volume de água na caixa é de:
a) 0,96 λ b) 96 λ c) 960 λ d) 9 600 λ</td>
</tr>
<tr>
<td>05- Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é:
a) 9
b) 11
c) 13</td>
<td>06- Um aquário possui o formato de um paralelepípedo com as seguintes dimensões:

</td>
</tr>
</table>

d) 15 e) 17	Determine quantos litros de água são necessários para encher o aquário.
07- Um caminhão tem carroceria com 3,40 metros de comprimento, 2,50 metros de largura e 1,20 metros de altura. Quantas viagens devem-se fazer, no mínimo, para transportar 336 metros cúbicos de arroz?	08-  Na fabricação da peça acima, feita de um único material que custa R$ 5,00 o cm^3, deve-se gastar a quantia de: a) R$ 400,00 b) R$ 380,00 c) R$ 360,00 d) R$ 340,00 e) R$ 320,00

ATIVIDADE 4

TITULO: Volume do cubo

OBJETIVO: descobrir uma maneira indireta de determinar o volume de um cubo

MATERIAL: quadro de cubos, roteiro da atividade, caneta ou lápis e calculadora (opcional)

PROCEDIMENTO:

• Considere um cubinho como unidade de volume;

•Considere a aresta do cubinho como unidade de comprimento;

•Determine o comprimento, a largura, o comprimento e o volume cada cubo do quadro de cubos;

•Com as informações obtidas (no apêndice D) preencha o quadro abaixo.

Medida da aresta(a)										
Medida do volume (V)										

Descubra uma maneira de determinar o volume de um cubo sem contar os cubinhos!

CONCLUSÃO:

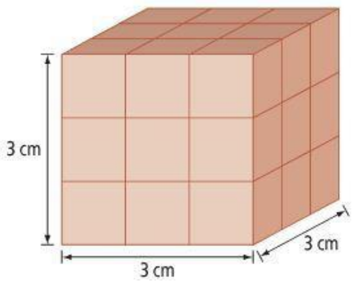
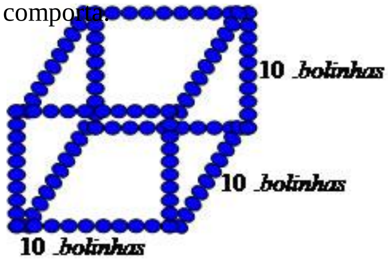
FORMULA:

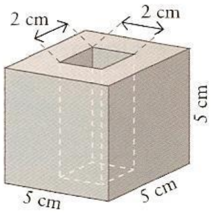
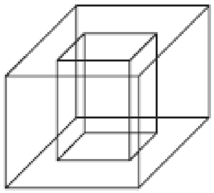
Analise *apriori* da atividade 4 – Volume do Cubo

Nossa justificativa e hipótese para esta atividade estão ligados ao fato de termos iniciado pelo Paralelepípedo, ou seja, para figuras com medidas diferentes a conclusão seria a multiplicações dos lados, Já o cubo a ideia seria a mesma, agora com medidas de lados iguais, fato que não seria dificultoso para o aluno.

Nesse sentido, acreditamos que a maior dificuldade do aluno seria a sistematização da formula, uma vez que ao multiplicarmos as arestas o resultado seria aresta elevada ao cubo (a^3). O entendimento dessa fórmula seria essencial para que os alunos pudessem entender conceito de utilizarmos cm^3, m^3 como medida de volume.

Cubo D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

01- Qual o volume do cubo abaixo? 	02- Dado um cubo de 10 cm de aresta, determine quantas bolinhas de diâmetro igual a 1cm ele comporta. 
03- Um aquário, que tem a forma de um cubo, possui 50cm de aresta. Qual é seu volume em cm^3?	04- Quantos litros de água serão necessários para encher completamente um reservatório em formato de cubo com aresta de 2m? **a) 800L b) 2000L c) 4000L d) 8000L**

05- Pequenas caixas cúbicas de arestas medindo 20 cm serão guardadas em um caixote maior, também com a forma de cubo, cujas arestas medem 60 cm. Considerando que o caixote deverá ser tampado, o número máximo de caixas que poderá ser ali armazenado é igual a: a) 3 b) 6 c) 9 d) 18 e) 27	06- Uma peça metálica com a forma cúbica tem uma parte oca. Qual é o volume do material em que é fabricada? 
07- Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.  O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de (A) 12 cm³. (B) 64 cm³. (C) 96 cm³ (D) 1216 cm³ (E) 1728 cm³.	08- Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. Determine o valor de x.

ATIVIDADE 5

Título: O Volume do prisma

Objetivo: descobrir uma maneira de calcular volume

Material: Roteiro da atividade, quadro de prismas, caneta ou lápis e calculadora (opcional)

Procedimento:

Para cada prisma do quadro (no apêndice E) de prismas determine:

1)O valor da área da base;

2)A medida da altura;

3)A medida do volume

Com os dados obtidos preencha o quadro a seguir.

Sólidos	Área da base ($\mathbf{A_b}$)	Altura (**h**)	Volume (**V**)
Prisma nº1			
Prisma nº 2			
Prisma nº 3			
Prisma nº 4			
Prisma nº 5			
Prisma nº 6			
Prisma nº 7			
Prisma nº8			
Prisma nº9			
Prisma nº10			

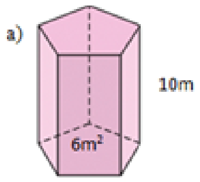
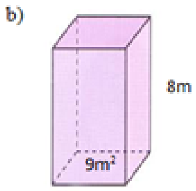
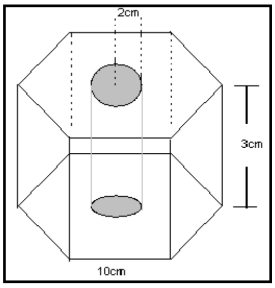
CONCLUSÃO:

FORMULA:

Analise *a priori* da atividade 5 – Volume do Prisma

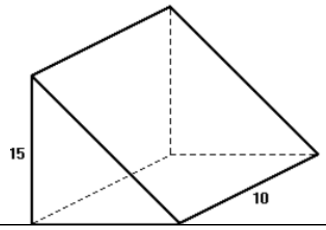
Esta atividade tem por objetivo, levar os alunos a descobrirem uma maneira prática de encontrar o volume do prisma e sistematizar, ou seja, encontrar a fórmula que determine o seu volume. Essa atividade não tem um grau de dificuldade alto, uma vez que o aluno dispõem de uma tabela simples, mas com a ideia elementar de cálculo de volume de prisma, que é a multiplicação da área da base multiplicado pelo altura. Nesse sentido acreditamos que a grande dificuldade vai ser a determinação das áreas das bases dos prismas, pois existem diferentes maneiras de se calcular a área da base, dependerá do tipo de figura, lembrando que área é conhecimento prévio do aluno, e que não nos exime de fazer a intervenção nesse sentido.

Essas atividades vão ser socializadas com todos os alunos para nos certificarmos que eles conseguem compreender a relação entre a área da base e a altura. Será proposto um exercício de fixação para assegurar o conhecimento adquirido e prepara-los para situações diferentes do convencional.

01- Calcular o volume dos sólidos abaixo:   	02- A garagem subterrânea de um edifício tem 18 boxes retangulares, cada um com 3,5m de largura e 5m de comprimento. O piso da garagem é de concreto e tem 20cm de espessura. Calcule o volume de concreto utilizado para o piso da garagem.
03- Considere um prisma cuja base é um hexágono regular de 10 cm de lado e altura de 3 cm. No centro da peça, existe um furo cilíndrico de 2 cm de raio. Qual é a quantidade de ferro, em volume, utilizada na confecção da peça?  	04- Um reservatório tem a forma de um prisma , cuja base reta é um triângulo ABC, retângulo em A. As medidas, em metros, estão indicadas na figura. A capacidade do reservatório, em litros é: a) 14 000 b) 14 050 c) 14 500 d) 15 000
05- Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma, em cm^3, é: a) $27\sqrt{3}$ b) $13\sqrt{2}$ c) 12 d) $54\sqrt{3}$ e) $17\sqrt{5}$	06- Uma barra de chocolate tem a forma de um prisma quadrangular reto de 12cm de altura. A base tem a forma de um trapézio isósceles na qual os lados paralelos medem 2,5cm e 1,5cm e os lados não paralelos medem, cada um, 2cm. Qual o volume do chocolate?

07- (Fei) De uma viga de madeira de seção quadrada de lado L=10cm extrai-se uma cunha de altura h=15cm, conforme a figura. O volume da cunha é:

a) 250 cm^3
b) 500 cm^3
c) 750 cm^3
d) 1000 cm^3
e) 1250 cm^3



08- Qual o volume de argila necessário para produzir 5.000 tijolos, tendo cada tijolo a forma de um paralelepípedo com dimensões de 18 cm, 9 cm e 6 cm?

ATIVIDADE 6

Título: O Volume da Pirâmide

Objetivo: descobrir uma maneira de calcular volume

Material: Roteiro da atividade e quadro de Pirâmide (no apêndice F)

Procedimento:

Para cada Pirâmide do quadro de Pirâmide determine:

1)O valor da área da base;

2)A medida da altura;

3)A medida do volume

Sólido	Área da base ($\mathbf{A_b}$)	Altura (**h**)	Volume (**V**)
Pirâmide nº1			
Pirâmide nº 2			
Pirâmide nº 3			
Pirâmide nº 4			
Pirâmide nº 5			
Pirâmide nº 6			
Pirâmide nº 7			
Pirâmide nº8			
Pirâmide nº9			
Pirâmide nº10			

Observação:

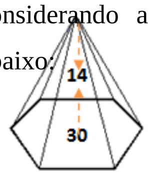
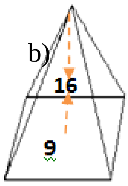
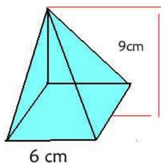
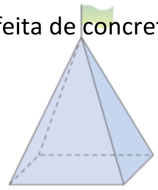
Conclusão:

Fórmula:

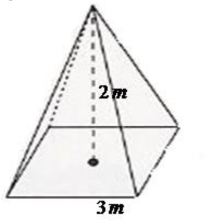
Analise *a priori* da atividade 6 – Volume da Pirâmide

Para a atividade do cálculo do volume da pirâmide, observa-se que é uma variação do cálculo do volume do prisma. Nossa hipótese em relação a essa atividade é de que os alunos demorem mais para compreender que aparecerá uma divisão por três em relação ao volume do prisma. Pra isso a estratégia foi montar a área da base e/ou da altura sendo múltiplo de três, com o propósito do resultado do cálculo volume ser um numero inteiro, isso facilita a sistematização e a obtenção da fórmula. A socialização, sugerida no ensino por atividade e o exercícios de fixação é uma das alternativas para a apropriação do conhecimento.

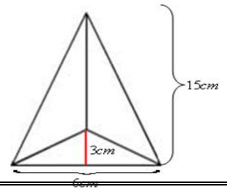
Pirâmides (D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

01- Calcular o volume dos sólidos, em cm^3, considerando a área da base e a altura indicada abaixo: a)  b)  c) 	02- O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.  Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, o volume de concreto (em m³) necessário para a construção da pirâmide será:
03- O volume de uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero de lado 2 dm e cuja altura mede 3 dm, em dm^3, é igual a: a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{3}$	04- Uma pirâmide quadrangular regular tem 8 m de altura e 10 m de apótema. O seu volume é : a) 1152 m^3 b) 288 m^3 c) 96 m^3 d) 384 m^3 e) 48 m^3
05- A base de uma pirâmide é um triangulo eqüilátero, cujo lado mede 4 cm. Sendo a altura da pirâmide igual à altura do triangulo da base, o volume da pirâmide, em cm^3, é: a) 4 b) 6 c) 8 d) 10	06- Um prisma de base pentagonal possui $360m^3$ de volume. Qual o volume de uma pirâmide com mesma base e mesma altura?

07- Uma pirâmide de base quadrangular possui altura medindo 2 metros e cada lado da base com medida igual a 3 metros. Determine o volume dessa pirâmide.



08- Uma indústria irá fabricar uma peça no formato de uma pirâmide de base triangular com as medidas indicadas na figura. Sabendo que serão fabricadas 500 peças maciças de aço, determine o volume total de aço que será gasto na produção dessas peças.



ATIVIDADE 7

Título: O Volume do Cilindro

Objetivo: descobrir uma maneira de calcular volume

Material: Roteiro da atividade e quadro de Cilindro, caneta ou lápis e calculadora (opcional)

Procedimento:

Para cada Cilindro do quadro de Cilindros (no apêndice G) determine:

1)O valor da área da base;

2)A medida da altura;

3)A medida do volume

Com os dados obtidos preencha o quadro a seguir.

Sólidos	Área da base (**Ab**) **m^2**	Altura (**H**) **m**	Volume (**V**) **m^3**
Cilindro nº1			
Cilindro nº2			
Cilindro nº3			
Cilindro nº4			
Cilindro nº5			
Cilindro nº6			
Cilindro nº7			
Cilindro nº8			
Cilindro nº9			
Cilindro nº10			

Observação:

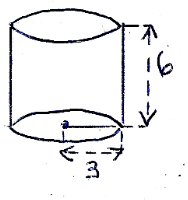
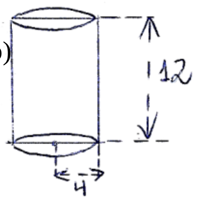
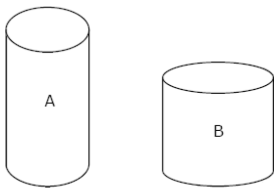
Conclusão:

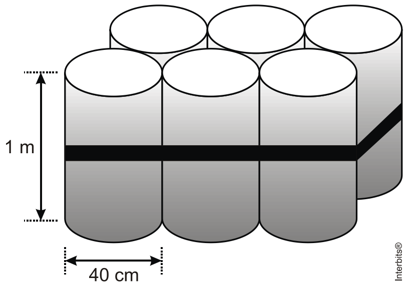
Fórmula:

Analise *a priori* da atividade 7 – Volume do Cilindro

As atividades envolvendo sólidos redondos apresentam um grau de compreensão maior, tendo em vista que aparecerá o valor de uma constante chamada π(pi). Nossa estratégia para essa atividade foi manter o valor de π, no cálculo da área da base, isso facilitaria a percepção, uma vez que o aluno já viu como se calcula o volume do prisma, que é área da base multiplicado pela altura. No cilindro seria a mesma coisa, com a diferença de aparecer a constante dos sólidos redondos. Espera-se que essa atividade não traga grandes dificuldades para o aluno, pois a atividade está organizada de modo que a compreensão e obtenção da fórmula sejam facilitadas, a socialização da atividade e o exercício de fixação contribuirão para o aprofundamento da aprendizagem.

Cilindro (D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

01- Calcule o volume do cilindro a)  b) 	02- Uma lata de refrigerante tem forma cilíndrica, com 4 cm de raio nas bases e 15 cm de altura. Use π= 3,14 e determine: O volume da lata de refrigerante.
03- Qual o volume de um cilindro de 4 cm de diâmetro e 5 cm de altura?	04- Se um cilindro equilátero mede 12 m de altura, então seu volume, em m^3, vale: A) 16π B) 32π **x**C) 64π D) 128π E) 256π
05- O Sr. Paulo quer fazer um poço no quintal com 2 m de diâmetro e 12 m de profundidade. Qual é, aproximadamente, o volume de terra que vai ter de extrair? (considere π=3,14)  a) 37,68m^3 b) 75,36m^3 c) 80,00m^3 d) 120,36m^3	06- Um produto é embalado em recipientes com formato cilíndrico reto. O cilindro A tem altura 20 cm e raio da base 5 cm. O cilindro B tem altura 10 cm e raio da base 10 cm. Em qual das duas embalagens tem a maior capacidade? 
07- Uma indústria irá produzir dois tipos de copos com formato cilíndrico. O copo azul terá as seguintes medidas 5 cm de raio da base e 12 cm de altura e o copo verde 3 cm de raio da base e 18 cm de altura.	08- O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com

<table>
<tr>
<td>Qual dos copos possuirá o maior volume?</td>
<td>seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado.


Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit em um mês pagará a quantia de
(considere $\pi \cong 3$)
a) R$ 86,40.
b) R$ 21,60.
c) R$ 8,64.
d) R$ 7,20.</td>
</tr>
</table>

ATIVIDADE 8

Título: O Volume do Cone

Objetivo: descobrir uma maneira de calcular volume

Material: Roteiro da atividade, quadro de Cone, caneta ou lápis e calculadora (opcional)

Procedimento:

Para cada Cone do quadro de Cone (no apêndice H) determine:

1)O valor da área da base;

2)A medida da altura;

3)A medida do volume

Com os dados obtidos preencha o quadro a seguir.

Sólidos	Área da base (**Ab**) m^2	Altura (**H**) M	Volume (**V**) m^3
Cone nº1			
Cone nº2			
Cone nº3			
Cone nº4			
Cone nº5			
Cone nº6			
Cone nº7			
Cone nº8			
Cone nº9			
Cone nº10			

Observação:

Conclusão:

Fórmula:

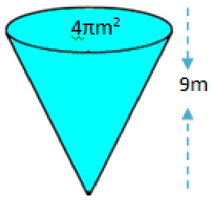
Analise *a priori* da atividade 8 – Volume do cone

Nossa hipótese para essa atividade é de que o aluno relacione com o cálculo de volume da pirâmide, que também é dividido por três, que notem também que é um sólido redondo igual ao cilindro e que vai aparecer a constante π. Espera-se que essa atividade não traga grande dificuldade. Todos os valores foram colocados como múltiplos de três para facilitar a compreensão e a sistematização da formula. A intervenção será feito apenas nas particularidades dos sólidos, como por exemplo, a base e a geratriz do cone.

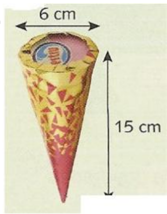
Cone (D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

01- Calcular o volume dos sólidos abaixo:

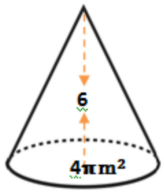
a)



c)



b)



02- - Num cone reto, a altura é 3 m e o diâmetro da base é 8 m. Então, o seu volume vale:

a. $48\pi m^3$
b. $36\pi\ m^3$
c. $16\pi\ m^3$
d. $12\pi\ m^3$
e. $8\pi\ m^3$

03- A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8πcm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é

a) 64π
b) 48π
c) 32π
d) 16π
e) 8π

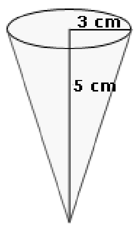
04- Um tanque cônico tem 4 m de profundidade e seu topo circular tem 6 m de diâmetro. Então, o volume máximo, em litros, que esse tanque pode conter de líquido é: (use $\pi = 3{,}14$).

A) 24.000 B) 12.000 C) 37.860 D) 14.000 **x**E) 37.680

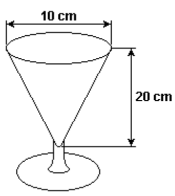
05- Um cone equilátero tem de área de base $4\,\pi\,cm^2$. Qual seu volume?

a) $2\,\pi\,cm^3$.
b) $4\,\pi\,cm^3$.
c) $8\,\pi\,cm^3$.
d) $16\,\pi\,cm^3$.
e) $32\,\pi\,cm^3$.

06- Quantos centímetros cúbicos de água seriam necessários para encher o cone abaixo?



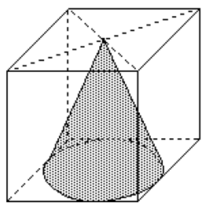
07- Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de milk shake com as dimensões mostradas no desenho.



Sabendo-se que a taça estava totalmente cheia e que eles beberam todo o milk shake, calcule qual foi o volume, em mL, ingerido pelo casal. Adote $\pi = 3$.

08- Na figura, a base do cone reto está inscrita na face do cubo. Supondo π=3, se a área total do cubo é 54, então o volume do cone é:

a) 81/2
b) 27/2
c) 9/4
d) 27/4
e) 81/4



ATIVIDADE 9

Título: O Volume da esfera

Objetivo: descobrir uma maneira de calcular volume

Material: Roteiro da atividade, quadro de esfera, caneta ou lápis e calculadora (opcional)

Procedimento:

Para cada esfera do quadro de esfera (no apêndice I) determine:

1)O valor da área da Superfície;

2)O Raio da Esfera;

3)A medida do volume

Preencha a tabela abaixo

Sólidos	O valor do Raio (**R**)	O valor do Raio ao cubo (**R^3**)	Volume (**V**) m^3
Esfera nº 1			
Esfera nº 2			
Esfera nº 3			
Esfera nº 4			
Esfera nº 5			
Esfera nº 6			
Esfera nº 7			
Esfera nº8			
Esfera nº9			
Esfera nº10			

Observação:

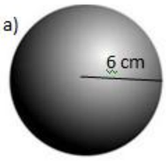
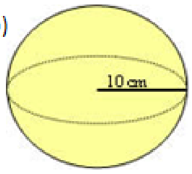
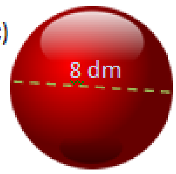
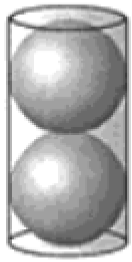
Conclusão:

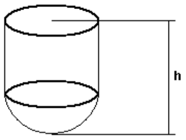
Fórmula:

Analise *a priori* da atividade 9 – Volume da esfera

Nossa hipótese para essa atividade é de que, pela complexidade da fórmula os alunos terão mais dificuldades e levarão mais tempo para concluir essa atividade. A estratégia a ser utilizada será organizar os valores de acordo com a fórmula a ser deduzida, e não mais a área da base multiplicada pela altura, e sim a área da superfície esférica vezes o raio. Essa atividade vai ser orientada e a descoberta será compartilhada com todos. Temos também o exercício de fixação baseado nas atividades e em outros contextos como forma de se efetivar o conhecimento.

Esfera (D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

01- Calcular o volume dos sólidos a seguir: a)  b)  c) 	02- Duas esferas de raio **r** foram colocadas dentro de um cilindro circular reto com altura **4r**, raio da base **r** e espessura desprezível. Calcule a razão entre o volume do cilindro não ocupado pelas esferas e o volume das esferas. 
03- Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a: a) 4 b) 8 c) 16 d) 24 e) 32	04- Um copinho de sorvete, em forma de cone, tem 10 cm de profundidade, 4 cm de diâmetro no topo e tem aí colocadas duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos afirmar que a) não transbordará. b) transbordará. c) os dados são insuficientes. d) os dados são incompatíveis. e) todas as afirmações anteriores são falsas.
05- Uma panela cilíndrica de 20 cm de diâmetro esta completamente cheia de massa para doce, sem exceder a sua altura, que é de 16 cm. O número de	06- Após uma partida de futebol, a bola sofreu uma redução de 30% em seu volume. A redução sofrida pela área de sua superfície foi de:

doces em formato de bolinhas de 2 cm de raio que se pode obter com toda essa massa é:	
07- Pretende-se encher uma bexiga até que ela atinja 20 cm de diâmetro. Considere que essa bexiga é esférica. Quantos litros de água aproximadamente serão necessários? a) 4,2 litros. b) 3,8 litros. c) 3,1 litros. d) 2,5 litros.	08- Um reservatório de água tem a forma de um hemisfério acoplado a um cilindro circular como mostra a figura a seguir.  A medida do raio do hemisfério é a mesma do raio da base do cilindro e igual a r = 3 m. Se a altura do reservatório é h = 6 m, a capacidade máxima de água comportada por esse reservatório é: a) 9π m^3. b) 18π m^3. c) 27π m^3. d) 36π m^3. e) 45π m^3.

4- EXPERIMENTAÇÃO

Segundo a engenharia didática, a fase de experimentação corresponde à fase dedicada ao desenvolvimento das atividades que compõem á sequencia didática em que cada encontro desenvolvido em sala de aula é chamado de sessão. Nesta fase de pesquisa devem-se desenvolver as atividades planejadas e ao mesmo tempo, realizar o maior número de registro possível em quantidade e diversidade. Essa particularidade da experimentação faz com que haja dificuldade e até mesmo impossibilidade do pesquisador exercer ao mesmo tempo os papeis de docente e observador da experimentação.

Nesta seção, apresentaremos uma descrição detalhada de acordo com a engenharia didática, sobre o experimento feito em uma escola localizada no município de Castanhal- PA. Nosso objetivo é fazer o registro de todo o procedimento realizado durante a sessão de aprendizado dos alunos e iniciaremos nosso relato com a apresentação da escola escolhida para o desenvolvimento de nosso experimento.

4.1 Relatório da experimentação

Agora apresentaremos as análises e descrição das sessões de ensino, iniciado pelo Pré-teste, com descrição do perfil dos alunos e seu desempenho nas atividades e nas resoluções das questões de aprendizagem sugeridas e concluindo com o Pós-teste.

A Escola

O trabalho foi realizado numa turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola vinculada à rede estadual de Ensino do Estado do Pará, localizada no bairro Centro do município de Castanhal no estado do Pará.

A escola foi escolhida, principalmente por ser uma escola tradicional em Castanhal, e que possui diferentes tipos de alunos, muitos vindos dos interiores da cidade e outros da zona periférica, além de ser uma escola bem centralizada e de fácil acesso. Nesse sentido entramos em contato com o professor e a direção da escola, no qual foram muito prestativos em nos possibilitar iniciarmos o experimento.

4.2 As sessões de Ensino

As sessões de Ensino ocorreram sempre nos horários de aula da turma, de 10h30m às 12h das quinta e sexta feira. A turma era formada por 30 alunos, sendo a maioria do sexo masculino, o dobro aproximadamente, turma muito agitada, mas que levaram o propósito a sério. A sala de aula era climatizada, mas estava molhado em algumas partes devido o respingo da central de ar; as carteiras eram em formato de mesa e cadeiras; o quadro branco tipo magnético padrão para pincéis; sala pequena e as carteiras organizadas em filas.

Neste dia (1º encontro) os alunos estavam agitados, o professor de Matemática da turma nos apresentou para turma, informando que, a partir daquele dia iniciaríamos um trabalho com eles. Fizemos as explicações do trabalho e detalhamos o que ia ser realizado nos próximos encontros. Essa informação os deixou curiosos e estimulados com a possibilidade de aprender utilizando nova metodologia.

Nesse primeiro encontro que foi em 24/08/17, organizamos os alunos, apresentamos algumas informações, entre elas a de que iniciaríamos o trabalho com o preenchimento de um questionário sócio econômico e sobre estudo de volume de sólidos geométricos e a aplicação de um pré- teste com questões sobre volume e suas unidades de medida no qual eles deveriam ler e tentar resolver. Caso não soubessem resolver poderiam deixar em branco, mas que tentassem fazer o melhor de cada um nas questões.

Os alunos presentes mantiveram-se atentos a tarefa, fazendo individualmente e, aos 23 minutos o primeiro aluno entregou o questionário preenchido, mas o pré-teste com apenas uma questão solucionada erroneamente. Pouco depois os demais alunos começaram a entregar o trabalho com a mesma tendência, a maioria das questões do pré- teste em branco, o último aluno entregou o trabalho às 11h43m. Uma observação a ser feita neste dia, foi de que 4 alunos saíram as 11h30m, devido o ônibus escolar que leva eles para o interior da cidade chegar neste horário.

Diante de algumas dificuldades encontradas e as observações efetuadas na turma, começamos nosso trabalho de acordo com a especificidade da turma, pois conhecer os alunos é de fundamental importância para o sucesso da metodologia que seria utilizada.

4.3 Perfil dos Alunos

Com o objetivo de traçar o perfil dos alunos e alunas do 2º do Ensino Médio dessa escola, descreveremos e apresentaremos os resultados da consulta efetuada no questionário do pré- teste. Para facilitar a interpretação e análise do questionário, a ordem das questões pode não estar de acordo com a apresentada nas informações.

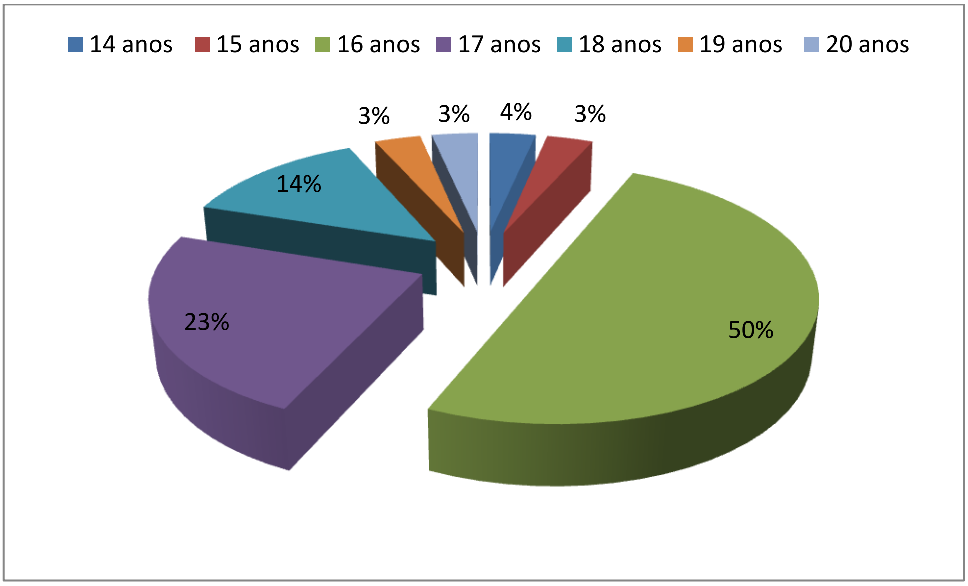
Assim, iniciaremos apresentando o perfil do sexo e idade dos alunos. A idade dos alunos consultados estava entre 14 e 21 anos, sendo a sua maioria homens com 16 anos, como pode ser observado na tabela e no gráfico abaixo:

Quadro 4: Idade dos alunos

Idade	Quantidade
14	1
15	1
16	15
17	7
18	4
19	1
20	1
Total	30

Fonte: Pesquisa de Campo (Agosto de 2017)

Gráfico 5: Percentual de alunos em relação a sua idade no Experimento



Fonte: Pesquisa de Campo (agosto 2017)

Dos 30 alunos consultados 20 eram do sexo masculino e 10 feminino no qual se encontraram entre 14 e 20 anos.

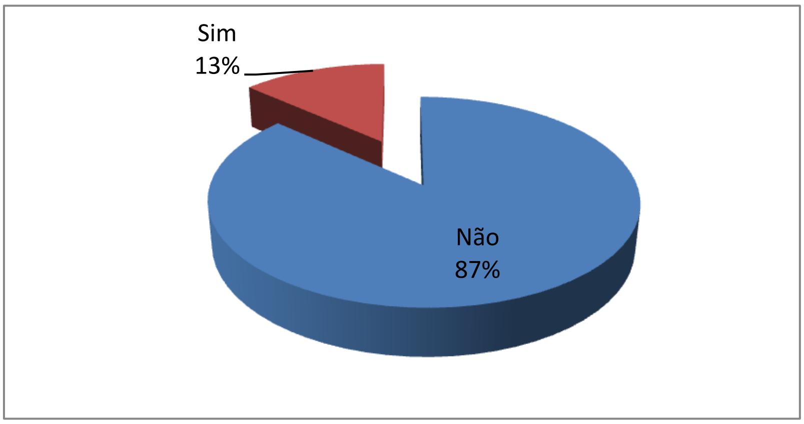
Quadro 5: Sexo dos alunos

Gênero	Qtd
Masculino	20
Feminino	10
Total	30

Fonte: Pesquisa de Campo (Agosto de 2017)

Quando perguntados sobre ter repetido alguma série no Ensino Médio ou ficado em dependência em Matemática, verificou-se que apenas 4 alunos repetiram de ano ou ficaram em dependência em matemática, o restante seguia o Ensino Médio regularmente, como se observa no gráfico a seguir:

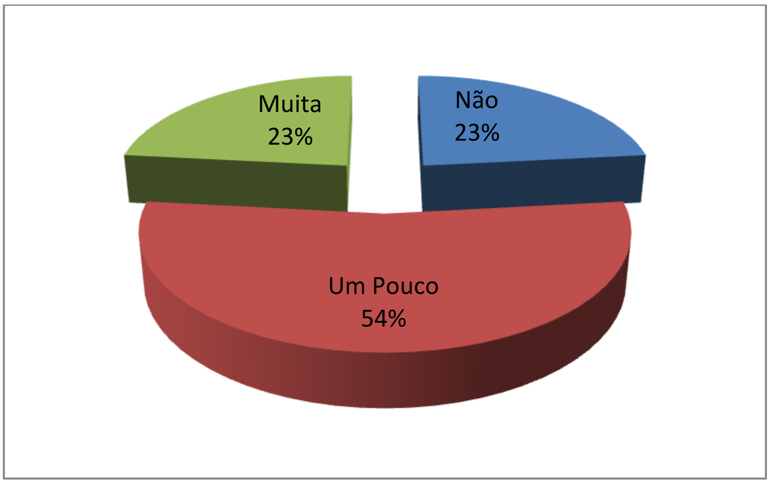
Gráfico 6: Relato de repetição de série no EM



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Quando perguntado também se tinham dificuldade para aprender Matemática, 54% disseram sentir pelo menos um pouco de dificuldade, 23% diziam sentir muita dificuldade e 23% afirmaram não sentir dificuldade para aprender Matemática, como mostra o gráfico a seguir:

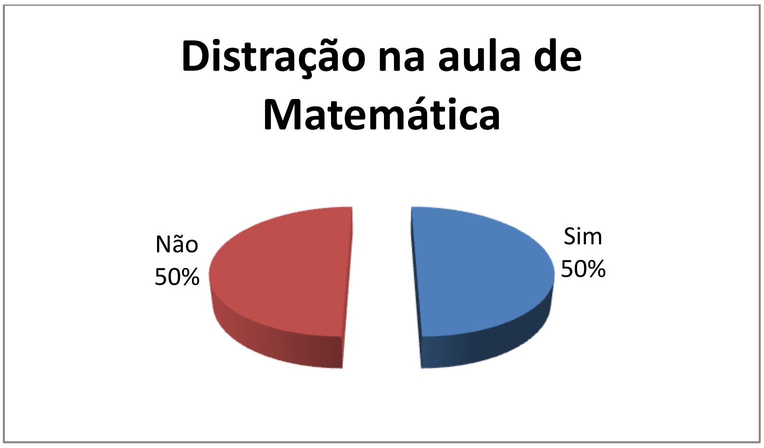
Gráfico 7: Dificuldades em aprender Matemática.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Também quando foi perguntado sobre a distração na aula de matemática, a metade, ou seja, 50% se distrai na aula de matemática e segundo o relato dos próprios alunos, a maioria das vezes se dá pelo comportamento de seus companheiros, isto é, conversam muito entre si e isso acaba contribuindo para a atenção nas aulas. Pensando nisso criamos as atividades para serem feitas em duplas ou em trios, com o propósito de aperfeiçoar a concentração nas atividades e o fortalecer o conhecimento através do trabalho em equipe. Os outros 50% não se distrai nas aulas de Matemática, nos levando a crer que o gosto em aprender matemática, demonstradas no gráfico anterior, poderia estar relacionado a esta não distração durante as aulas, conforme o gráfico a seguir:

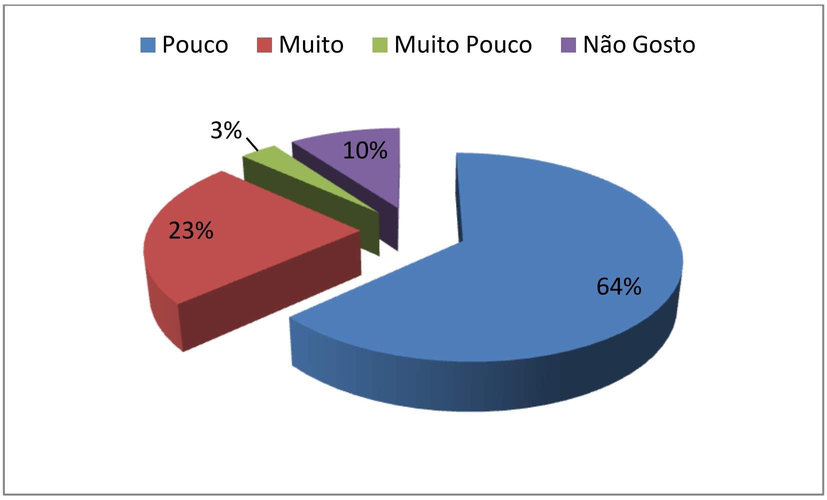
Gráfico 8: Distração na aula de Matemática.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Sobre o gosto por Matemática, a maioria 64% gosta pouco de Matemática, 3% gosta muito pouco de Matemática, 10% não gostar, essa negativa pode ser justificada pela falta de atenção de alguns alunos como mostra o gráfico 6, ou até mesmo pela forma como são ensinados alguns conteúdos de Matemática. Além disso, 23% gosta muito de Matemática, como mostra o gráfico a seguir:

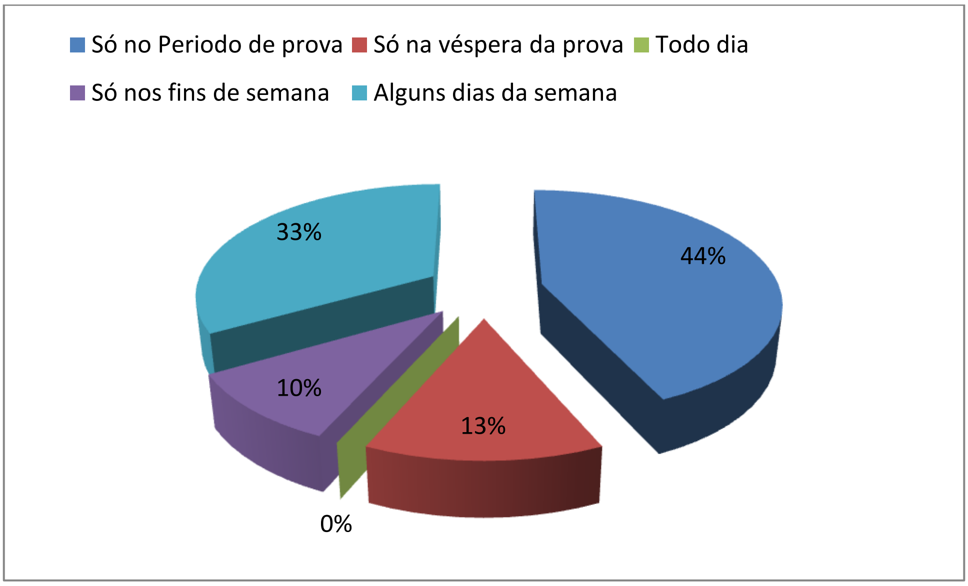
Gráfico 9: Gosto pela Matemática.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Outra situação bastante relevante e que pode está diretamente relacionado ao rendimento escolar e especial a Matemática é o tempo de estudo que esses alunos dedicam. O Gráfico a seguir apresenta as respostas dos alunos a essa questão mostrando que 44% estudam só no período da prova; Essa constatação pode ser justificada, parcialmente, pela dificuldade em se aprender matemática ou se concentrar no estudo, como enfatizado pelos alunos anteriormente. Também 33% dos alunos estudam Matemática alguns dias da semana, maioria apenas 2 dias; 10% só nos fins de semana, 13% só na véspera e nenhum aluno estuda todo dia, conforme o gráfico a seguir.

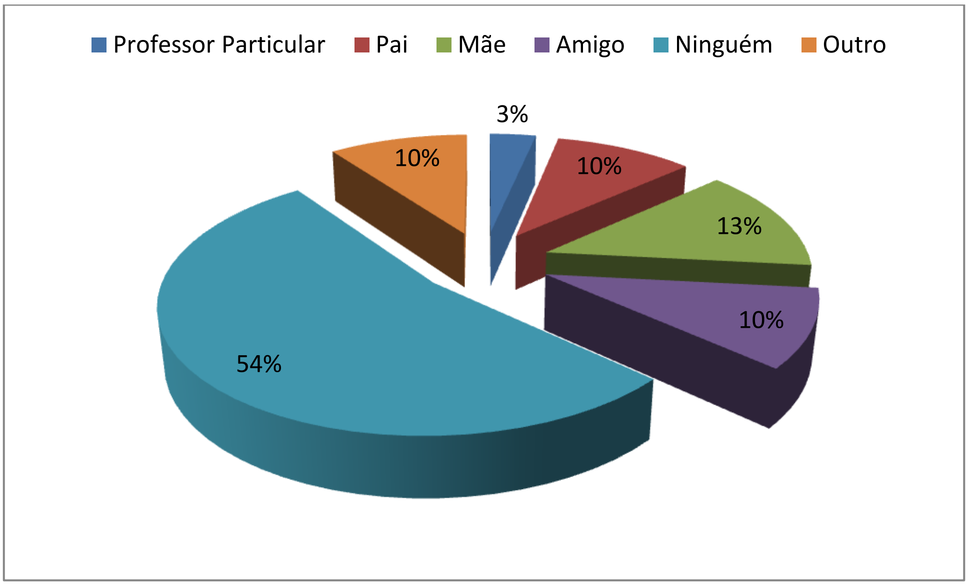
Gráfico 10: Tempo de Estudo.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Os alunos foram perguntados também sobre quem lhe ajudava nas tarefas de Matemática. Dos 30 alunos que contribuíram, a grande maioria 54% informava que não recebia ajuda de ninguém nas tarefas, 13% recebia a ajuda da mãe, 10% recebia a ajuda do pai, 10% de amigo, 3%, ou seja, um aluno recebe a ajuda de um professor particular e 10% de outra; observa-se ainda que nenhum aluno dessa pesquisa tenha a ajuda do irmão ou namorado.

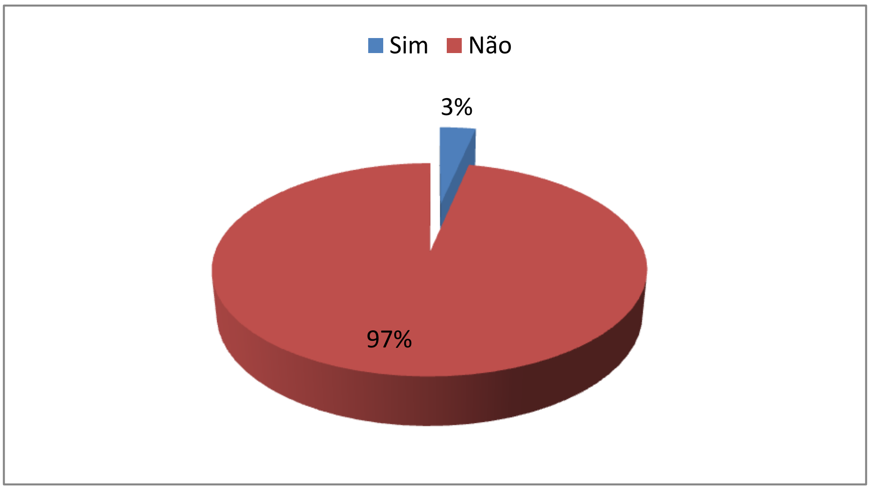
Gráfico 11: Auxílio nas tarefas de Matemática.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Quanto à proximidade da escola vale aqui o registro que apenas um aluno, 3%, mora perto da escola, esse fato se dá por está localizado no centro da cidade e o transporte é fácil, isso atrai muitos alunos da periferia e do interior da cidade. Observa-se ainda que, como a maioria dos alunos mora nesse centro e possui um poder aquisitivo maior preferem as escolas particulares também localizadas no centro da cidade.

Gráfico 12: Escola perto de casa.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Também nos interessava saber se os alunos viviam sobre a responsabilidade dos pais, constatou-se que a maioria 80% tem o pai como responsável masculino e 87% de Mãe como responsável Feminino; do quadro 06, 17% não possui nenhum homem como responsável por eles e 3% outros; nota-se ainda que Tio, Avó e irmão não tiveram 0% na pesquisa; do quadro 04, 7% tem a Avó como responsável Feminino, 3% não tem e 3% possui outros responsável feminino, como mostra os quadros abaixo:

Quadro 6: Responsável Masculino.

Responsável Masculino	
Pai	24
Não Tenho	5
Outros	1
TOTAL	30

Fonte: experimento (Agosto de 2017).

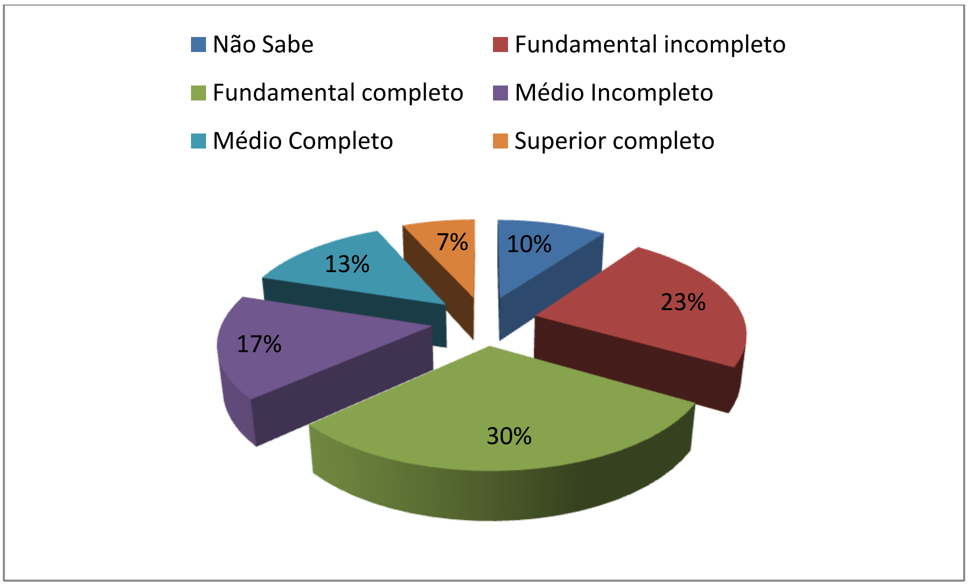
Quadro 7: Responsável Feminino.

Responsável Feminino	
Mãe	26
Avó	2
Não Tenho	1
Outros	1
TOTAL	30

Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Importante também saber a escolaridade desses responsáveis, a fim de verificar os exemplos visualizados pelos alunos quanto a perspectiva familiar. Verificamos com esse questionamento que 23% dos responsáveis masculinos não haviam concluído o ensino fundamental; 13% haviam concluído o ensino médio e 7% tinha curso superior, conforme o gráfico a seguir.

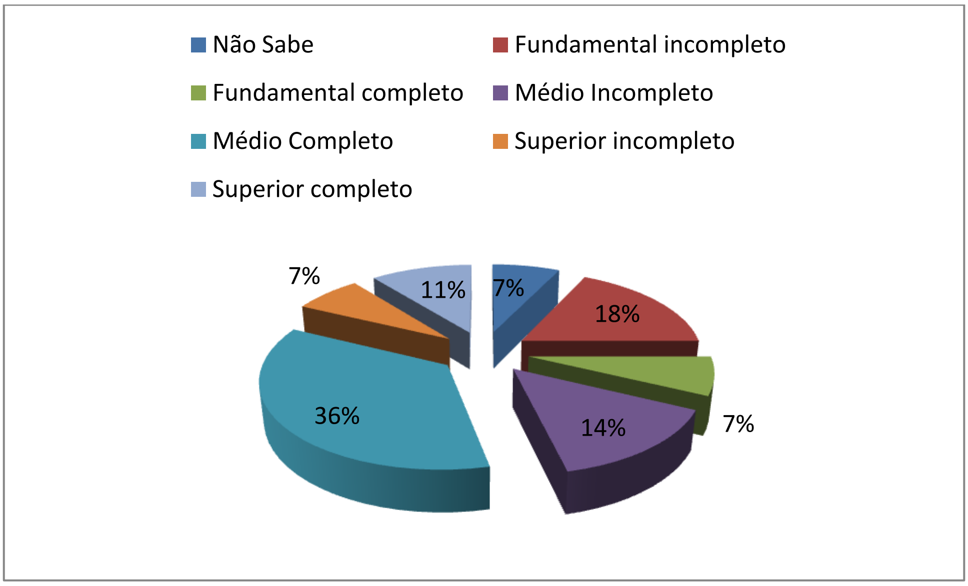
Gráfico 13: Responsável Masculino.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Quanto a escolaridade dos responsáveis Femininos observa-se que 18% não possui o ensino fundamental; 36% havia concluído o Ensino Médio; 7% estão cursando ainda o ensino superior; 11% já concluíram o Ensino Superior e os demais pode ser observados no gráfico a seguir:

Gráfico 14: Responsável Feminino.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Depois de serem feitos os questionamentos sobre o perfil pessoal dos alunos, entendemos que seria igualmente importante conhecer a metodologia utilizada pelo professor de Matemática dessa turma, por exemplo, se o professor utiliza recursos computacionais em suas aulas. A resposta foi unânime, ou seja, 97% informaram que não, apenas um aluno, isto é, 3% disseram que sim.

Essa situação pode ser considerada uma falha metodológica para um grande número de especialista na área, entretanto temos que observar o contexto e a realidade da escola. Pelo que podemos observar nessa primeira etapa de pesquisa, a sala de aula não tem um local apropriado para a utilização de um computador, por exemplo, o professor teria que trazer basicamente todo material de casa, uma vez que a escola dispõe de poucos materiais que ficam normalmente no laboratório de informática e o mesmo não comporta uma turma como essa do 2º ano.

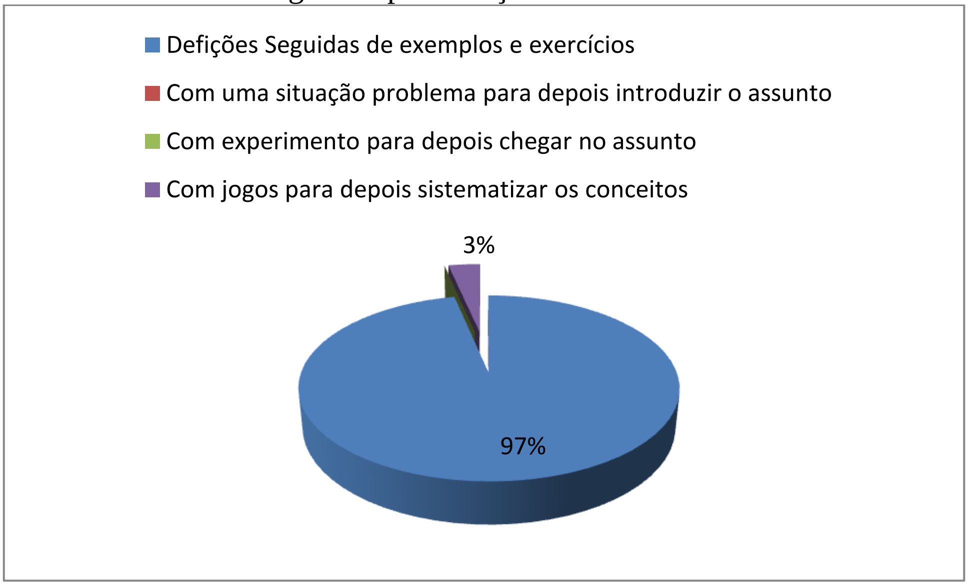
Assim, confirmamos, na prática, o que nos revela Penteado apud (1999):

> De maneira geral o professor enfrenta desafios impostos por sua profissão e com isso busca criar alternativas, porém colocar computadores na escola modifica os padrões que usualmente vem sendo desenvolvido na sua prática. São modificações no âmbito das emoções, das relações e condições de trabalho, da dinâmica da aula, da adaptação do currículo, entre outras. (p.298).

Dessa maneira entendemos as dificuldades enfrentadas pelos professores e não podemos afirmar que essa não utilização de recursos computacionais refere-se à ausência de compromisso com as possibilidades que temos quantos aos recursos disponíveis, pois não é simples nem fácil desenvolver as atividades computacionais e tecnológicas em sala de aula.

Mais um questionamento ainda relacionado à metodologia do Ensino do educador, referi-se a apresentação de um conteúdo novo. A resposta apresentada foi mais uma vez unânime, ou seja, 97% pela definição seguida de exemplos e apenas 1 aluno, 3% relatou que é com jogos para depois sistematizar os conceitos.

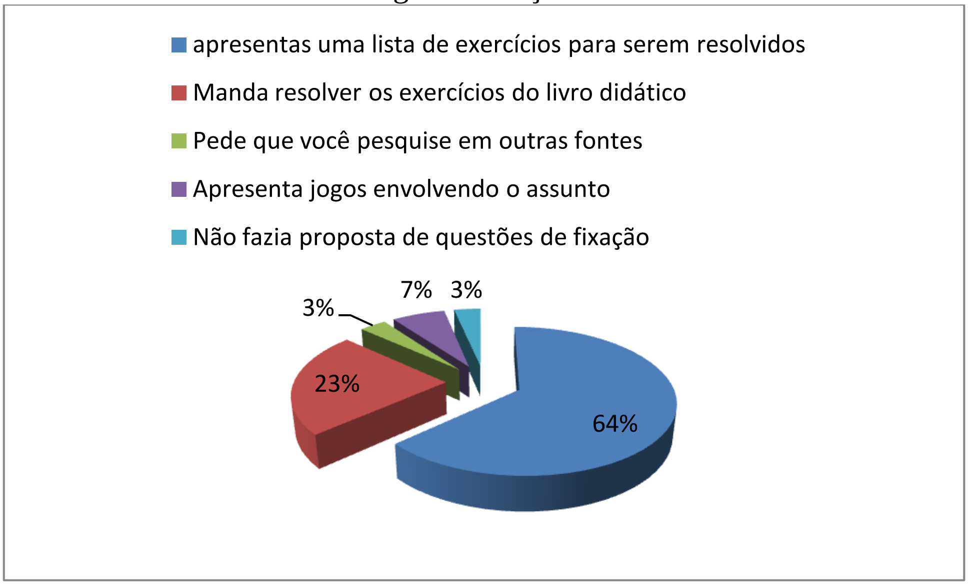
Gráfico 15: Metodologia de apresentação de conteúdo novo de Matemática.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Outra abordagem que feita foi sobre a apresentação de conteúdos privilegiados e abordados pelo professor de Matemática dessa turma. Nessa questão 64% dos alunos informaram que o professor apresentava apenas lista de exercícios; enquanto que 23% informaram que o professor manda resolver exercícios do livro didático, as demais formas de fixação dos conteúdos são mostradas a seguir.

Gráfico 16: Sobre a Metodologia de fixação de conteúdo.



Fonte: experimento (Agosto de 2017).

Direcionamos nosso estudo com experimento, sem o uso de tecnologia, pois a escola que está sendo feita o experimento não atende por completo todo aparato que necessitamos, assim fizemos uma atividade para cada encontro direcionada aos alunos de modo que as atividades contemplem os requisitos necessários para um bom estudo e que atenda de maneira satisfatória e acessível todos os alunos. Privilegiamos o estudo da descoberta, por entender que o aluno através de observações formule a sua própria ideia, que ele seja capaz de generalizar e conclui situações diferentes do habitual. Focalizamos também nos exercícios de aprofundamento, cobrado nos principais vestibulares e centros de seleções, por entender que é de fundamental importância saber relacionar o conteúdo estudado com o cobrado nesses grandes centros.

Assim, a apresentação das próximas sessões de ensino, privilegiará a descrição das atividades, bem como nossa estratégia didática utilizada, cada uma em seu encontro específico.

Quadro 8- Atividades desenvolvidas

DATAS	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS
24/08/17	Questionário Sócio- Econômico Aplicação do Pré-teste
25/08/17	Atividade 1: Ideia de Volume Questões de Aprofundamento
29/09/17	Atividade 2: Unidade de medida Questões de Aprofundamento Atividade 3: Volume do Paralelepípedo Questões de Aprofundamento
06/10/17	Atividade 4: Volume do Cubo Questões de Aprofundamento
13/10/17	Atividade 5: Volume do Prisma Questões de Aprofundamento
19/10/17	Atividade 6: Volume da Pirâmide Questões de Aprofundamento
20/10/17	Atividade 7: Volume do Cilindro Questões de Aprofundamento
26/10/17	Atividade 8: Volume da Cone Questões de Aprofundamento
09/11/17	Atividade 9: Volume da Esfera Questões de Aprofundamento
16/11/17	Revisão dos conteúdos Exercícios de Revisão
17/11/17	Aplicação do Pós- Teste

Fonte: Pesquisa de Campo (2017)

Sessão de aprendizagem experimental: Ideia de volume

Depois do pré- teste, dia 25 de agosto, iniciamos nossa primeira atividade com a atividade1que dá ideia de volume, nesse dia contamos com a presença de 29 alunos que foram divididos em duplas e em trio, era uma atividade simples, porém muito importante para o aprendizado e que servia de base para todas as outras atividades, o objetivo dessa atividade era que os alunos tivessem ideias matemática de volume e como relacioná-las em situações do cotidiano. Era uma turma muita agitada, mas bastante receptiva que contribuíram muito para o êxito dessa atividade.

Assim que os alunos se organizaram, foram orientados sobre como seria a atividade, formaram-se 13 duplas e um trio, e iniciou a atividade ás 10h50minutos, foi uma atividade simples e pouco depois de 15 minutos a primeira dupla já havia terminado a primeira parte da atividade, faltando apenas o exercício de aprofundamento. Poucos minutos depois as outras equipes também terminaram a primeira parte. Ás 11h20minutos a primeira equipe terminou toda atividade e as 11h45minutos todos terminaram o experimento.

A ideia para esse trabalho era eles compararem diferentes tipos de sólidos geométricos, relacionando qual deles ocuparia mais espaço, também tinha um texto de apoio com a ideia de como surgiu o metro cúbico no decorrer dos anos em diferentes civilizações. Era uma atividade que serviria também para ganhar a confiança dos alunos, por ser uma atividade simples e de fácil compreensão.

A seguir, Destacamos algumas conclusões a respeito da atividade com a ideia de volume, algumas duplas não conseguiram desenvolver suas observações e deixaram em branco suas conclusões, mas conseguiram com êxito resolver as questões de aprofundamento.

Quadro 9: Resposta dos Alunos sobre a ideia de volume.

ALUNO	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 1)	ÁNALISE
A14 e A21	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? Sim O que é o volume de um corpo? É o espaço ocupado por um cubo unitário.	Conclusão válida sobre ideia de Volume
A17 e A19	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? Sim por que eles tem espaços proporcionais O que é o volume de um corpo? A cuantidade de materia existente em um corpo	Conclusão válida sobre ideia de Volume
A24 e A29	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? É IGUAL O SEU VOLUME O que é o volume de um corpo? NÃO SEI ACHO QUE O ESPAÇO DO CUBO	Conclusão parcialmente válida sobre ideia de Volume

A22 e A26	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? o com maior volume o que ocupa mais volume no espaço O que é o volume de um corpo? e tudo o Que ocupa espaço na atmosfera	Resposta sobre quem ocupa mais espaço e Conclusão válida sobre ideia de Volume
A3 e A7	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? Sim. Espaço e volume tem a mesma capacidade O que é o volume de um corpo? É a quantidade de matéria que se obtem em um corpo	Conclusão válida sobre ideia de Volume
A4 e A11	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos tem maior volume? Sim são equivalentes. O que é o volume de um corpo? É o espaço ocupado por um corpo	Conclusão válida sobre ideia de Volume

A15 e A30	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos tem maior volume? os dois tem o mesmo tamanho *Os dois tem o mesmo tamanho* O que é o volume de um corpo? quantidade de gordura que te dentro dhe uma pessoa. *Quantidade de gordura que tem dentro de uma pessoa*	Conclusão válida sobre ideia de Volume
A12 e A23	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? segundo cubo, O que é o volume de um corpo? é quantos metros esse corpo mede.	Conclusão parcialmente válida sobre ideia de Volume

A18 e A28	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? O que é o volume de um corpo? O segundo cubo; Sim o volume de um corpo é	Conclusão inválida sobre ideia de Volume
A8 e A10	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos tem maior volume? O que é o volume de um corpo? TUDO AQUILO QUE OCUPA ALÉM DO CORPO	Conclusão parcialmente válida sobre ideia de Volume
A1 e A16	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? ??? O que é o volume de um corpo? O volume é o que ocupa mais espaço.	Conclusão parcialmente válida sobre ideia de Volume

A20 e A21	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a perg... tem maior volume? Sim O que é o volume de um corpo? é o espaço ocupado por cada cubinho de medida 1.	Conclusão válida sobre ideia de Volume
A6 e A9	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? Não; Porque o volume e mais pesado. O que é o volume de um corpo? Onde há maior espaço onde cabe mais coisas.	Conclusão parcialmente válida sobre ideia de Volume
A2, A5 e A13	A pergunta: Qual dos cubos ocupa mais espaço? É equivalente a pergunta: Qual dos cubos tem maior volume? SIM AMBOS TEM A MESMA CAPACIDADE O que é o volume de um corpo? É UM VALOR QUE PODE SE MEDIDO E OCUPA LUGAR NO ESPAÇO.	Conclusão válida sobre ideia de Volume

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 10: Síntese das conclusões da atividade sobre ideia de volume

Conclusões	Frequência	%
Válida	**17**	**59**
Parcialmente válida	**10**	**34**
Inválida	**2**	**7**

Fonte: Experimentação (2017)

Sessão de aprendizagem: Unidade de Volume e Volume de um Paralelepípedo

O Experimento realizado no dia 28.09.17, ocorreu em duas etapas: a primeira etapa foi sobre as principais unidades de volume; e a segunda foi sobre o cálculo de volume de um paralelepípedo.

A atividade sobre estudo das principais unidades de volume foi feita por 25 alunos, no qual foram organizados em duplas e trio; o propósito dessa atividade era para que o aluno conhecesse essas medidas e conseguisse transformar em outra unidade imediatamente superior ou inferior a essa unidade, através de um roteiro contendo varias atividades que relacionavam múltiplos e submúltiplos do metro cúbico.

Os alunos de uma maneira geral foram bem, houve alguns casos em que eles tiveram dificuldade em compreender o que era aresta e face de um cubo, mas esclarecermos essas dúvidas. Quanto ao desenvolvimento e o trabalho em duplas, eles conseguiram concluir bem a atividade e também os exercícios de aprofundamento, algumas perguntas foram feitas pelos alunos, uma delas é "sempre vai ser multiplicado ou dividido por mil, para se transformar uma atividade de volume". Intervimos nessa pergunta e esclarecemos suas dúvidas a esse respeito.

Ainda sobre a atividade com a unidade de volume, ao concluir a sequencia, solicitamos que os alunos fizessem a conclusão no final do roteiro e respondessem ao exercício de aprofundamento que era composta por questões objetivas e discursivas. A questão que eles tiveram mais dúvida foi à questão número 2 do exercício de aprofundamento, que pedia para encontrar o valor de x, como mostra a baixo:

"O tanque de combustível de um veículo contém 10,006 m³ de gás. Nessas condições, é correto dizer que o tanque contém 10 m³ mais X cm³ de gás, em que X é igual a:"

O que se observou foi que a dificuldade encontrada nessa questão era saber interpretar o valor do x (orientamos a esse respeito), o resto era o propósito do exercício que consistia em transformar a unidade de volume.

Essa atividade que teve início às 8h30min (uma professora desse horário cedeu suas aulas) e durou 1h20min aproximadamente, a primeira dupla a entregar a atividade demorou 55 minutos aproximadamente. Todas as duplas conseguiram concluir a atividade e o exercício de aprofundamento. Vejamos algumas conclusões feitas pelos alunos:

Quadro 11: Resposta dada pelos alunos sobre as unidades de medidas

ALUNO	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 2)	ÁNALISE
A15 e A29	Descubra uma maneira prática de transformar as unidades de medida de volume. O metro cúbico é multiplicado ou dividido por 1000. Conclusão da direita pra esquerda divide por 1000. Da esquerda para a direita multiplica por 1000.	Conclusão válida unidade de Volume
A2 e A26	Descubra uma maneira prática de transformar as unidades de medida de volume. TOMANDO COMO REFERENCIA O METRO Conclusão AS UNIDADES DA DIREITA SAO MULTIPLICADAS POR MIL E OS NA ESQUERDA SÃO DIVIDAS POR MIL.	Conclusão válida unidade de Volume
A4 e A9	Descubra uma maneira prática de transformar as unidades de medida de volume. ? ? ? Conclusão Tudo depende da ordem	Conclusão inválida unidade de Volume

A14 e A17	**Conclusão** Da direita para esquerda dividi por mil Da esquerda para direita multiplica por mil *Da direita para a esquerda divide por 1000* *Da esquerda para direita multiplica por 1000*	Conclusão parcialmente válida sobre unidade de Volume
A12,A28	**Conclusão** Da direta pra esquerdo ÷1000 Da esquerda pra direita x 1000 *Da direita para a esquerda **:** por 1000* *Da esquerda para direita **x** por 1000*	Conclusão parcialmente válida sobre unidade de Volume
A10, A13 e A22	**Descubra uma maneira prática de transformar as unidades de medida de volume.** Observando as casas das medidas **Conclusão** verifica que se transforma andando as casas da direita pra esquerda (:1000) da esquerda pra direita (x1000)	Conclusão válida sobre unidade de Volume

A8 e A24	Descubra uma maneira prática de transformar as unidades de medida de volume. Observa-se a unidade Conclusão Divide por 1000 ou Multiplica por 1000	Conclusão válida sobre unidade de Volume
A5 e A11	Conclusão Divide pra esquerda e multiplica pra direita *Divide pra esquerda e multiplica pra direita*	Conclusão parcialmente válida sobre unidade de Volume
A6 e A19	Conclusão é que para fazer o calculo tanto tem a divisão. quanto a multiplicacão *É que para fazer o calculo tanto tem a divisão quanto a multiplicação*	Conclusão parcialmente válida sobre unidade de Volume
A16 e A1	Conclusão do direito pro esquerdo, do esquerdo pro direito / divide por 1000 *Da direita pra esquerda, da esquerda pra direita e divide por 1000*	Conclusão parcialmente válida sobre unidade de Volume

A7 e A30	**Conclusão** Da direita para esquerda multiplica por 1000. DA esquerda para a direita multiplica por 1000 *Da direita para a esquerda multiplica por 1000* *Da esquerda para direita multiplica por 1000*	Conclusão parcialmente válida sobre unidade de Volume
A3 e A18	Descubra uma maneira prática de transformar as unidades de medida de volume. QUANDO SE TA EM M³ **Conclusão** DIVIDE OU MUITIPLICA POR 1000	Conclusão válida unidade de Volume

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 12: Síntese das conclusões da atividade sobre unidade de volume

Conclusões	Frequência	%
Válida	**11**	**44**
Parcialmente válida	**12**	**48**
Inválida	**2**	**8**

Fonte: Experimentação (2017)

A terceira atividade desse dia foi o cálculo do volume do paralelepípedo retângulo, essa atividade teve a participação de 25 alunos e teve início às 10h10min, depois do intervalo do recreio deles. Quatro alunos se ausentaram durante essa atividade sem justificativa apresentada, fizeram apenas o processo de descoberta de fórmula, mas os exercícios de aprofundamento deixaram em branco.

Organizados também em duplas, iniciamos nossa atividade solicitando que sentassem e se organizassem. Apresentamos a eles o roteiro da atividade que consistia em preencher uma tabela visualizando num quadro de paralelepípedo o comprimento, a largura, a altura e o volume de cada figura.

Começamos a atividade esclarecendo aos alunos o propósito e o preenchimento da tabela, assim como as observações e conclusões que eles fariam. Os alunos ficaram atentos e discutiam entre si o trabalho; a primeira dúvida de alguns deles era distinguir comprimento, largura, altura e volume, foram orientados a esse respeito e pouco tempo depois, cerca de 20 minutos, a primeira dupla já tinha preenchido a tabela. Solicitamos que fizesse as observações e escrevesse a fórmula.

Alguns minutos depois todas as duplas já tinham preenchidos a tabela e feito suas observações e conclusões. Nesse ponto do experimento visualizamos postura diversa entre os alunos, ou seja, alguns respondiam que bastava contar os cubinhos menores, outros que tentaram adivinhar os resultados e preencheram errado a tabela, não fazendo correto a conclusão, mas a maioria conseguiu observar a regularidade entre comprimento, largura e altura, chegando a uma conclusão correta, vejamos algumas descobertas feitas por eles:

Quadro 13: Conclusão de um aluno da turma do 2º ano sobre volume de um paralelepípedo.

<table>
<tr><th>ALUNO</th><th>OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 3)</th><th>ÁNALISE</th></tr>
<tr><td>A27 e
A12</td><td>
<table>
<tr><td>Medida do comprimento(c)</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Medida da largura(b)</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>8</td><td>8</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Medida da altura (a)</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>12</td><td>24</td><td>40</td><td>60</td><td>60</td><td>280</td><td>96</td><td>180</td><td>70</td><td>240</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: Multiplica-se as três dimensões.
FORMULA: V = a.b.c

Conclusão: multiplica as três dimensões
Fórmula:V=a.b.c
</td><td>Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>A6 e A20</td>
<td>
<table>
<tr><td>Medida do comprimento(c)</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Medida da largura(b)</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>8</td><td>8</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Medida da altura (a)</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>12</td><td>24</td><td>40</td><td>60</td><td>60</td><td>280</td><td>96</td><td>180</td><td>70</td><td>48</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: PRA ACHA O VOLUME, PRECISA APENA MULTIPLICAR A, B E C.
FORMULA: V=A.b.C

Conclusão: para achar o volume, precisa apenas multiplicar a, b e c.

Fórmula:V=a.b.c
</td>
<td>Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.</td>
</tr>
<tr>
<td>A5 e A2</td>
<td>CONCLUSÃO: multiplica o comprimento pela altura e pela largura vai encontra o volume.
FORMULA: C.l.A = V</td>
<td>Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.</td>
</tr>
<tr>
<td>A16 e A10</td>
<td>Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: Altura . comprimento . largura = volume
FORMULA: C.b.a=V</td>
<td>Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.</td>
</tr>
<tr>
<td>A23 e A13</td>
<td>Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: o comprimento x a largura x a altura = ao volume
FORMULA: C x b x a = V</td>
<td>Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.</td>
</tr>
</table>

A17, A1 e A29	**Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!** **CONCLUSÃO:** multiplica o C pelo a e b **FORMULA:** C X A X b	Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.
A21 e A30	**Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!** **CONCLUSÃO:** Somando e multiplicando os cubos **FORMULA:** ~~A X~~ A. B. C	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de um Paralelepípedo.
A7 e A19	**Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!** **CONCLUSÃO:** Altura x Comprimento x Largura x Volume **FORMULA:** (c) . (b) . (a) = (v) *Conclusão: multiplica as três dimensões* *Fórmula:(a) .(b).(c)=(V)*	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de um Paralelepípedo.
A15 e A8	**Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!** **CONCLUSÃO:** Multiplique o lado A, pelo lado b, e pelo lado c. **FORMULA:** A.B.C	Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.
A22 e A24	**Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!** **CONCLUSÃO:** MULTIPLICANDO O COMPRIMENTO VEZES A LARGURA VEZES A ALTURA. OBTEMOS O VOLUME **FORMULA:** A.B.C = V *Conclusão: multiplicando o comprimento vezes a largura vezes altura, obtemos o volume.* *Fórmula: A. B. C = V*	Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.

A25 e A14	**Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!** **CONCLUSÃO:** É só multiplicar comprimento vezes largura e altura **FORMULA:** $\boxed{V=a.b.c}$	Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.
A28 e A4	**Descubra uma maneira de determinar o volume de um paralelepípedo sem contar os cubinhos!** **CONCLUSÃO:** para descobrir o volume é só multiplicar, altura, largura, e comprimento **FORMULA:** $V=a.b.c$	Conclusão válida sobre Volume de um Paralelepípedo.

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 14: Síntese das conclusões da atividade sobre volume de um Paralelepípedo

Conclusões	**Frequência**	**%**
Válida	**21**	**84**
Parcialmente válida	**4**	**16**
Inválida	**0**	**0**

Fonte: Experimentação (2017)

Nesse instante definimos no quadro o volume para qualquer paralelepípedo retângulo, pouco depois, com aproximadamente 57 minutos, todos já tinham concluídos a atividade, inclusive os exercícios de aprofundamento também o qual também discutimos as questões de aprofundamento, tiramos algumas dúvidas de algumas questões como à mostrada a seguir:

"Um caminhão tem carroceria com 3,40 metros de comprimento, 2,50 metros de largura e 1,20 metros de altura. Quantas viagens devem-se fazer, no mínimo, para transportar 336 metros cúbicos de arroz?"

Essa questão eles calcularam facilmente o volume da carroceria desse caminhão, a questão aí foi principalmente duas interpretações das respostas, ou seja, dividir 336 pelo volume encontrado da carroceria, 10,2 metros cúbicos, o resultado foi 32,94 metros cúbicos aproximadamente. Daí interpretar esse resultado para 32 ou 33 viagem. Intervimos nessa questão dando alguns exemplos.

Outra questão bastante trabalhosa para esses estudantes foi a questão número 9, vejamos:

Nos Correios, são utilizados vários tipos de caixas para o envio de encomendas, entre elas, a caixa do tipo 4B, um paralelepípedo retângulo, em papel ondulado, com arestas medindo 360 mm, 270 mm e 180 mm. O volume dessa caixa, em dm³, é:

De uma maneira geral os alunos concluíram bem a atividade, tiveram uma boa produção e a aprendizagem ficou interativa, dinâmica e que cada aluno participou de alguma forma para o conhecimento do cálculo de volume de paralelepípedo além de conhecerem também, as unidades de medidas.

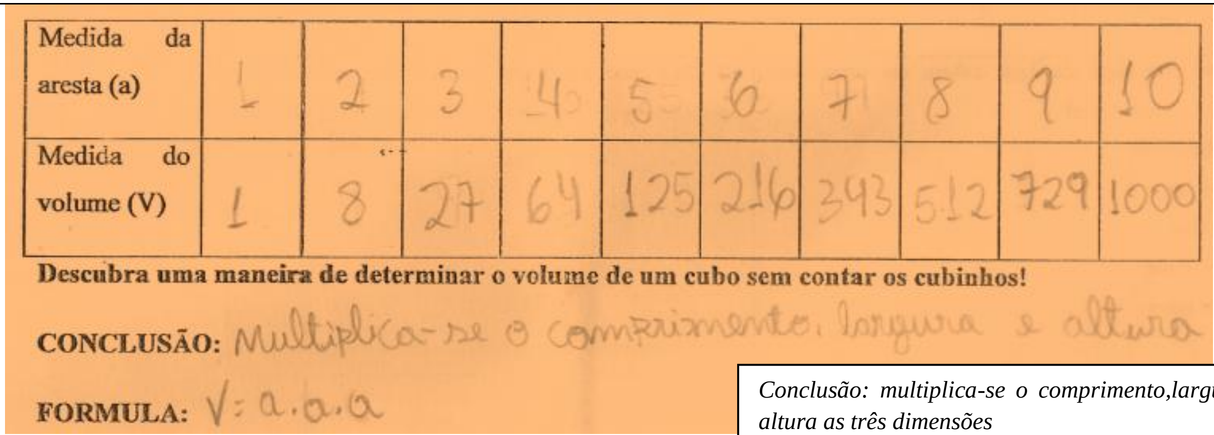
Sessão de aprendizagem: Volume de um cubo

Numa quinta feira do dia 06.10.17, às 10h, iniciamos nossa quarta atividade que foi Cálculo de Volume de um cubo. Essa atividade contou com a presença de 14 alunos (houve um impasse se haveria aula ou não nesse dia, por isso muitos faltosos) que foram distribuídos em sete duplas. Nossa proposta de trabalho para essa atividade prescindia de uma postura, mais observadora e ativa desses alunos, desse modo nos organizamos para conduzir bem a atividade.

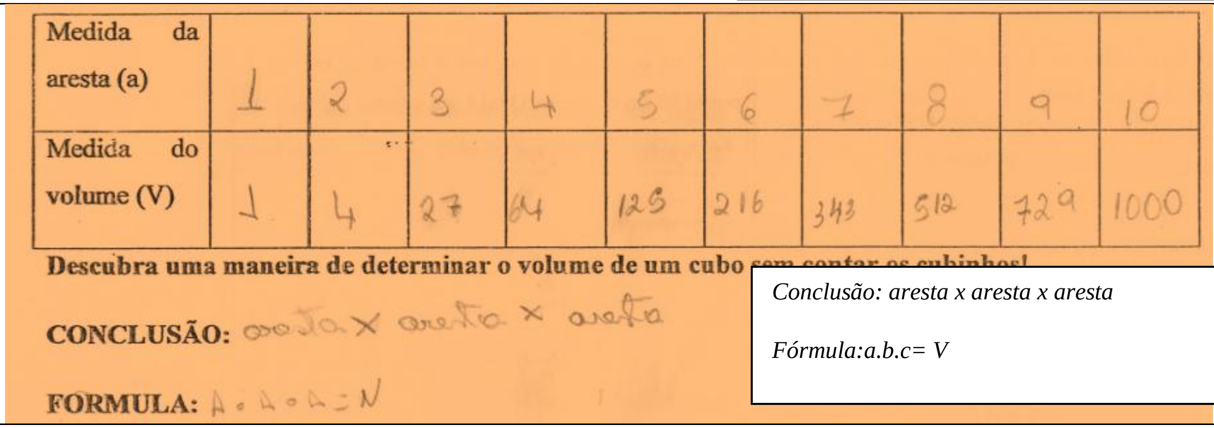
Assim que organizados, fizemos a socialização da atividade anterior, que foi volume de um paralelepípedo e questionamos se eles poderiam dar algum exemplo de objetos que lembrava um paralelepípedo, muitos deram exemplos claros como o tijolo, caixa de sapato etc., também foi perguntado como se calcula o volume de um paralelepípedo? A maioria respondeu multiplicando o comprimento, a largura e a altura; outros multiplicando os lados, então avançamos e apresentamos o cubo a eles.

Iniciamos a atividade, explicando o roteiro aos alunos e como seria o desenvolvimento de suas tarefas. Surgiram algumas perguntas sobre o que era aresta? Qual das medidas eram as arestas o comprimento, a largura ou a altura? Esclarecemos essas dúvidas e os alunos começaram a fazer a atividade. Muitos deles usaram a ideia da atividade anterior de multiplicar os lados, outros fizeram a contagem dos cubinhos menores, mas todos conseguiram preencher a tabela, muitos deles com a ajuda da calculadora do celular. Vejamos a seguir, algumas descobertas feitas pelos alunos pelos alunos.

Quadro 15: Conclusão de um aluno da turma do 2º ano sobre volume de um cubo.

<table>
<tr><th>ALUNO</th><th>OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 4)</th><th>ÁNALISE</th></tr>
<tr><td>A15 e A27</td><td>
<table>
<tr><td>Medida da aresta (a)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>64</td><td>125</td><td>216</td><td>343</td><td>512</td><td>729</td><td>1000</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um cubo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: Multiplica-se o comprimento, largura e altura
FORMULA: V= a.a.a

Conclusão: multiplica-se o comprimento,largura e altura as três dimensões

Fórmula:V=a.b.c</td><td>Conclusão válida sobre Volume de um Cubo.</td></tr>
<tr><td>A7 e A24</td><td>
<table>
<tr><td>Medida da aresta (a)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>1</td><td>4</td><td>27</td><td>64</td><td>125</td><td>216</td><td>343</td><td>512</td><td>729</td><td>1000</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um cubo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: aresta x aresta x aresta
FORMULA: A . A . A = V

Conclusão: aresta x aresta x aresta

Fórmula:a.b.c= V</td><td>Conclusão válida sobre Volume de um Cubo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>A5 e A13</td>
<td>
<table>
<tr><td>Medida da aresta (a)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>64</td><td>125</td><td>216</td><td>343</td><td>512</td><td>729</td><td>1.000</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um cubo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: Multiplica á aresta e o volume
FORMULA: V = a . a . a
</td>
<td>Conclusão válida sobre Volume de um Cubo.</td>
</tr>
<tr>
<td>A3 e A6</td>
<td>
<table>
<tr><td>Medida da aresta (a)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>64</td><td>125</td><td>116</td><td>373</td><td>528</td><td>220</td><td>1000</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um cubo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: Aresta x Afasse
FORMULA: A . F = V
</td>
<td>Conclusão válida Parcialmente sobre Volume de um Cubo.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>A20 e A9</td>
<td>
<table>
<tr><td>Medida da aresta (a)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>64</td><td>125</td><td>216</td><td>343</td><td>512</td><td>729</td><td>1000</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um cubo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: a aresta x a face é igual ao volume
FORMULA: a x f = V
Conclusão: a aresta x face é igual ao volume
Fórmula:a x f = V
</td>
<td>Conclusão válida Parcialmente sobre Volume de um Cubo.</td>
</tr>
<tr>
<td>A21 e A10</td>
<td>
<table>
<tr><td>Medida da aresta (a)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>36</td><td>49</td><td>64</td><td>81</td><td>100</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um cubo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: Primeiro achei a aresta e depois vezes outro e volume.
FORMULA: A.A.A = V
</td>
<td>Conclusão válida sobre Volume de um Cubo.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>A4 e A28</td>
<td>
<table>
<tr><td>Medida da aresta (a)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Medida do volume (V)</td><td>1</td><td>8</td><td>27</td><td>64</td><td>125</td><td>216</td><td>343</td><td>512</td><td>729</td><td>1000</td></tr>
</table>
Descubra uma maneira de determinar o volume de um cubo sem contar os cubinhos!
CONCLUSÃO: O VOLUME É A MULTIPLICAÇÃO DAS ARESTAS
FORMULA: VOLUME = ARESTA x ARESTA x ARESTA
</td>
<td>Conclusão válida sobre Volume de um Cubo.</td>
</tr>
</table>

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 16: Síntese das conclusões da atividade sobre volume de um cubo

Conclusões	**Frequência**	**%**
Válida	**10**	**72**
Parcialmente válida	**4**	**28**
Inválida	**0**	**0**

Fonte: Experimentação (2017)

Quanto à conclusão e a apresentação das fórmulas, pedimos aos alunos a refletirem sobre suas descobertas e compartilhe com os colegas, uma dupla informou que o volume de um cubo é a multiplicação de seus lados; perguntamos então aos demais alunos se concordavam, mostramos no quadro um cubo de lado 3 e um outro de lado **a,** indagamos "se fosse um paralelepípedo esse cubo de lado 3, qual seria o volume? E de lado **a** qual o volume?" a maioria concluiu que o volume de um cubo é a multiplicação de suas arestas, formalizando de acordo com suas concepções que a fórmula seria **a x a x a**.

Assim formalizamos a fórmula $V = a . a . a \Rightarrow V = a^3$ a partir de suas falas durante a interação. Aproveitamos para esclarecer que o cubo é um caso especial de paralelepípedo e seu comprimento, largura e altura possui a mesma medida que é chamada de aresta.

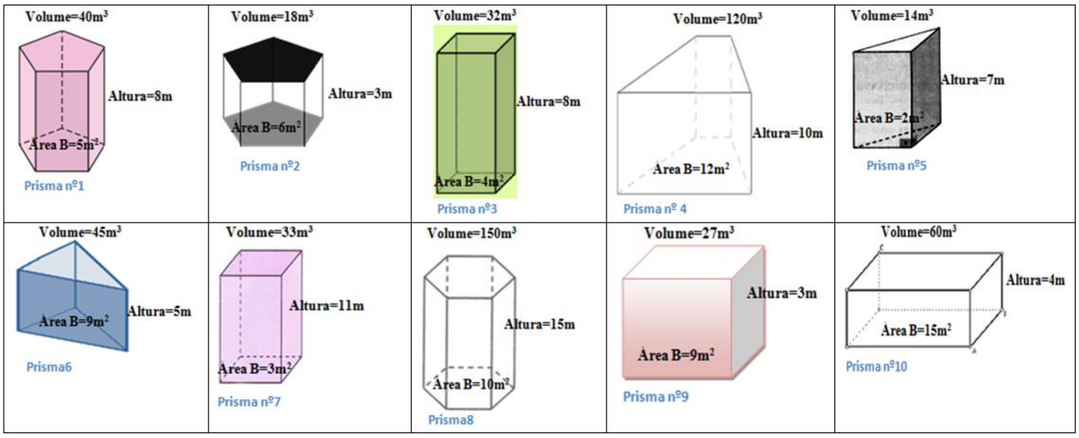
No exercício de aprofundamento, os alunos tiveram um bom desempenho, a dificuldade maior foi à questão da interpretação de texto, intervimos em algumas questões até que todos tivessem a compreensão sobre a maneira correta de resolver essas questões de forma satisfatória e eficiente.

Sessão de aprendizagem: Cálculo de Volume de um prisma

No dia 13/10/2017, as 10h20m e com apenas 6 alunos participantes do experimento damos inicio a quinta atividade, cálculo do volume de um prisma. A ausência dos alunos se justifica porque a escola estava em grave e o professor da turma retornou convocando seus alunos a retornarem as aulas dele e muitos não sabiam se haveria aula ou não, também no dia anterior era feriado nacional numa quinta feira e alguns não sabiam se haveria aula normal ou não.

Assim sendo nos propomos a fazer essa atividade, para que os alunos que apareceram não se sentirem desanimados por terem vindos e não ter tido aula alguma. O professor da turma me deixou a vontade, fez algumas anotações e direcionamos as instruções sobre a atividade aos alunos; depois de organizados foram formado três duplas e depois foram orientados sobre a atividade e o propósito da atividade e assim damos início à atividade.

A atividade consistia na visualização de dez prismas ordenados numa tabela com os valores da área da base, altura e volume e num preenchimento desses valores na tabela, como mostra as figuras a seguir:



Sólido	Área da base (A_b)	Altura (h)	Volume (V)
Pirâmide nº1			
Pirâmide nº 2			
Pirâmide nº 3			
Pirâmide nº 4			
Pirâmide nº 5			
Pirâmide nº 6			
Pirâmide nº 7			
Pirâmide nº8			
Pirâmide nº9			
Pirâmide nº10			

Observação:

Conclusão:

Fórmula:

A atividade transcorreu com certo entusiasmo dos alunos, pois estavam curiosos para descobrir a fórmula através do roteiro e da tabela. Cerca de 15 minutos a primeira dupla já tinha descoberto a fórmula do volume do prisma. Poucos minutos depois as outras duplas também concluíram e fizemos o compartilhamento com as ideias de todos. Daí colocamos a nossa definição e consideração de uma maneira geral, "Que o volume de um prisma depende da área da base e de sua altura" e a formula para o cálculo é $\mathbf{V = A_b.h}$ (volume é igual a área da base multiplicada pela altura). Vejamos a seguir algumas considerações feitas pelos alunos:

Quadro 17: Conclusão de um aluno da turma do 2º ano sobre volume de um prisma.

ALUNO	OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 5)	ÁNALISE
A4 e A6	**CONCLUSÃO:** multiplicando a base x a altura **FORMULA:** V= Ab.h	Conclusão válida sobre Volume de um Prisma.
A5 e A12	**CONCLUSÃO:** Multeplica área da base pela altura **FORMULA:** Ab x h	Conclusão válida sobre Volume de um Prisma.
A20 e A22	**CONCLUSÃO:** multiplica-se a área da base pela a altura **FORMULA:** Ab x H = V *Conclusão: multiplica-se a área da base pela altura* *Fórmula:Ab x H = V*	Conclusão válida sobre Volume de um Prisma.

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 18: Síntese das conclusões da atividade sobre volume de um prisma

Conclusões	**Frequência**	**%**
Válida	**6**	**100**
Parcialmente válida	**0**	**0**
Inválida	**0**	**0**

Fonte: Experimentação (2017)

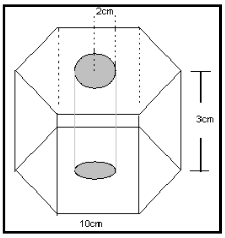
No exercício de aprofundamento, sentimos a necessidade de esclarecer como se calculava a área da base de algumas figuras planas. Comprometemos-nos em levar um formulário de fácil manuseio com as fórmulas das principais figuras planas para que ajudassem nas outras atividades e ficasse logo familiarizado com essas figuras planas, uma vez que a proposta de nosso trabalho é cálculo de volume.

No decorrer das atividades observamos algumas dificuldades de compreensão do texto e obtenção dos dados para o cálculo do volume, como se observa a seguir:

"Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma, em cm^3, é:" muita dificuldade nessa questão por todos, pois para encontrar a área da base tinha que manusear a fórmula da área da lateral. Intervimos nessa questão e esclarecemos como se calcula a área lateral de um prisma.

Outra questão que eles tiveram dificuldades foi a questão número 3 da lista:

"Considere um prisma cuja base é um hexágono regular de 10 cm de lado e altura de 3 cm. No centro da peça, existe um furo cilíndrico de 2 cm de raio. Qual é a quantidade de ferro, em volume, utilizada na confecção da peça?"



A dificuldade nessa questão se deu na subtração do cilindro dentro desse prisma, orientamos para que eles resolvessem apenas o volume do hexágono regular, depois apresentamos a eles o volume do cilindro e observamos que nas atividades seguintes eles iriam ter a oportunidade de descobrir como se calcula o volume do cilindro. As demais atividades a orientação foi apenas sobre o cálculo da área.

Sessão de aprendizagem: Volume da pirâmide

O sétimo encontro para aplicação das atividades, dando continuidade aos experimentos, ocorreu no dia 19/10/17 no qual foi aplicada a atividade cálculo de volume da Pirâmide, na turma do 2º ano, com a presença de 25 alunos. Essa atividade teve início às 10h30m e terminou às 11h30m, detalhamos a seguir como foi o encontro.

Assim que chegamos, observamos a turma muito agitada, organizamos a turma em 11 duplas e um trio. Iniciamos o encontro questionando aos alunos sobre o que se lembravam da atividade anterior. Fizemos uma breve recapitulação dos sólidos que já tinham visto, anotamos no quadro as principais fórmulas descobertas por eles até o momento, até chegar à atividade que questionamos volume do prisma.

Depois de orientados sobre a atividade e suas tarefas, os alunos iniciaram o experimento, “empolgados” com a possibilidade de descobrir uma maneira se calcular o volume da pirâmide. Atentos à atividade e ao preenchimento da tabela com os respectivos valores da área da base, da altura e do volume, começaram a discutir entre si: “deve se multiplicado a área pela altura” outro: “mas não dá certo o valor do volume”.

Alguns minutos depois o primeiro grupo conseguiu observar pela tabela que o volume dividido por três era exatamente a multiplicação da área da base pela altura, dessa forma eles descobriram que o volume da pirâmide é a área da base multiplicada pela altura e dividida por três, daí os demais alunos também seguiram a lógica da tabela e chegou às conclusões, como se observa nas figuras a seguir.

Quadro 19: Conclusão de um aluno da turma do 2º ano sobre volume de uma pirâmide.

<table>
<tr><th>ALUNO</th><th>OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 6)</th><th>ÁNALISE</th></tr>
<tr><td>A1 e
A18</td><td>
<table>
<tr><th>Sólido</th><th>Área da base (A_b)</th><th>Altura (h)</th><th>Volume (V)</th></tr>
<tr><td>Pirâmide nº1</td><td>16 m^2</td><td>6</td><td>32 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº 2</td><td>12 m^2</td><td>7 m</td><td>28 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº 3</td><td>30 m^2</td><td>14 m</td><td>140 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº 4</td><td>6 m^2</td><td>8 m</td><td>16 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº 5</td><td>60 m^2</td><td>40 m</td><td>800 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº 6</td><td>25 m^2</td><td>12 m</td><td>100 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº 7</td><td>50 m^2</td><td>15 m</td><td>250 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº8</td><td>13 m^3</td><td>30 m</td><td>130 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº9</td><td>9 m^2</td><td>16 m</td><td>48 m^3</td></tr>
<tr><td>Pirâmide nº10</td><td>90 m^2</td><td>50 m</td><td>1500 m^3</td></tr>
</table>
Observação:
Conclusão: Calculo e feita através da area da Base. Vezes a altura dividido pra 3
Fórmula: $V = Ab.h$
</td><td>Conclusão válida sobre
Volume de uma Pirâmide.</td></tr>
<tr><td>A29 e
A14</td><td>
Conclusão: multiplica-se a área da base pela altura e divide por 3
Fórmula: $\frac{Ab \cdot H}{3}$
</td><td>Conclusão válida sobre
Volume de uma Pirâmide.</td></tr>
</table>

A30, A14 e A20	**Conclusão:** Volume é igual area x altura ÷ 3 **Fórmula:** $V = \frac{b.h}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Pirâmide.
A7 e A10	**Conclusão:** multiplica e divide **Fórmula:** $\frac{Ab \times h}{3}$	Conclusão parcialmente válida sobre Volume de uma Pirâmide.
A15 e A4	**Conclusão:** **Fórmula:** $V = b.h/3$	Conclusão parcialmente válida sobre Volume de uma Pirâmide.
A5 e A21	**Conclusão:** O volume é dado pela soma da base x m² dividido por 3. **Fórmula:** $\frac{B \times h}{3}$	Conclusão parcialmente válida sobre Volume de uma Pirâmide.
A6 e A9	**Conclusão:** mulliptica a área da base pela autura e divide por m3. **Fórmula:** $Ab \times a \div m^3 =$	Conclusão parcialmente válida sobre Volume de uma Pirâmide.

A27 e A12	**Conclusão:** O Volume e igual a area da base x a altura ÷ 3 **Fórmula:** $V = \frac{Ab \times h}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Pirâmide.
A8 e A22	**Conclusão:** area igual a altura vezes a base da altura ÷ 3 **Fórmula:** $Ab = \frac{h \cdot Ab}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Pirâmide.
A26 e A12	**Conclusão:** Multiplica-se a area da base pela altura e divide pelo ~~volume por~~ "3". **Fórmula:** $V = \frac{Ab \cdot h}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Pirâmide.
A21 e A10	**Conclusão:** Multipli-se a base x a altura e divide po 3 **Fórmula:** $\frac{B \times A}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Pirâmide.
A23 e A25	**Observação:** A base vezes altura dividido por 3 **Conclusão:** **Fórmula:** $V = \frac{Ab \times h}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Pirâmide.

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 20: Síntese das conclusões da atividade sobre volume de uma pirâmide

Conclusões	Frequência	%
Válida	**17**	**68**
Parcialmente válida	**8**	**32**
Inválida	**0**	**0**

Fonte: Experimentação (2017)

Já nos exercícios de aprofundamento, em alguns desses os alunos tiveram dificuldades para calcular a área da base, pois a base variava conforme a pirâmide. Nossa intervenção para essa dificuldade foi discutir com todos como se calcula as áreas das principais figuras planas e entregamos a eles o formulário das figuras envolvidas nos exercícios. As demais dificuldades foram com a parte interpretativa do texto.

De maneira geral os alunos conseguiram assimilar a fórmula do cálculo do volume da pirâmide e também como usa-las nas questões propostas e no cotidiano. Foi uma atividade muito produtiva no qual os alunos demonstraram bastante interesse em montar sua própria maneira de resolução das que questões com as fórmulas descobertas por eles.

Após as descobertas e estímulos aos alunos, socializamos a descoberta feita por eles e fizemos algumas conclusões no quadro, como destacado a seguir:

"O volume será a multiplicação da área da base encontrada pela altura, dividindo o resultado por três"

Às 11h30min todos já tinham feito à atividade, a turma foi dispensada, pois o escolar que levaria muitos deles já estava esperando. Combinamos o próximo encontro e nos comprometemos de ajudar eles nas dificuldades encontradas, principalmente no cálculo da área da base, pois observamos que muitos não se lembravam de como se calculava as áreas das figuras planas e seria excelente que todos os alunos fiquem familiarizados com a determinação do cálculo da área da base.

Sessão de aprendizagem: Volume do Cilindro

No dia 20/10/17, dando continuidade às atividades apresentamos aos alunos o experimento referente ao cálculo de volume de um cilindro. Nesse encontro estavam presentes 24 alunos que foram divididos em 9 duplas e dois trios que depois de orientados sobre o procedimento da atividade se organizaram e desenvolveram seus trabalhos.

Como mostrava o roteiro, bastava preencher a tabela com os valores da área da base, altura e volume. Não tiveram dificuldades em descobrir como de calculava o volume do cilindro, tanto é que a primeira dupla preencheu a tabela e mostrou a fórmula em 20 minutos (tivemos que pedir pra eles aguardarem os outros) e as demais duplas foram terminando, pouco tempo depois todos já tinham feitos essa etapa. Vejamos algumas conclusões:

Quadro 21: Conclusão de um aluno da turma do 2º ano sobre volume de um cilindro.

<table>
<tr><th>ALUNO</th><th>OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 7)</th><th>ÁNALISE</th></tr>
<tr><td>A13 e
A10</td><td>
<table>
<tr><th>Sólidos</th><th>Área da base (Ab)
m^2</th><th>Altura (H)
M</th><th>Volume (V)
m^3</th></tr>
<tr><td>Cilindro nº1</td><td>4 m^2</td><td>5 m</td><td>20 m^3</td></tr>
<tr><td>Cilindro nº2</td><td>9 m^2</td><td>4 m</td><td>36 m^3</td></tr>
<tr><td>Cilindro nº3</td><td>16 m^2</td><td>5 m</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Cilindro nº4</td><td>1 m^2</td><td>7 m</td><td>28 m^3</td></tr>
<tr><td>Cilindro nº5</td><td>5 m^2</td><td>7 m</td><td>35 m^3</td></tr>
<tr><td>Cilindro nº6</td><td>8 m^2</td><td>3 m</td><td></td></tr>
<tr><td>Cilindro nº7</td><td>9 m^2</td><td>6 m</td><td>54 m^3</td></tr>
<tr><td>Cilindro nº8</td><td>7 m^2</td><td>10 m</td><td>70 m^3</td></tr>
<tr><td>Cilindro nº9</td><td>3 πm^2</td><td>6 m</td><td>18 πm^3</td></tr>
<tr><td>Cilindro nº10</td><td>15 πm^2</td><td>8 m</td><td>120 πm^3</td></tr>
</table>
Observação:
Conclusão: Pra achar o volume de um cilindro multiplica sua base pela sua altura
Fórmula: $V = Ab.h$
</td><td>Conclusão válida sobre Volume de um Cilindro.</td></tr>
<tr><td>A6 e A9</td><td>Conclusão: multiplica a área da base pelo π e pela altura
Fórmula: $Ab.\pi.H = V$</td><td>Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de um Cilindro.</td></tr>
<tr><td>A20,
A12 e</td><td>Conclusão: o Volume é igual a área da base x a altura
Fórmula: $V = Ab \times h$</td><td>Conclusão válida sobre Volume de um Cilindro.</td></tr>
</table>

A30		
A8 e A29	Conclusão: área da base vezes a altura Fórmula: $\boxed{V=\pi r^2 . h}$	Conclusão válida sobre Volume de um Cilindro.
A1 e A25	Conclusão: Area base x altura igual Volume Fórmula: Ab.h=V	Conclusão válida sobre Volume de um Cilindro.
A22 e A3	Conclusão: Volume é igual a area da base vezes a altura Fórmula: V=Ab.h *Conclusão: Volume é igual a área da base vezes a altura* *Fórmula:V=Ab x h*	Conclusão válida sobre Volume de um Cilindro.
A11, A24 e A28	Conclusão: multiplicar a Ab com a H, que vai dar o valor do V. Fórmula: Ab.H=V	Conclusão válida sobre Volume de um Cilindro.
A2 e A5	Conclusão: o Volume é igual á area da base x a altura Fórmula: V= Ab x h	Conclusão válida sobre Volume de um Cilindro.

A19 e A26	**Conclusão:** Multiplica-se a área da base x a altura e divide por 3 **Fórmula:** $V = \frac{Ab \cdot h}{3}$	Conclusão inválida sobre Volume de um Cilindro.
A7 e A18	**Conclusão:** É isso aí! **Fórmula:** $A_b \times H = (V)$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de um Cilindro.
A15 e A27	**Conclusão:** multiplica tudo **Fórmula:** $Ab \times \pi \cdot H = V$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de um Cilindro.

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 22: Síntese das conclusões da atividade sobre volume de um Cilindro

Conclusões	**Frequência**	**%**
Válida	**16**	**67**
Parcialmente válida	**6**	**25**
Inválida	**2**	**8**

Fonte: Experimentação (2017)

Uma das dificuldades nesse experimento foi o aparecimento do número π (pi), presente sempre no cálculo da área da base. Depois que a maioria conseguiu descobrir como se calcula o volume do cilindro, fizemos, antes de ir para o exercício de aprofundamento um breve comentário de como se descobre o π (pi) e como se calcula a área de um circulo.

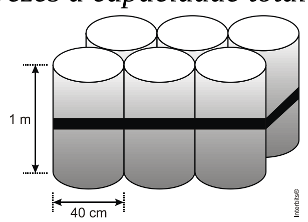
Depois de feitos os esclarecimentos a cerca da área da base e do π (pi), todos os alunos foram orientados a fazer os exercícios de aprofundamentos, a maioria estavam ansiosos, talvez por algumas dificuldades que pudessem encontrar ou ainda se daria tempo pra terminar essa atividade antes do ônibus escolar chegar, em fim, conseguiram fazer o exercício de aprofundamento e o preenchimento da tabela em 1h5m.

Nos exercícios de aprofundamento surgiram algumas dificuldades como nas questões que envolviam interpretação de texto, como se observa nessa questão:

"O Sr. Paulo quer fazer um poço no quintal com 2 m de diâmetro e 12 m de profundidade. Qual é, aproximadamente, o volume de terra que vai ter de extrair? (considere π=3,14)"

Como muitos não sabiam o que era diâmetro e nem profundidade, tivemos que intervir dando exemplos a fim de que sanassem essa dificuldade, esclarecendo que seria comum nas questões aparecer diâmetro ao invés de raio. A questão número 8 também tiveram dificuldades na interpretação e no cálculo, como se observa:

"O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou kits com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado. Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit em um mês pagará a quantia de"(considere $\pi \cong 3$*)*



Apenas duas duplas conseguiram resolver essa questão de maneira integral, os outros tiveram alguma dificuldade. Questão um pouco complexa, pois possuía várias etapas de cálculo, orientamos essas etapas depois socializamos com os demais todos os procedimentos feitos; os demais exercícios foram concluídos por eles sem grandes dificuldades.

Sessão de aprendizagem: Volume do Cone

No dia 22/10/17, dando continuidade às atividades de experimento, volume do cone, iniciamos mais um encontro com a presença de 25 alunos. Iniciamos ás 10h30m, com a turma um pouco agitada, mas receptiva que depois de organizados se dedicaram a atividade e contribuíram significativamente com nosso experimento.

Com os alunos já organizados em suas mesas, formamos onze duplas e um trio, perguntamos a todos se lembravam da atividade anterior, unanimemente responderam que sim, reforçamos que a atividade vista anteriormente (volume do cilindro) possuía uma circunferência como base e a atual tinha muita semelhança. Explicamos o roteiro a eles e iniciaram o preenchimento da tabela às 10h30m.

A princípio preencheram a tabela e depois de 23 minutos uma dupla conseguiu observar pela tabela a fórmula correta do volume do cone, outros discutindo entre si diziam que “o volume do cone era igual ao do cilindro”, o outro questionava dizendo que “não daria certo com os valores da tabela”. Nesse intervalo de tempo mais duas duplas e o trio chegou à fórmula correta. Demos então a seguinte dica para aqueles que estavam com dificuldade para mostrar a fórmula:

“Tentem obervar como se calcula o volume do cilindro e quantos cones cabem em dentro deles”.

Algum tempo depois foram terminando suas conclusões e apenas uma dupla estavam em dúvida quanto à fórmula correta, os outros alunos ajudaram eles e terminaram as tarefas 34 minutos depois do início. Vejamos algumas conclusões:

Quadro 23: Conclusão de um aluno da turma do 2º ano sobre volume de um cone.

<table>
<tr><th>ALUNO</th><th>OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 8)</th><th>ÁNALISE</th></tr>
<tr><td>A23 e
A12</td><td>
<table>
<tr><th>Sólidos</th><th>Área da base (Ab)
m^2</th><th>Altura (H)
m</th><th>Volume (V)
m^3</th></tr>
<tr><td>Cone nº1</td><td>$4 m^2$</td><td>6 m</td><td>$8 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº2</td><td>$6 m^2$</td><td>5 m</td><td>$10 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº3</td><td>$3 m^2$</td><td>6 m</td><td>$6 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº4</td><td>$9 m^2$</td><td>7 m</td><td>$21 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº5</td><td>$12 m^2$</td><td>7 m</td><td>$32 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº6</td><td>$2 m^2$</td><td>3 m</td><td>$2 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº7</td><td>$15 m^2$</td><td>6 m</td><td>$30 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº8</td><td>$9 m^2$</td><td>30 m</td><td>$90 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº9</td><td>$18 m^2$</td><td>13 m</td><td>$78 m^3$</td></tr>
<tr><td>Cone nº10</td><td>$25 m^2$</td><td>60 m</td><td>$500 m^3$</td></tr>
</table>
Observação:
Conclusão: multiplicou-se a aréa da base x a altura divide por 3
Fórmula: $V = \frac{Ab.h}{3}$
</td><td>Conclusão válida sobre
Volume de um Cone.</td></tr>
<tr><td>A9 e
A27</td><td>Conclusão: multiplicamos a área da Base com a altura e dividir por 3.
Fórmula: $\frac{Ab.H = V}{3}$</td><td>Conclusão válida sobre
Volume de um Cone.</td></tr>
</table>

A13 e A21	**Conclusão:** Área da base x Altura ÷ 3 **Fórmula:** $V = \frac{Ab.h}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de um Cone.
A20 e A8	**Conclusão:** $\frac{Ab.h}{3} = \frac{V = \pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$ **Fórmula:** $V = 1/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$	Conclusão válida sobre Volume de um Cone.
A3, A22 e A11	Observação: **Conclusão:** Volume igual a um sobre três, vezes π, vezes R², vezes altura **Fórmula:** $V = 1/3 . \pi . R^2 . H$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de um Cone.
A26 e A30	**Conclusão:** volume igual 1/3 vezes π vezes R².h **Fórmula:** $V = 1/3 . \pi . R^2 . h$	Conclusão válida sobre Volume de um Cone.
A10 e A7	**Conclusão:** **Fórmula:** A fórmula mágica da paz (racionais MC's) $V = \frac{ab.h}{3}$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de um Cone.

A18 e A4	**Conclusão:** area do base x altura ÷3 **Fórmula:** $V=\frac{Ab \times h}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de um Cone.
A28 e A25	**Conclusão:** Area da base x Altura ÷ 3 **Fórmula:** $V=\frac{Ab \cdot h}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de um Cone.
A1 e A16	Observação: **Conclusão:** MULTIPLICA A AREA DA BASE VEZES A ALTURA E DIVIDE POR TRÊS **Fórmula:** $\frac{AB \times H}{3} = V$	Conclusão válida sobre Volume de um Cone.
A29 e A2	**Conclusão:** o volume é igual a area da base multiplicado pela altura ÷ por 3. **Fórmula:** $V=\frac{Ab \cdot H}{3}$ *Conclusão: O volume é igual a área da base multiplicado pela altura :por 3* *Fórmula:V=Ab x H/3*	Conclusão válida sobre Volume de um Cone.
A5 e A6	**Conclusão:** Multiplica-se "π", π². l.h e depois se divide por 3. **Fórmula:** $V=\frac{\pi \cdot \pi^2 \cdot h}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de um Cone.

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 24: Síntese das conclusões da atividade sobre volume de um Cone

Conclusões	Frequência	%
Válida	**20**	**80**
Parcialmente válida	**5**	**20**
Inválida	**0**	**0**

Fonte: Experimentação (2017)

Assim fizemos algumas observações no quadro, referente ao volume do cone:
"O volume do cilindro é o triplo do volume do cone de mesma base"
"A área da base de um cone é a área de um círculo πr^2"
"O volume de um cone é área da base multiplicado pela altura dividido o resultado por três" ou $V=\frac{\pi r^2 . h}{3}$

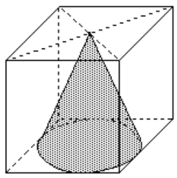
Quanto ao exercício de aprofundamento, os alunos tiveram um bom desempenho, com dificuldades em alguns exercícios, como o obervado a seguir:

"A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8πcm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é"

Como os discentes não conheciam a fórmula do comprimento da circunferência e nem estavam habituados com a manipulação dessa fórmula, resolvemos intervir, explicando a todos como se obtinha o raio e a altura. Daí ficou favorável para que eles encontrassem o volume pedido na questão.

Outra questão que eles tiveram dificuldades foi a que exigia conhecimento de área de um cubo e visualização de sólidos inscritos. Intervimos no sentido de mostrar a todos o que seria área total de um cubo, conforme se observa na questão a seguir:

"Na figura, a base do cone reto está inscrita na face do cubo. Supondo π=3, se a área total do cubo é 54, então o volume do cone é:"



Essa questão deu um pouco de trabalho aos alunos, mas foi muito produtiva no sentido de usar instrumentos como a manipulação de fórmulas e a determinação do volume de um sólido inscrito numa figura regular. Nossa intervenção foi apenas no sentido de encontrar o diâmetro da base do cone e a parte da visualização da altura, já a visualização do raio e do volume eles fizeram com certa facilidade.

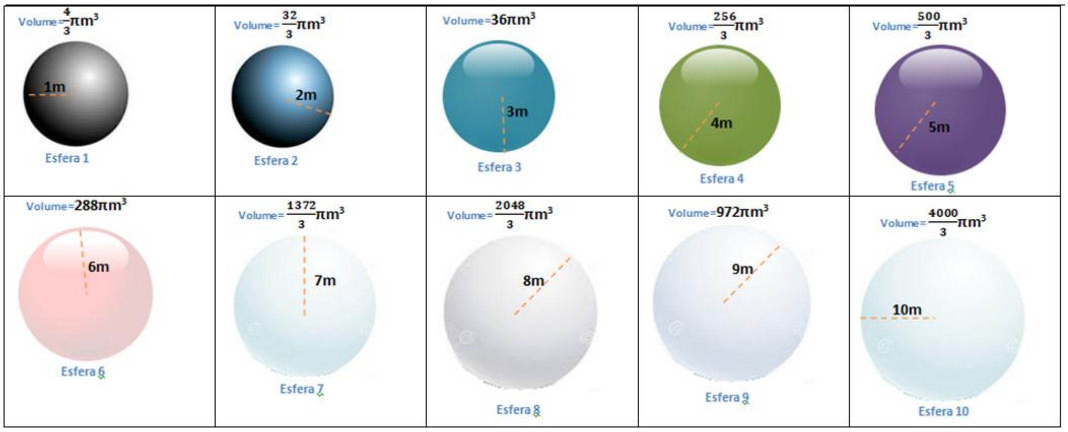
Esse encontro teve 1h22m de duração, contou com a participação ativa dos alunos presentes, foi uma atividade que precisou de um pouco mais de tempo; o escolar que levaria uma parte deles já estava esperando com isso os alunos ficaram um pouco pressionados no final de suas atividades.

Sessão de aprendizagem: Volume da Esfera

A última atividade desenvolvida com os alunos do 2º ano foi o cálculo de volume da esfera que foi desenvolvida com a presença de 24 alunos no dia 09/11/17. Essa atividade teve início às 10h30min e durou cerca de 1h07min, a atividade e os exercícios de aprofundamento.

Essa atividade foi organizada com 10 esferas e uma tabela com os raios de 1 até 10, com o propósito que os alunos tivessem o entendimento de como se calculava o volume de uma esfera, através da comparação dos valores colocados por eles nessa tabela. Conforme as imagens a seguir:

Figura 35: Quadro de esfera.



Fonte: Experimento (Novembro de 2017)

Figura 36: Tabela de esfera.

Sólidos	O valor do Raio (**R**)	O valor do Raio ao cubo (**R**^{3})	Volume (**V**) m^3
Esfera nº 1			
Esfera nº 2			
Esfera nº 3			
Esfera nº 4			
Esfera nº 5			
Esfera nº 6			
Esfera nº 7			
Esfera nº8			
Esfera nº9			
Esfera nº10			

Fonte: Experimento (Novembro de 2017)

No início sempre com a turma muita agitada, pois as últimas aulas sempre causou uma ansiedade a esses alunos, iniciamos organizando os alunos, conversando sobre a atividade anterior e esclarecendo qualquer dúvida que ainda tenha ficado. Pedimos que se organizassem em duplas, entregamos o roteiro e explicamos a atividade e seu propósito, nesse momento os alunos ficaram atenciosos e foi iniciado o experimento às 10h43min.

Durante o desenvolvimento dessa atividade, os alunos tiveram algumas dificuldades, inicialmente alguns com o preenchimento do R^3, outros com o aparecimento do número π (pi). Numa tentativa de ajudar esses alunos nos encaminhamos ao quadro, solicitando a atenção de todos, e perguntamos a todos o significado do raio disseram "que é porque é uma figura circular" comunicamos, mais uma vez, que o raio é a metade do diâmetro que contém a figura e que R^3 é RxRxR e o π (pi) é a divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro.

Os alunos começaram então a atividade, o preenchimento da tabela foi simples, mas circulando pela sala logo percebemos suas dificuldades em fazer suas considerações e mostrar a fórmula, sabíamos que a visualização da fórmula não seria simples, demos as seguintes dicas: "tentem visualizar na tabela os raios que sejam múltiplos de três" "verifiquem pela tabela o número que aparece como divisor comum em todos os resultados".

Com 23 minutos de atividade uma dupla conseguiu terminar o preenchimento da tabela e fazer sua observação, como mostra a figura a seguir:

Figura 37: Conclusão de um aluno da turma do 2º ano sobre volume de uma esfera.

Sólidos	O valor do Raio (R)	O valor do Raio ao cubo (R^3)	Volume (V) m^3
Esfera n° 1	1	1	$\frac{4}{3}\pi$
Esfera n° 2	2	8	$32/3\,\pi$
Esfera n° 3	3	27	36π
Esfera n° 4	4	64	$\frac{266}{3}\pi$
Esfera n° 5	5	125	$\frac{500}{3}\pi$
Esfera n° 6	6	216	288π
Esfera n° 7	7	343	$\frac{1372}{3}\pi$
Esfera n°8	8	512	$\frac{2048}{3}\pi$
Esfera n°9	9	729	972π
Esfera n°10	10	1,000	$\frac{4000}{3}\pi$

Observação:

Conclusão: É o número, quatro que multiplica pelo raio e divide por três:

Fórmula: $\frac{4\pi R^3}{3}$

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Algumas outras duplas foram terminando logo em seguida, outros não conseguiram visualizar a fórmula, apesar do preenchimento correto da tabela, percebemos que uns não teriam entendido a fórmula, apenas copiado as conclusões de outras duplas. Vejamos outras conclusões de outras duplas:

Quadro 25: Conclusão de um aluno da turma do 2º ano sobre volume de uma esfera.

<table>
<tr><th>ALUNO</th><th>OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES (Atividade 8)</th><th>ÁNALISE</th></tr>
<tr><td>A13 e
A27</td><td>
<table>
<tr><th>Sólidos</th><th>O valor do Raio (R)</th><th>O valor do Raio ao cubo (R^3)</th><th>Volume (V) m^3</th></tr>
<tr><td>Esfera nº 1</td><td>1</td><td>1</td><td>$\frac{4}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>Esfera nº 2</td><td>2</td><td>8</td><td>$32/3\ \pi$</td></tr>
<tr><td>Esfera nº 3</td><td>3</td><td>27</td><td>36π</td></tr>
<tr><td>Esfera nº 4</td><td>4</td><td>64</td><td>$\frac{266}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>Esfera nº 5</td><td>5</td><td>125</td><td>$\frac{500}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>Esfera nº 6</td><td>6</td><td>216</td><td>288π</td></tr>
<tr><td>Esfera nº 7</td><td>7</td><td>343</td><td>$\frac{1372}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>Esfera nº8</td><td>8</td><td>512</td><td>$\frac{2048}{3}\pi$</td></tr>
<tr><td>Esfera nº9</td><td>9</td><td>729</td><td>972π</td></tr>
<tr><td>Esfera nº10</td><td>10</td><td>1.000</td><td>$\frac{4000}{3}\pi$</td></tr>
</table>
Observação:
Conclusão: é o número, quatro que multiplica pelo raio e divide por três
Fórmula: $\frac{4\pi R^3}{3}$
</td><td>Conclusão válida sobre Volume de uma Esfera.</td></tr>
<tr><td>A4 e
A30</td><td>
Observação: multiplico 4 vezes o π o Raio ao cubo e divide por 3.
Conclusão:
Fórmula: $\frac{4\pi R^3}{3}$
</td><td>Conclusão válida sobre Volume de uma Esfera.</td></tr>
</table>

A8 e A1	**Conclusão:** o Volume é igual ao valor do Raio ao cubo x4 — 3 **Fórmula:** $V = \frac{R^3 . 4\pi}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Esfera.
A19 e A29	**Conclusão:** Quatro uva ao cubo vezes π dividido por três **Fórmula:** $\frac{4R^3 . \pi}{3}$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de uma Esfera.
A17 e A21	Observação: **Conclusão:** quatro vezes π vezes R^3 sobre três **Fórmula:** $\frac{4.\pi.R^3}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Esfera.
A10 e A3	**Conclusão:** Quatro pi multiplicado pelo valor do raio ao cubo sobre 3 **Fórmula:** $\frac{4\pi \cdot R^3}{3}$ *Conclusão: quatro pi multiplicado pelo valor do raio ao cubo, sobre 3.*	Conclusão válida sobre Volume de uma Esfera.
A26 e A28	**Conclusão:** Volume igual quarto vezes ao cubo. π dividido por três. **Fórmula:** $V = \frac{4R^3 . \pi}{3}$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de uma Esfera.

A24 e A22	**Conclusão:** Multiplica 4 vezes o raio **Fórmula:** $V: \frac{4}{3} \pi R^3$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de uma Esfera.
A5 e A2	**Conclusão:** V é ingual a quatro vezes π vezes R^3 **Fórmula:** $V = \frac{4 . \pi . R^3}{3}$	Conclusão válida sobre Volume de uma Esfera.
A23 e A12	**Conclusão:** multiplica o 4 pelo π e depois R^3, isto é.. **Fórmula:** $\frac{4 . \pi . R^3}{3}$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de uma Esfera.
A26 e A6	**Conclusão:** **Fórmula:**	Conclusão inválida sobre Volume de uma Esfera, não foi feito a conclusão.
A9 e A25	**Conclusão:** ??? **Fórmula:** $\frac{R . R^3 . \pi . 4}{3}$	Conclusão Parcialmente válida sobre Volume de uma Esfera.

Fonte: experimento (Ago/Nov 2017).

Quadro 26: Síntese das conclusões da atividade sobre volume de uma esfera

Conclusões	**Frequência**	**%**
Válida	**12**	**50**
Parcialmente válida	**10**	**42**
Inválida	**2**	**8**

Fonte: Experimentação (2017)

Como a metade da turma conseguiu concluí bem suas tarefas e a outra parte estavam ainda com dúvidas, resolvemos socializar o assunto até que todos compreendessem a fórmula correta.

"Para se calcular o volume da esfera, multiplica 4 vezes seu raio ao cubo pela constante π (pi) e divide o resultado dessa multiplicação por três, ou seja,$V= \frac{4\pi r^3}{3}$"

5- ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Nesta seção apresentamos os dados recolhidos em nossa experimentação, e fizemos a confrontação deste, de acordo com a última fase da engenharia didática, análise *a posteriori* validação, a fim de, validar nossa sequencia didática.

Para que se tenha uma melhor ideia da percepção e avaliação dos alunos com relação a nossa proposta, apresentaremos aqui as conclusões descritas nos relatórios, no caderno de anotações individuais, nas observações do professor, no pré-teste e pós-teste e as conclusões das atividades daqueles que participarão do projeto. A validação do estudo será desenvolvida a partir da confrontação dos dados obtidos nas análises a *priori* e *posteriori*; lembrando sempre que o objetivo de nossa pesquisa é avaliar a potencialidade do ensino de cálculo de volume de sólidos geométricos no ensino por atividades.

Para avaliação da pesquisa foi utilizados técnicas estatísticas, como o teste de hipótese, com os resultados dos pré-teste e pós-teste e análises de tabelas para encontrar (ou não) correlações fracas ou fortes das informações fornecidas pelos participantes com os resultados obtidos durante o processo de experimentação, além disso, foram analisados os registros das atividades realizadas pelos alunos participantes.

5.1 Análise a Posteriori do Pré e Pós-Teste

Ao iniciar a análise de desempenho individual dos alunos, esclarecemos que iremos analisar somente aqueles que participaram do pré e pós-teste, excluindo, portanto aqueles que faltaram um ou o outro teste. Informamos ainda que nossas análises se centraram na resolução de questões e que a intenção maior além do aprendizado de maneira diferente era verificar se os alunos aplicavam de maneira correta as fórmulas desenvolvidas por eles durante as atividades, dentro da lógica de cada questão.

A análise se inicia com o detalhamento do desempenho dos alunos no pré- teste e pós-teste e para facilitar a identificação dos alunos, nas tabelas e gráficos, esclarecemos que utilizamos a nomenclatura de A1 a A30, para identificar os 30 alunos presentes nas análises. Informamos ainda que o dado obtido privilegia as análises feitas em percentuais de acertos ou erros de cada questão. Por essas razões criamos alguns critérios para a análise do pré- teste e pós- teste conforme o quadro a seguir:

Quadro 27: Critério de análise do percentual de acerto dos alunos nas questões do Pós-Teste.

Percentual de desenvolvimento	Descrição
100%	Desenvolvimento integral da questão, chegando à resposta correta.
75%	Aproveitamento parcial da questão, quando o aluno chegou a desenvolvê-la usando a fórmula e a lógica correta, equivocando-se nos cálculos finais.
50%	Aproveitamento parcial, com a utilização correta da fórmula, mas com equívocos na inserção de dados, como por exemplo, a utilização do valor do diâmetro no lugar do raio, ou a ausência do cálculo da área da base, em algumas questões.
25%	Apenas utilizou a fórmula correta, mas não fez nenhum desenvolvimento, ou utilizou a unidade de medida correta na questão.
0%	Casos em que o aluno deixou a questão em branco ou não utilizou a fórmula correta.

Analisando as notas de todos os alunos no pré- teste, individualmente percebemos que todos tentaram resolver ao menos uma questão, a questão número um foi resolvida por 25 alunos, no entanto apenas 8 resolveram de maneira integral. Observamos também que o maior número de acerto de questões foram duas, feita, intuitivamente, por três alunos, a primeira e a segunda, por dois alunos; a primeira e a sexta pelo outro aluno.

Quadro 28: Aproveitamento dos alunos no Pré-teste.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Nota
A1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A18	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
A19	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
A20	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
A21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A24	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A28	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
A29	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A30	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2

Fonte: Experimento (Ago/Nov 2017)

Em uma análise minuciosa de tentativa de resolução de questões, destacamos no gráfico 17, como ocorreu essa tentativa de resolução, pois a primeira e a sexta questão que teve maior número de acerto, não necessitava de fórmula para ser resolvido, apenas o conhecimento de contagem ou intuição. Já a questão número 2, o aluno pode ter utilizado, intuitivamente, seu conhecimento prévio de figuras planas.

5.1.1 Síntese de desempenho das atividades desenvolvidas

Quadro 29: Validação das atividades desenvolvidas

Atividades	Análise a priori	Análise a posteriori	Validação
Ideia de Volume	Nossa justificativa e hipótese para essa atividade, que envolve a parte visual dos sólidos geométricos era que os discentes tivessem ciência que existe diferentes maneira de se ocupar um sólido, devido a seu formato. Mostrar os diferentes sólidos geométricos, para que o aluno chegue por intuição no conceito de volume e do metro cúbico. Esperava-se que o grau de dificuldade dessa atividade pudesse está nas diferentes maneiras de conceituar o volume, e também nas transformações das unidades de volume e capacidade.	A atividade ocorreu muito bem, a maioria dos alunos desenvolveram bem a atividade e os exercícios de aprofundamento, pois utilizaram os conhecimentos adquiridos nessa atividade, os seja, 59% tiveram suas atividades Válidas, 34% Parcialmente Válidas e apenas 7% inválidas.	***Positiva***
Unidade de Medida	Nossa hipótese para esta atividade, seguindo uma sequencia previamente orientada no roteiro e pelo professor orientador, é que os alunos conseguissem compreender as unidades de volume e fossem capazes de transformar tanto os múltiplos como os submúltiplos de maneira gradativa, ou seja,	Essa atividade foi trabalhosa, mas muito produtiva, a maioria conseguiu concluir bem a atividade juntamente com os exercícios de aprofundamento, pois utilizaram bem os conhecimentos adquiridos nessa atividade. Como se observa 44% dos discentes tiveram	***Positiva***

	ele seja levado à compreensão de como transformar as unidades.	a atividade Válida, 48% parcialmente válida e 8% apenas inválidas.	
Volume do Paralelepípedo	Nossa hipótese para esta atividade, seguindo a sequencia previamente orientada no roteiro e pelo professor orientador, é que os educandos conseguissem fazer a sistematização, chegando à fórmula do cálculo de volume de paralelepípedo analisando o quadro das figuras e preenchendo uma tabela sem grandes dificuldades.	Atividade muito bem feita pelos educandos com excelente aproveitamento. Eles conseguiram desenvolver bem essa atividade assim como encontraram as respostas mais adequadas para resolver as questões de aprofundamento, pois utilizaram os conhecimentos adquiridos nas atividades. Como se observa 84% das atividades foi Válido e 16% Parcialmente Válida.	***Positiva***
Volume do Cubo	Nossa justificativa e hipótese para esta atividade estão ligados ao fato de termos iniciado pelo Paralelepípedo, ou seja, para figuras com medidas diferentes a conclusão seria a multiplicações dos lados, Já o cubo a ideia seria a mesma, agora com medidas de lados iguais, fato que não seria dificultoso para o aluno. Nesse sentido, acreditamos que a maior dificuldade do aluno seria a sistematização da formula, uma vez que ao multiplicarmos as arestas o resultado seria	Também excelente aproveitamento nessa atividade e nos exercícios de aprofundamento, pois utilizaram os conhecimentos adquiridos na atividade. Como se observa 72% tiveram essa atividade Válida e 28% Parcialmente Válida.	***Positiva***

	aresta elevada ao cubo (a^3). O entendimento dessa fórmula seria essencial para que os alunos pudessem entender conceito de utilizarmos cm^3, m^3 como medida de volume.		
Volume do Prisma	Esta atividade tem por objetivo, levar os alunos a descobrirem uma maneira prática de encontrar o volume do prisma e sistematizar, ou seja, encontrar a fórmula que determine o seu volume. Essa atividade não tem um grau de dificuldade alto, uma vez que o aluno dispõem de uma tabela simples, mas com a ideia elementar de cálculo de volume de prisma, que é a multiplicação da área da base multiplicado pelo altura. Nesse sentido acreditamos que a grande dificuldade ia ser a determinação das áreas das bases dos prismas, pois existem diferentes maneiras de se calcular a área da base, dependerá do tipo de figura, lembrando que área é conhecimento prévio do aluno, e que não nos exime de fazer a intervenção nesse sentido.	Excelente desempenho nessa atividade com 100% das conclusões e observações Válidas pelos discente. Nos exercícios de aprofundamento encontraram a resposta mais adequada para resolver as questões, pois utilizaram os conhecimentos adquiridos nas atividades.	***Positiva***

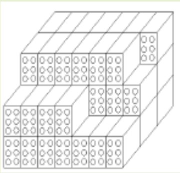
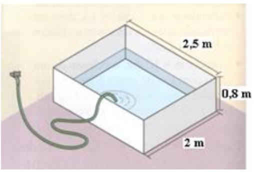
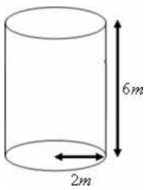
Volume da Pirâmide	Para a atividade do cálculo do volume da pirâmide, observava-se que é uma variação do cálculo do volume do prisma. Nossa hipótese em relação a essa atividade era de que os alunos demorem mais para compreender que aparecerá uma divisão por três em relação ao volume do prisma. Pra isso a estratégia foi montar a área da base e/ou da altura sendo múltiplo de três, com o propósito do resultado do cálculo volume ser um numero inteiro, isso facilita a sistematização e a obtenção da fórmula. A socialização, sugerida no ensino por atividade e o exercícios de fixação é uma das alternativas para a apropriação do conhecimento.	Atividade muito bem sucedida pelos educandos, ou seja, foram 68% das conclusões e observações Válidas e 32% Parcialmente Válida. Nos exercícios de aprofundamento encontraram as respostas mais adequada para resolver as questões, pois utilizaram os conhecimentos adquiridos nas atividades.	***Positiva***
Volume do Cilindro	As atividades envolvendo sólidos redondos apresentam um grau de compreensão maior, tendo em vista que aparecerá o valor de uma constante chamada π(pi). Nossa estratégia para essa atividade foi manter o valor de π, no cálculo da área da base, isso facilitaria a percepção, uma vez que o aluno já viu como se calcula o volume do prisma, que é área	Atividade bem desenvolvida pelos discentes, algumas dificuldades com a constante π(pi), mas tiveram bom aproveitamento, ou seja, 67% com as conclusões e observações Válida, 25% Parcialmente Válida e apenas 8% Inválida. Nos exercícios de aprofundamento encontraram a resposta	

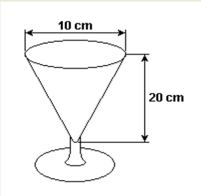
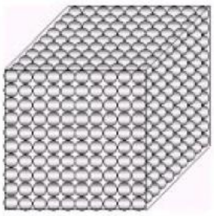
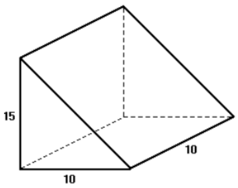
	da base multiplicada pela altura. No cilindro seria a mesma coisa, com a diferença de aparecer a constante dos sólidos redondos. Espera-se que essa atividade não traga grandes dificuldades para o aluno, pois a atividade está organizada de modo que a compreensão e obtenção da fórmula sejam facilitadas, a socialização da atividade e o exercício de fixação contribuirão para o aprofundamento da aprendizagem.	mais adequada para resolver as questões, pois utilizaram os conhecimentos adquiridos na atividade.	***Positiva***
Volume do Cone	Nossa hipótese para essa atividade é de que o educando relacione com o cálculo de volume da pirâmide, que também é dividido por três, que notem também que é um sólido redondo igual ao cilindro e que vai aparecer a constante π. Esperava-se que essa atividade não trouxesse grande dificuldade. Todos os valores foram colocados como múltiplos de três para facilitar a compreensão e a sistematização da formula. A intervenção Ia ser feito apenas nas particularidades dos sólidos, como por exemplo, a base e a geratriz do cone.	Excelente desempenho nessa atividade, os educandos conseguiram desenvolver bem a atividades e os exercícios de aprofundamento, isto é, eles encontraram a resposta mais adequada para resolver as questões, pois utilizaram os conhecimentos adquiridos nessa atividade.	***Positiva***

Volume da Esfera	Nossa hipótese para essa atividade é de que, pela complexidade da fórmula os alunos teriam mais dificuldades e levaria mais tempo para concluir essa atividade. A estratégia a ser utilizada será organizar os valores de acordo com a fórmula a ser deduzida, e não mais a área da base multiplicada pela altura, e sim a área da superfície esférica vezes o raio. Essa atividade seria orientada e a descoberta compartilhada com todos. Temos também o exercício de fixação baseado nas atividades e em outros contextos como forma de se efetivar o conhecimento.	Como se previa os educandos tiveram um pouco de dificuldade, mas tiveram um bom aproveitamento em suas conclusões e observações, ou seja 50% com atividade Válida, 42% Parcialmente Válida e apenas 8% Inválidas. Nos exercícios de aprofundamento foram bem, com algumas dificuldades na interpretação dos textos. No geral atividade e exercícios bem sucedidos por todos.	***Positiva***

Fonte: Experimento (Ago/Nov 2017)

Quadro 30: Análise das tentativas de resolução dos problemas do Pré-teste

Questões	**Percentual de alunos que acertaram as questões**	**Técnicas utilizadas na tentativa de resolução das questões**
01-Quantos tijolos formam o sólido abaixo? 	27%	➢ 26% utilizaram conhecimentos prévios de área para resolver a questão. ➢ 23% informaram somente a resposta.
02- Uma mangueira, que despeja água numa piscina no formato de um paralelepípedo, que mede 2 metros de comprimento, 0,8m de altura e 2,5m de largura, de acordo com a figura abaixo:  O volume desta piscina, em m³, é:	3%	➢ 13% utilizaram conhecimentos prévios de área para resolver a questão.
03- Um reservatório em formato cilíndrico possui 6 metros de altura e raio da base igual a 2 metros. Determine:  Qual a capacidade desse reservatório em litros?	0%	➢ 43% utilizaram conhecimentos prévios de área de retângulo (2x6) para resolver a questão.
04- Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio 3 cm podemos fazer a partir de um recipiente que contém $24\pi m^3$ de chocolate?	0%	➢ 3% utilizaram a multiplicação de π=3,14 por 24. ➢ 3% utilizaram a divisão de 24π por 3. ➢ 3% utilizaram a multiplicação de 3 por 24.
05- Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de milk shake com as	0%	➢ 20% multiplicaram as medidas, 20x10, intuitivamente como se fosse calculo de área de retângulo

dimensões mostradas no desenho.  Sabendo-se que a taça estava totalmente cheia e que eles beberam todo o milk shake, calcule qual foi o volume, em m^3 e mL, ingerido pelo casal. Adote $\pi = 3$.		Bxh.
06- Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado quantas bolinhas? 	13%	➢ 20% utilizaram conhecimentos prévios de área para resolver a questão e contaram em um dos lados 9 bolinhas apenas. ➢ 10% multiplicaram a quantidade de faces por 100, ou seja, 6x100. ➢ 6% informaram apenas a resposta.
07- A base de uma pirâmide é um quadrado com 8cm de lado, qual o volume dessa pirâmide, em cm^3, sabendo que sua altura é 10cm?	0%	➢ 27% utilizaram conhecimentos prévios de área para resolver a questão, multiplicando o lado pela altura. ➢ 10% dividiram as medidas dadas no problema.
08- De uma viga de madeira de seção quadrada de lado L=10cm extrai-se uma cunha de altura h=15cm, conforme a figura. O volume da cunha é:  	0%	➢ 7% utilizaram conhecimentos prévios de área para resolver a questão. ➢ 3% tentou resolver utilizando a fórmula do teorema de Pitágoras. ➢ 3% multiplicou as três medidas apenas.
09- Seu Joaquim Foi colocar gasolina no seu carro, que estava com o tanque pela metade.	0%	7% multiplicaram por 2 a quantidade de litros e colocou o resultado em m^3 ($35x2=70m^3$).

Colocou 35 litros e encheu o tanque. Qual é a capacidade do Tanque em m^3?		7% dividiu por 2 a quantidade de litros (35/2= 17,5litros).
10- Um aquário, que tem a forma de um cubo, possui 40 cm de aresta. Qual é seu volume em cm^3?	0%	3% dividiu a aresta do cubo por 4 ($40/4=10cm^3$).

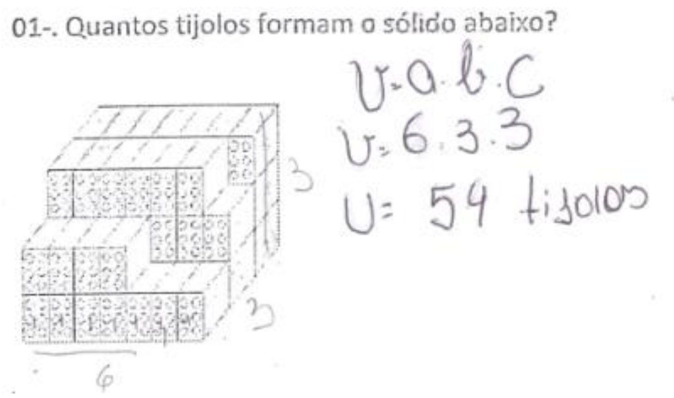
Fonte: Experimento (Ago/Nov 2017)

5.2 Análise de Erros no Pós-teste

Após observarmos o desempenho dos alunos por questão e por aluno no pós- teste, faremos as análises dos erros cometidos e os fatores que ocasionadores de tal situação. Para tanto elegemos algumas categorias com o propósito de identificar se os erros cometidos foram de interpretação de texto, aplicação da fórmula correta, erro operacional ou desconhecimento total das questões que eles deixaram em branco. Vejamos a seguir a análise dos erros cometidos nas questões do pós- teste e suas respectivas imagens de respostas dadas pelos alunos.

Erros cometidos pelos alunos na questão 1.

Figura 38: Justificativa apresentada pelo aluno A6 na questão 1



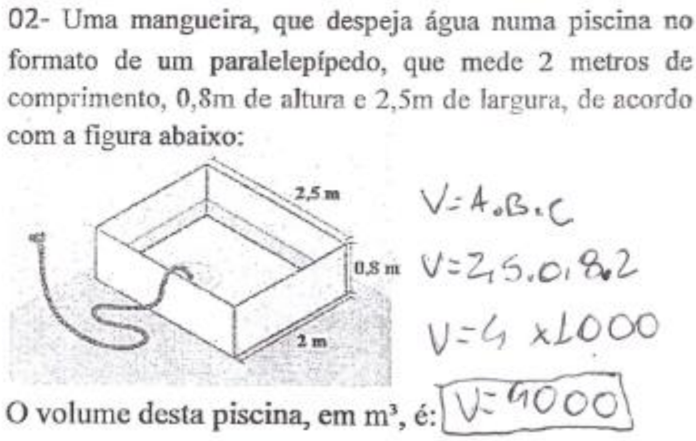
Ao verificar a resposta acima, podemos perceber que o aluno A6 utilizou a fórmula do volume do paralelepípedo, só que esqueceu que o bloco de tijolos não estava completo. Este erro pode está relacionado com entendimento incompleto da questão, implicando no erro da contagem do bloco de tijolos.

Figura 39: Justificativa apresentada pelo aluno A6 na questão 1.

O aluno A27 tentou fazer de maneira correta, mais por alguns erros na sua estratégia contou um tijolo a mais, justificando de maneira insatisfatória a questão.

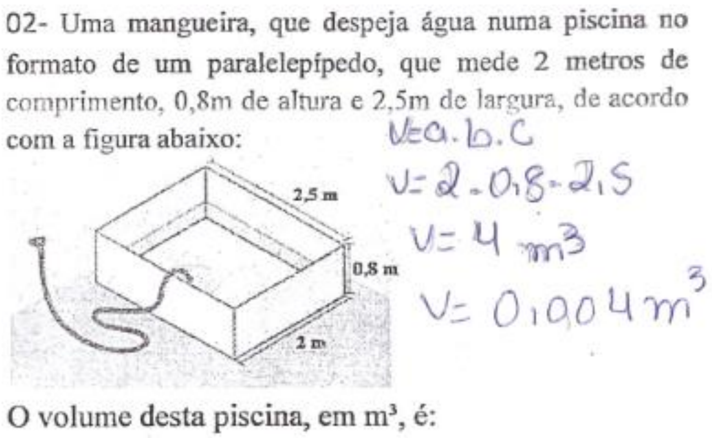
A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 2:

Figura 40: Justificativa apresentada pelo aluno A20 na questão 2.



Nesta questão o aluno A20 confundiu o cálculo simples do volume do paralelepípedo, com as unidades de transformação de medidas e multiplicou por 1000 o resultado. Foi considerado erro parcial, pois identificou corretamente a fórmula e seu uso.

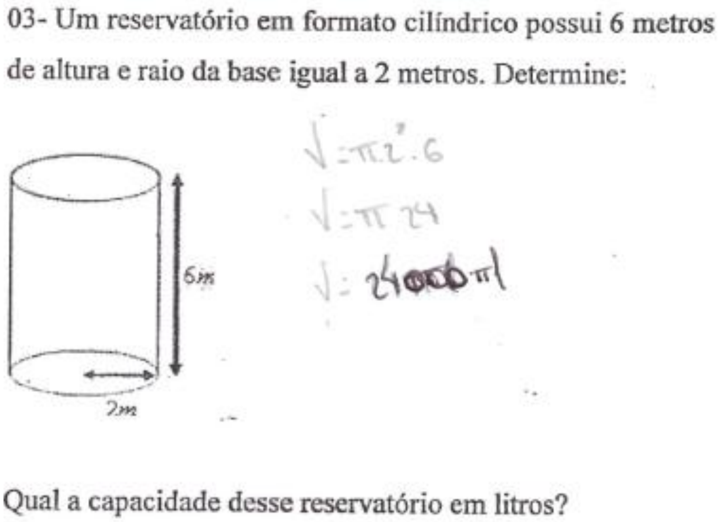
Figura 41: Justificativa apresentada pelo aluno A5 na questão 2.



O mesmo erro parcial aconteceu com o aluno A5, só que agora ao invés de multiplicar, o aluno dividiu por 1000 o resultado obtido. Também foi considerado erro parcial, pois identificou corretamente a fórmula a ser aplicada, só que por interpretação confundiu o resultado.

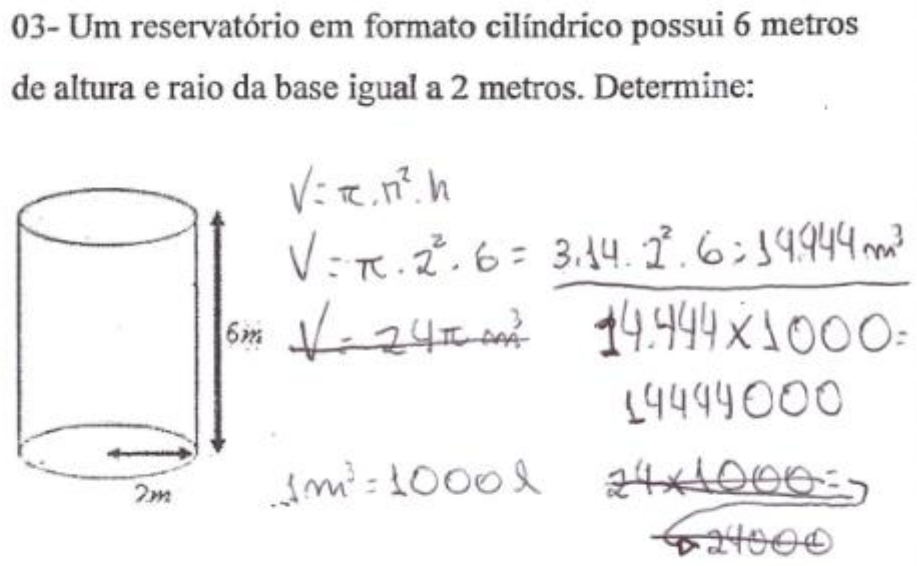
A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 3:

Figura 42: Justificativa apresentada pelo aluno A13 na questão.



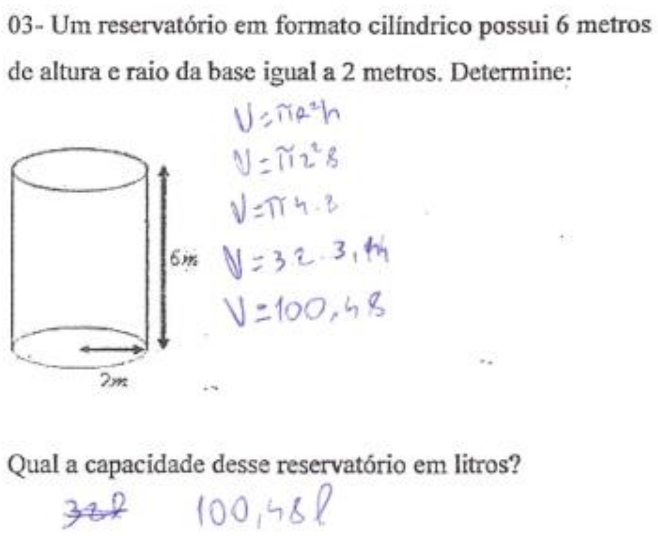
Na questão 3, apesar do uso correto da fórmula, o aluno A13 cometeu um erro parcial, pois a constante pi foi multiplicada como se fosse 1000 da transformação de m^3 para litros.

Figura 43: Justificativa apresentada pelo aluno A19 na questão.



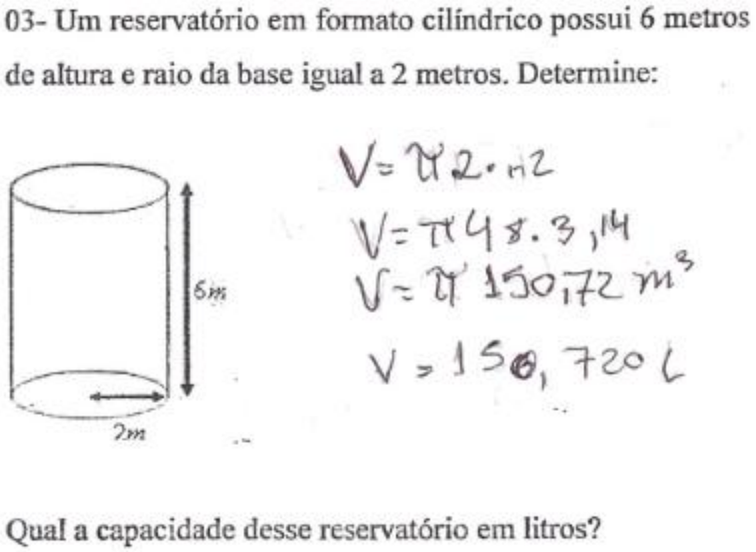
Já o aluno A19, começou desenvolvendo bem a questão, chegou até encontrar o volume do cilindro, só que na hoje de substituir a constante e a transformação da unidade de medida errou os cálculos chegando a resposta incorreta. Erro parcial, pois desenvolveu e utilizou correta a fórmula do volume do cilindro.

Figura 44: Justificativa apresentada pelo aluno A24 na questão.



O aluno A24, utilizou a fórmula correta, mas substituiu a altura erroneamente, talvez por distração ou por algum cálculo mental que fez em fim teve baixo aproveitamento na questão, ou seja, só a apresentação da fórmula que foi a correta.

Figura 45: Justificativa apresentada pelo aluno A4 na questão.



03- Um reservatório em formato cilíndrico possui 6 metros de altura e raio da base igual a 2 metros. Determine:

6m

2m

$V = \pi 2 \cdot \pi 2$

$V = \pi 4 8 . 3,14$

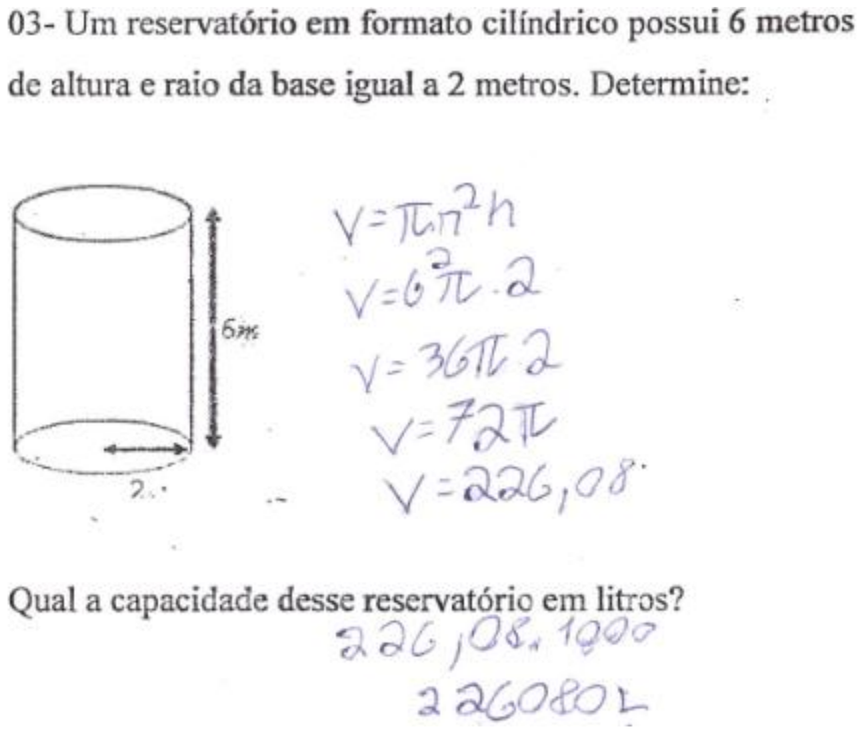
$V = \pi\ 150,72\ m^3$

$V = 150,720\ L$

Qual a capacidade desse reservatório em litros?

Ainda na questão 3, o aluno A4 cometeu erro total , pois não apresentou a fórmula correta, apresentando de forma insatisfatória os cálculos, além disso não fez a transformação correta da unidade de medida.

Figura 46: Justificativa apresentada pelo aluno A29 na questão.



03- Um reservatório em formato cilíndrico possui 6 metros de altura e raio da base igual a 2 metros. Determine:

6m

$V = \pi . r^2 h$

$V = 6^2 \pi . 2$

$V = 36\pi\ 2$

$V = 72\pi$

$V = 226,08$

Qual a capacidade desse reservatório em litros?

226,08 . 1000

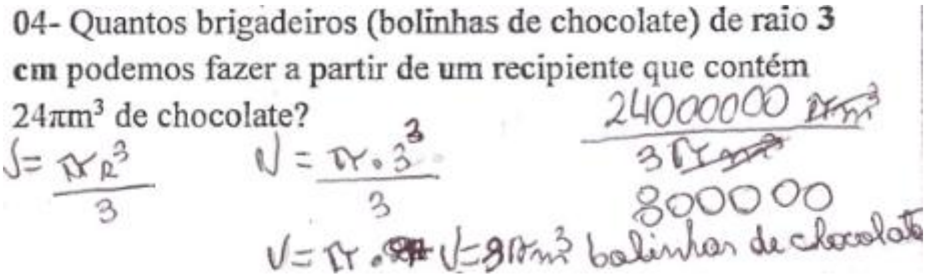
226080 L

A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 4:

O aluno A29, apresentou a fórmula corretamente, mas substituiu de maneira errada as medidas indicada na figura 00, ou seja, trocou o valor do raio pela da altura na fórmula tendo único aproveitamento a fórmula que calcula o volume do cilindro.

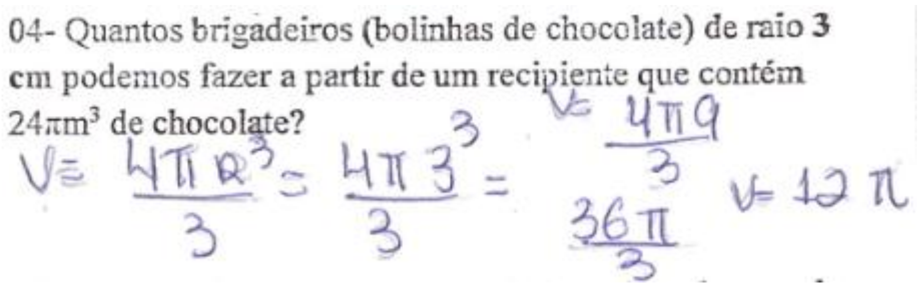
A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 4:

Figura 47: Justificativa apresentada pelo aluno A3 na questão.



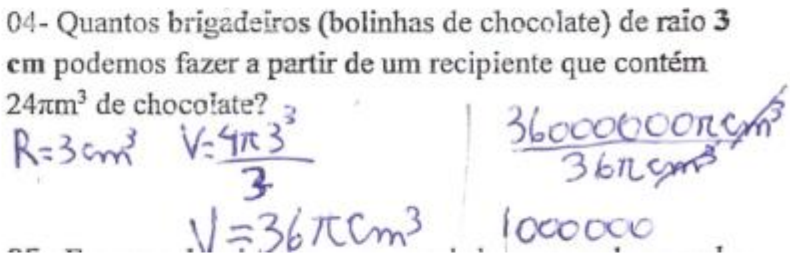
O aluno A3, não utilizou a fórmula correta, pois esqueceu o 4 (quatro) na fórmula do volume da esfera e também fez os cálculos errados, não tendo nenhum aproveitamento na questão.

Figura 48: Justificativa apresentada pelo aluno A5 na questão.



Já o aluno A5, apresentou corretamente a fórmula do volume da esfera, substituiu corretamente, mas os valor encontrando ainda está com a divisão por 3, errando assim o resultado do volume da esfera, além de não interpretar corretamente a questão transformando de cm3 para m3 efetuando assim a quantidade de brigadeiros que poderiam ser feito. Seu aproveitamento foi parcial, pois substituiu os valores de maneira correta e errou no fim do cálculo esquecendo o número 3.

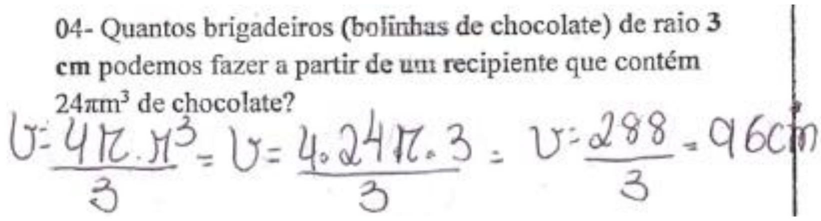
Figura 49: Justificativa apresentada pelo aluno A18 na questão.


04- Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio **3 cm** podemos fazer a partir de um recipiente que contém $24\pi m^3$ de chocolate?

$R=3cm^3$ $V=\frac{4\pi 3^3}{3}$ $V=36\pi cm^3$ | $\frac{3600000\pi cm^3}{36\pi cm^3}$ 1000000

O aluno A18, encontrou corretamente o volume da esfera só que cometeu erros de interpretação na hora de dá o resultado final, ou seja, fez a transformação do resultado como se tivesse transformado em metro cúbico e, além disso, dividiu por si mesmo, deixando de lado o $24\pi m^3$, recebendo com isso um acerto parcial na questão.

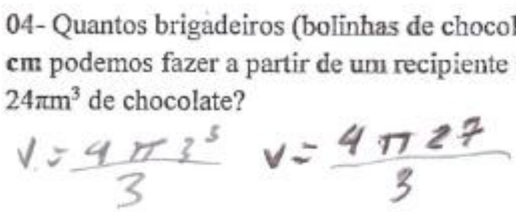
Figura 50: Justificativa apresentada pelo aluno A6 na questão.


04- Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio **3 cm** podemos fazer a partir de um recipiente que contém $24\pi m^3$ de chocolate?

$V=\frac{4\pi.\pi^3}{3} = V=\frac{4.24\pi.3}{3} = V=\frac{288}{3} = 96cm$

Ainda na questão 4, o aluno A6, escreveu uma fórmula em que aparece o raio no lugar do π e também substituiu os valores erradamente nessa fórmula, justificando de maneira errada o que a questão pedia. Com isso não teve nenhum aproveitamento.

Figura 51: Justificativa apresentada pelo aluno A22 na questão.

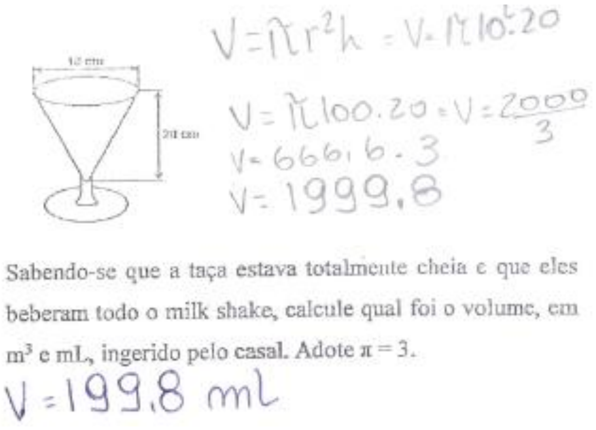

04- Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio **3 cm** podemos fazer a partir de um recipiente que contém $24\pi m^3$ de chocolate?

$V=\frac{4\pi 3^3}{3}$ $V=\frac{4\pi 27}{3}$

Já o aluno A22, substituiu os valores na fórmula de maneira correta, mas não concluiu o cálculo e nem apontou o resultado como a questão pedia , obtendo com isso um aproveitamento parcial.

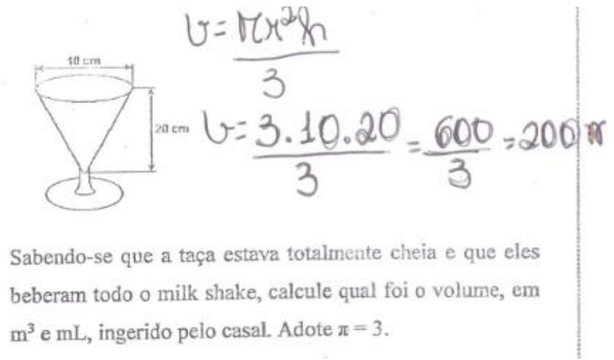
A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 5:

Figura 52: Justificativa apresentada pelo aluno A12 na questão.



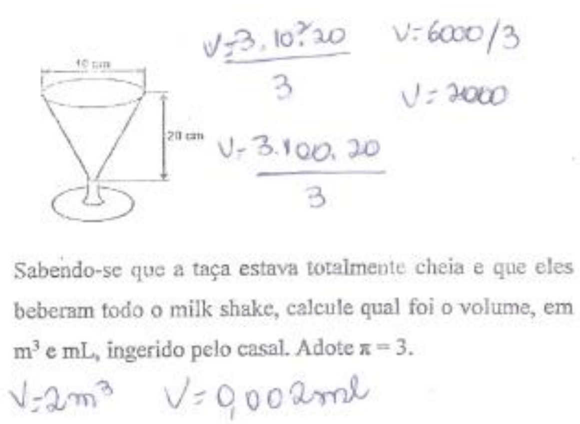
Nessa questão o aluno A12, cometeu vários erros entre eles a apresentação da fórmula correta, a substituição do raio (ele colocou o valor do diâmetro), em fim não teve aproveitamento na questão, pois sua justificativa de resposta está insatisfatória.

Figura 53: Justificativa apresentada pelo aluno A6 na questão.



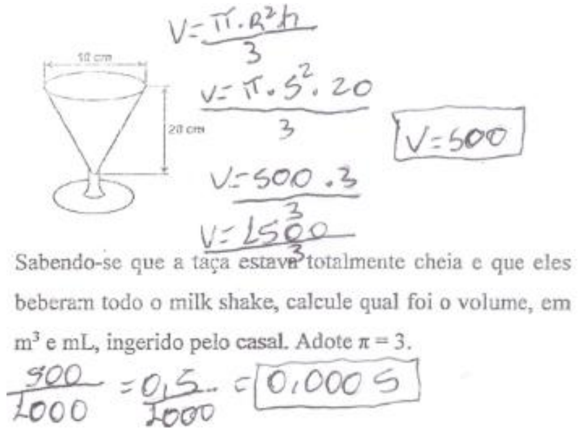
Já o aluno A6, escreveu de maneira correto a fórmula, mas a substituição do valor do raio está incorreta (mais uma vez colocou o valor do diâmetro ao invés do raio). Teve um aproveitamento parcial, também ele não interpretou corretamente o texto, houve também erro na transformação da unidade de volume.

Figura 54: Justificativa apresentada pelo aluno A10 na questão.



O aluno A10, também errou na substituição do valor do raio na fórmula e na interpretação do enunciado tendo um pouquíssimo aproveitamento, ou seja, sua resposta com condiz com o enunciado e o único aproveitamento foi a apresentação da fórmula.

Figura 55: Justificativa apresentada pelo aluno A20 na questão.



Ainda na questão 4, o aluno A20 resolveu corretamente a questão quanto ao cálculo do volume, mas errou na transformação da unidade de medida de cm^3 para m^3 e de cm^3 para ml. Obteve um aproveitamento parcial.

A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 6:

Figura 56: Justificativa apresentada pelo aluno A27 na questão.

06- Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado quantas bolinhas?

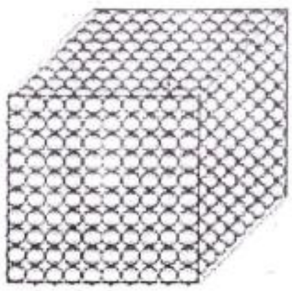
$10 \times 10 = 100$

Nessa questão, apenas dois alunos não acertaram integralmente, o aluno A27 usou erroneamente a noção de área para calcular o volume de um cubo com 10 bolinhas de lado, obtendo 100 bolinhas quando na verdade seriam 1000 bolinhas. Foi considerado aproveitamento parcial, pois faltou a multiplicação por 10 novamente.

Figura 57: Justificativa apresentada pelo aluno A30 na questão.

06- Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado quantas bolinhas?

$9 \times 10 \times 10 = 900.$



O aluno A30, contou 9 bolinhas em uma das faces, o que fez com que ele errasse no cálculo e tivesse um aproveitamento parcial na sua justificativa.

A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 7:

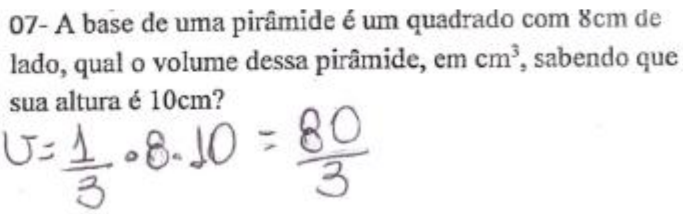
Figura 58: Justificativa apresentada pelo aluno A12 na questão.

07- A base de uma pirâmide é um quadrado com 8cm de lado, qual o volume dessa pirâmide, em cm^3, sabendo que sua altura é 10cm?

$V = \frac{1}{3} = Ab \cdot h = V = \frac{1}{3} 100 \cdot 8 = V = \frac{800}{3} cm^3$

Nesta questão, o aluno A12 escreveu corretamente as fórmulas, mas ‘’confundiu’’ o lado do quadrado com a altura da pirâmide, ou seja, fez a altura 10 como e encontrou uma área errado 100. Obteve o aproveitamento parcial da questão.

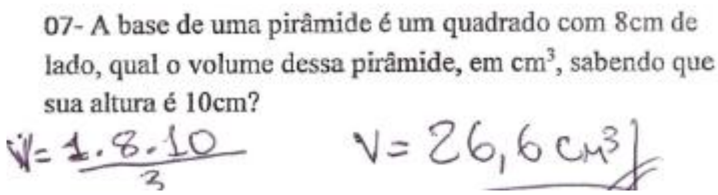
Figura 59: Justificativa apresentada pelo aluno A6 na questão.


07- A base de uma pirâmide é um quadrado com 8cm de lado, qual o volume dessa pirâmide, em cm^3, sabendo que sua altura é 10cm?

$V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 10 = \frac{80}{3}$

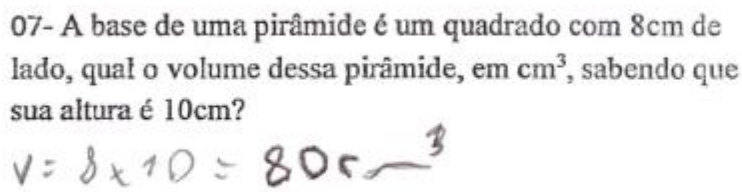
Já o aluno A6, substituiu de maneira errado a área, isto é colocou o lado do quadrado sem fazer a área, além de não interpretar corretamente o texto; daí obter um aproveitamento parcial da questão.

Figura 60: Justificativa apresentada pelo aluno A8 na questão.


07- A base de uma pirâmide é um quadrado com 8cm de lado, qual o volume dessa pirâmide, em cm^3, sabendo que sua altura é 10cm?

$V = \frac{1 \cdot 8 \cdot 10}{3}$ $V = 26{,}6\ cm^3$

Figura 61: Justificativa apresentada pelo aluno A22 na questão.

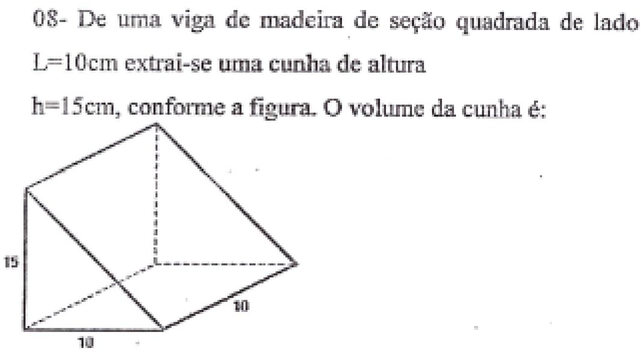

07- A base de uma pirâmide é um quadrado com 8cm de lado, qual o volume dessa pirâmide, em cm^3, sabendo que sua altura é 10cm?

$V = 8 \times 10 = 80cm^3$

Esse aluno errou completamente a questão, porque ele multiplicou duas medidas indicadas no texto, não tendo assim uma justificativa que seja satisfatória para o acerto da questão.

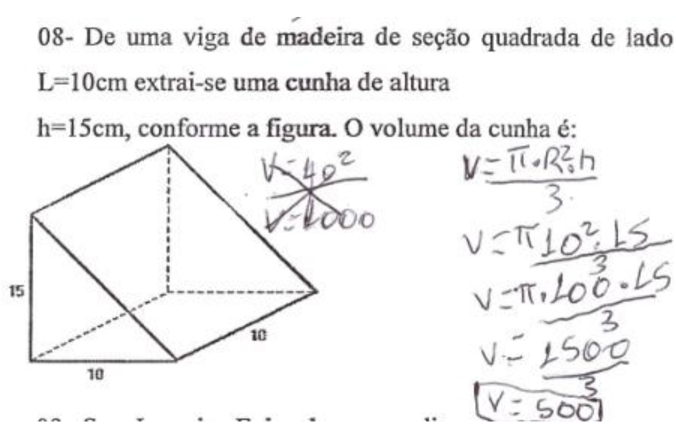
A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 8:

Figura 62: Justificativa apresentada pelo aluno A13 na questão.



Alguns alunos como o aluno A13, deixaram a questão 8 em branco, talvez por não identificarem qual seria o sólido ou até mesmo por esquecimento da fórmula. Sem justificativa apresentada não obteve nenhum aproveitamento.

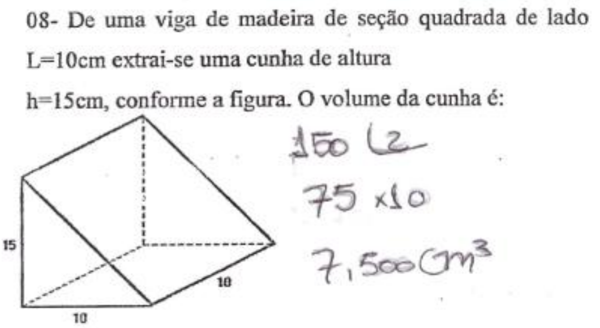
Figura 63: Justificativa apresentada pelo aluno A22 na questão.



Já o aluno A22, trocou a fórmula do prisma pela fórmula do cone, não tendo nenhum aproveitamento na questão, pois sua justificativa de resposta não condiz com o que pede a questão.

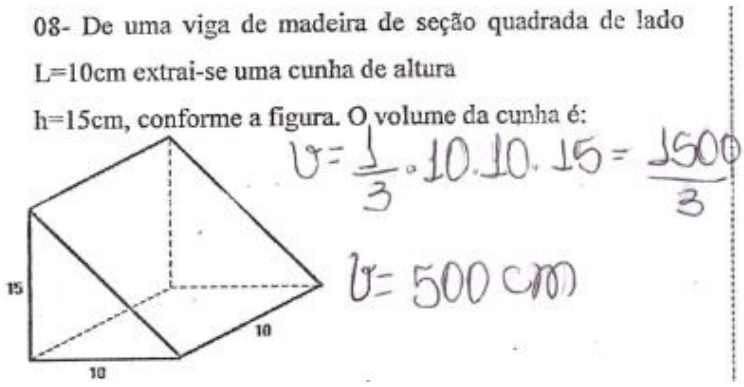
A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 8:

Figura 64: Justificativa apresentada pelo aluno A2 na questão.



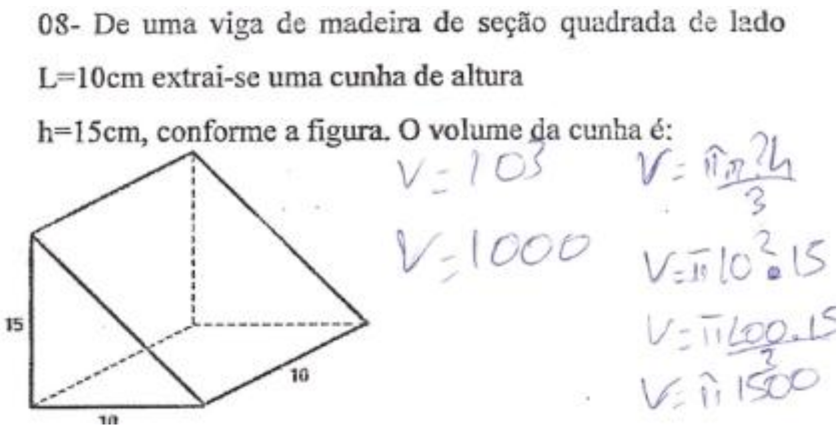
Nessa questão o aluno A2, resolveu de maneira direta, isto e, sem apresentar a fórmula, percebe-se que encontrou a área da base 75 e depois multiplicou por 10. O pequeno erro aconteceu no final, pois seus cálculos deram como resultado final duas decimais a menos do que a resposta correta, porém obteve um acerto parcial da questão.

Figura 65: Justificativa apresentada pelo aluno A6 na questão.



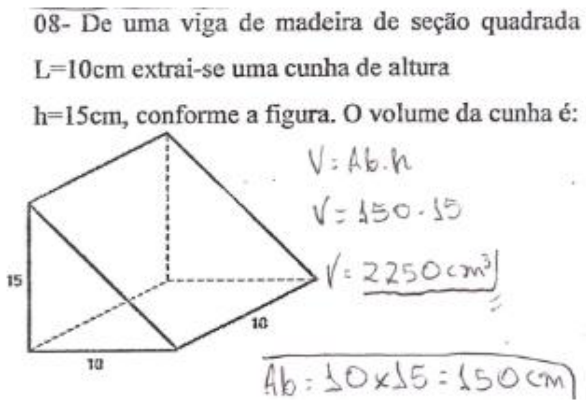
Já o aluno A6, juntou a área da base com a altura, só que ao invés de dividir por 2 (Área do triangulo= base x altura:2) ele dividiu por 3, obtendo como resultado um número diferente do resultado correto. Resposta incorreta, pois sua justificativa de resposta não condiz com o que pede a questão.

Figura 66: Justificativa apresentada pelo aluno A12 na questão.



Nesta justificativa, o aluno A12 escreveu a fórmula de maneira incorreta, “confundindo” o volume do prisma com a da esfera, não tendo assim nenhum aproveitamento na questão.

Figura 67: Justificativa apresentada pelo aluno A19 na questão.



Nesta justificativa o aluno A19, apresentou a fórmula corretamente, porém na substituição d área da base não considerou que era um triângulo e não dividiu por 2, além de ter multiplicado por 15 ao invés de 10. Resposta com acerto parcial pelo emprego da fórmula correta.

A seguir, o erro apresentado pelos alunos na questão 9:
O aluno A16, não fez nenhuma justificativa e deixou a questão 9 em branco e por isso não teve nenhuma pontuação.

Figura 68: Resposta apresentada pelo aluno A6 na questão.

09- Seu Joaquim Foi colocar gasolina no seu carro, que estava com o tanque pela metade. Colocou 35 litros e encheu o tanque. Qual é a capacidade do tanque em m^3?

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\,35 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \frac{70}{2} = 35\,\ell$$

Já o aluno A6, resolveu de maneira parcial, pois só fez a primeira parte que foi encontrar a capacidade, faltou transformar de litro para m^3. Sua justificativa foi parcialmente correta.

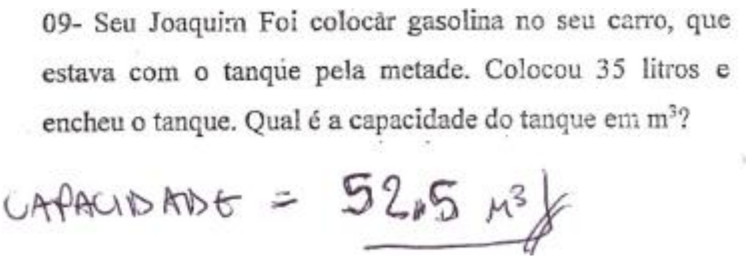
Figura 69: Justificativa apresentada pelo aluno A27 na questão.

09- Seu Joaquim Foi colocar gasolina no seu carro, que estava com o tanque pela metade. Colocou 35 litros e encheu o tanque. Qual é a capacidade do tanque em m^3?

V = 35 . 35 . 35
V = 42 . 875

O aluno A27, interpretou erroneamente o enunciado e utilizou a fórmula do cubo. Não tendo nenhum aproveitamento na sua justificativa.

Figura 70: Justificativa apresentada pelo aluno A13 na questão.

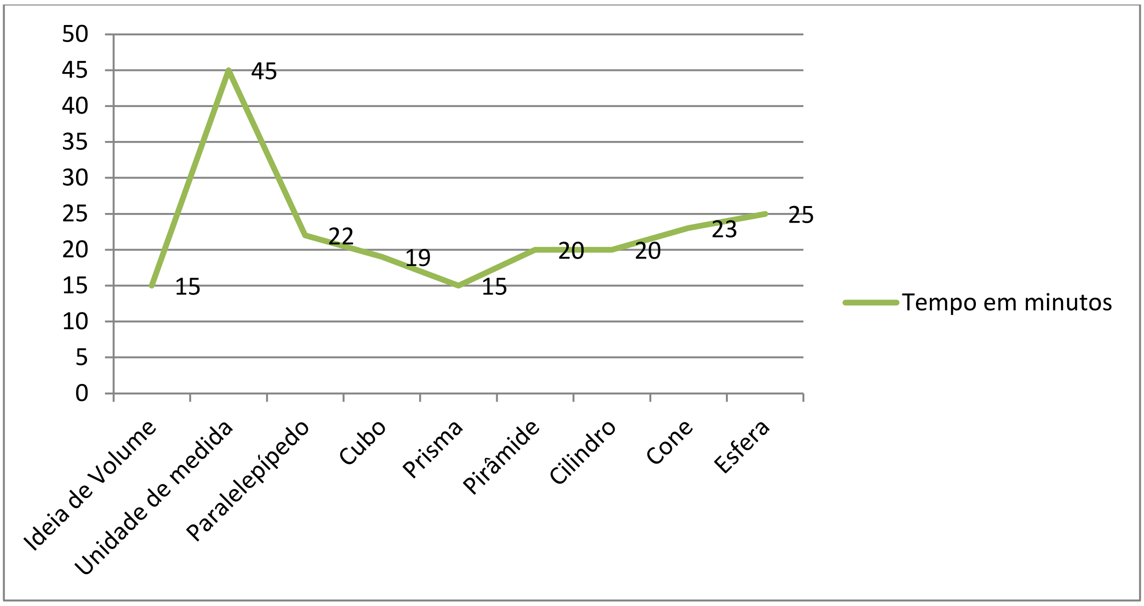


Já o aluno A13, também interpretou erradamente o texto e sua justificativa presumi-se que ele somou a metade de 35 com o 35, não tendo nenhum aproveitamento na questão.

Todos os alunos conseguiram de maneira integral o acerto na questão 10.

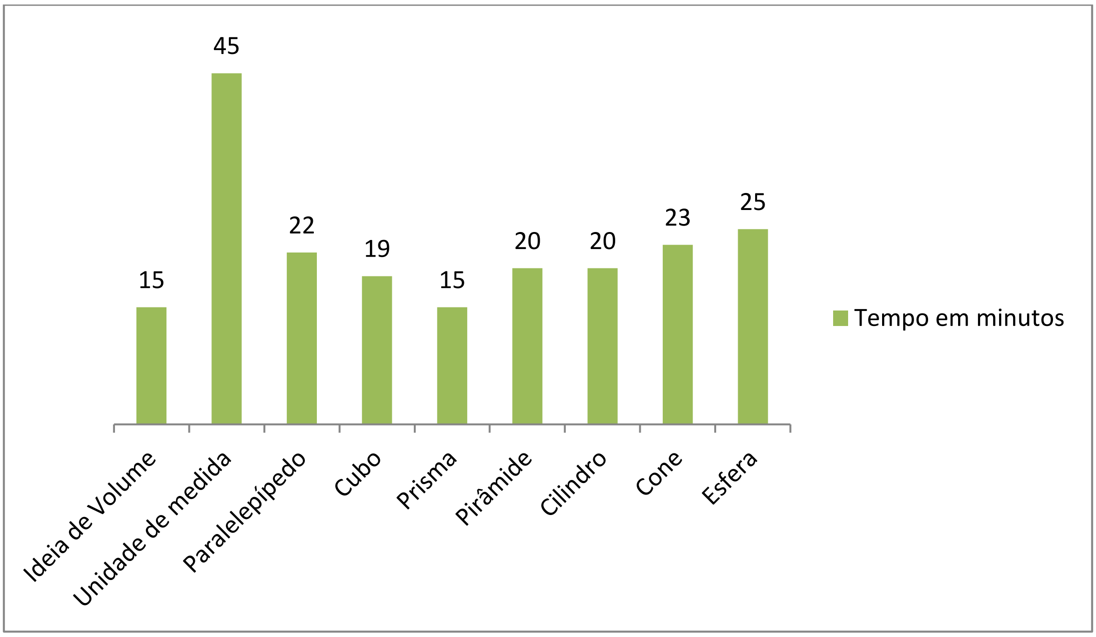
Durante as atividades desenvolvidas pelos alunos na fase de experimento, contamos o tempo de duração de cada atividade sem o exercício de aprofundamento, o tempo foi cronometrado até que a ultimas duplas ou trio tivesse encontrado a fórmula. Vale ressaltar que tivemos encontros que nem todos os alunos conseguiram chegar numa conclusão correta, mas como foram esgotadas todas as possibilidades intervimos dando dicas para que conseguissem concluí suas tarefas, por isso que o tempo foi bem maior em algumas atividades como na unidade de medidas, na fórmula da esfera e do cone, como mostra os gráficos a seguir:

Gráfico 17: Tempo de desenvolvimento das atividades sem o exercício de aprofundamento.



Fonte: Experimento (Ago/Nov 2017)

Gráfico 18: Tempo de desenvolvimento das atividade sem o exercício de aprofundamento.

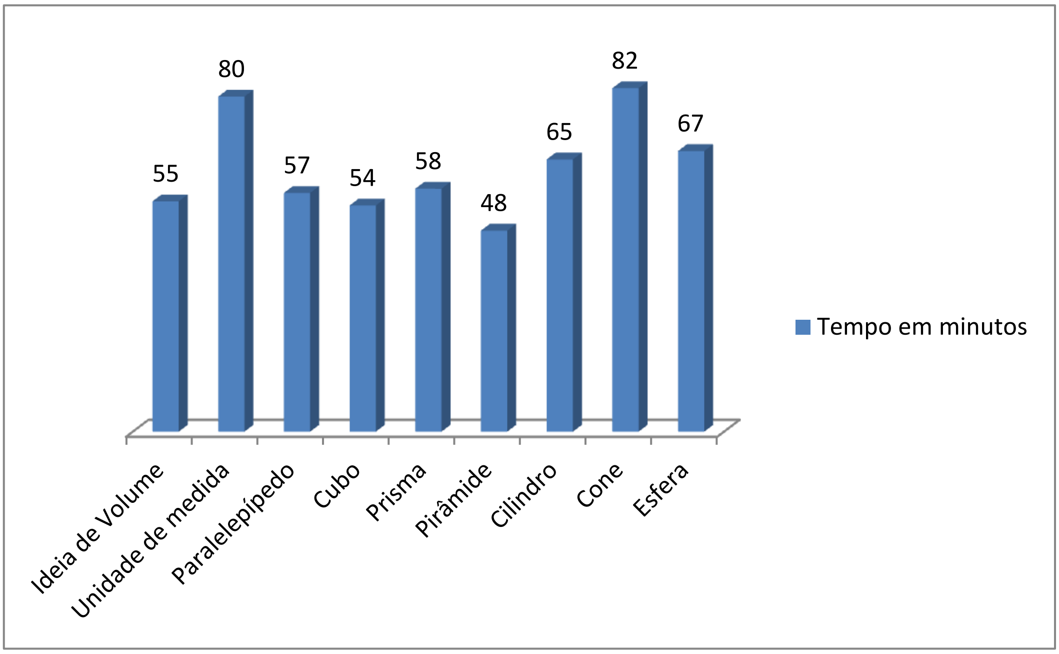


Fonte: Experimento (Ago/Nov 2017)

Ainda no decorrer de cada encontro, durante as sessões de aplicações da atividade de cálculo de volume de sólidos geométricos, registramos o tempo de duração de cada atividade com os exercícios de aprofundamento. Vale observar aqui que o tempo contado é referente a descoberta das fórmulas e a resolução dos exercícios de aprofundamento, e as atividades foram feitas basicamente em duplas.

No gráfico 19 podemos visualizar o tempo médio de efetiva atividade, descoberta da fórmula e exercício de aprofundamento. Analisando o tempo de atividade de cada encontro, percebemos que algumas tiveram o tempo maior do que o outro, esse fato ocorreu não necessariamente devido a descoberta de fórmulas, mas sim as dificuldades encontradas pelos alunos nos exercícios de aprofundamento; nota-se que a partir da atividade, ideia de volume, o tempo médio teve poça diferença, já os sólidos redondos apresentaram um tempo médio de duração maior em relação aos outros.

Gráfico 19: Tempo total de desenvolvimento das atividades.



Fonte: Experimento (out/Nov 2017)

O pós-teste é considerado uma possibilidade dos alunos exercitarem seus conhecimentos adquiridos no experimento e também de testar seu desenvolvimento exercitado nos exercícios de aprofundamento e socializado durante as sessões de ensino.

As atividades propostas na sequencia didática deste trabalho, necessitaram de um pouco mais de atenção, o que apesar de alguns momentos de descontração promovidos por alguns alunos, não chegaram a ser um fator negativo, e sim um momento de dedicação colocado a prova pela maioria dos alunos, pois mesmo aqueles que não alcançavam o objetivo da atividade, se esforçava para tal amenizadas as dificuldades iniciais nessa turma, os alunos conseguiram desenvolver bem as atividades, pois o caráter linear e sequencial das atividades proposta por Sá (2009) e Fossa (2000), foi essencial para o sucesso das mesmas.

Esse caráter sequencial e linear das atividades despertou nos alunos o desejo de conseguir, de enfrentar desafios, pois após cada atividade o aluno evoluía positivamente usando os conhecimentos adquiridos anteriormente e descobrindo novos desafios nas atividades presente e assim sucessivamente. Este fato instigava ainda mais os alunos a quererem encontrar as fórmulas, quando se tornava muito difícil, intervíamos, com sugestões ou questionamentos que pudessem despertar os alunos, não mostrando a relação pronta, mas sim dando dicas que levam a maneira correta de encontrar a fórmula, como por exemplo, na atividade do cone e da esfera no qual tivemos que intervi dando algumas ideias. Dentre as atividades consideradas mais difíceis estavam à atividade com as unidades de medidas e aquelas que necessitavam da descoberta da fórmula para o cálculo de volume do cone e da esfera.

De modo geral a maioria dos alunos conseguiu redescobrir e enunciar as fórmulas para o cálculo de volume dos principais sólidos geométricos, sem que nós enunciássemos estas oralmente. Após o desenvolvimento da seção de aprendizagem, iniciaram a seção de fixação na qual foi aplicado com questões retiradas dos principais vestibulares do país, além da prova Brasil e Enem. Isso teve fundamental importância para o sucesso da sequencia didática, onde os alunos sentiram-se a vontade para validar suas redescobertas nas atividades e de maneira descontraída contribuir ainda mais para sua aprendizagem em matemática.

O quadro a seguir mostra o aproveitamento de aluno por aluno no Pós- teste, considerando os 30 alunos que participaram da pesquisa e do experimento. Para cada questão foi atribuído nota que vai de 0 a 10 pontos; a questão número 1 (ideia de volume) foi considerado a estratégia dos alunos na resolução da questão; para o acerto de 100% da questão, era necessário que o aluno colocasse a unidade de medida no final do cálculo, para as questões que pedisse cálculo de volume, senão era considerado acerto parcial (75%).

Mostremos agora os gráficos referente as questões do Pós- Teste e Pré- teste, considerando A como acerto total, AP acerto parcial e EB questão em Branco ou erro total:

Quadro 31: Aproveitamento dos alunos, por questão, no Pós-teste.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
A1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A2	A	A	AP	AP	AP	A	AP	AP	A	A
A3	A	A	A	AP	EB	A	AP	A	A	A
A4	A	A	EB	AP	AP	A	EB	A	A	A
A5	A	AP	A	AP	AP	A	AP	A	A	A
A6	AP	A	AP	AP	AP	A	AP	AP	AP	A
A7	A	A	AP	AP	AP	A	AP	AP	A	A
A8	EB	A	A	AP	EB	A	AP	EB	A	A
A9	A	A	A	AP	AP	A	A	A	AP	A
A10	A	A	A	A	AP	A	A	A	A	A
A11	A	A	A	AP	AP	A	AP	A	A	A
A12	EB	A	AP	AP	EB	A	AP	A	A	A
A13	A	A	AP	AP	EB	A	EB	AP	EB	A
A14	EB	A	AP	AP	AP	A	A	AP	AP	A
A15	A	A	A	AP	AP	A	A	AP	AP	A
A16	A	A	AP	AP	AP	A	EM	AP	EB	A
A17	A	A	AP	AP	AP	A	AP	AP	A	A
A18	A	A	A	AP	AP	A	A	A	A	A
A19	A	A	A	A	AP	A	A	AP	A	A
A20	A	AP	A	A	AP	A	A	AP	A	A
A21	A	A	A	AP	AP	A	AP	A	A	A
A22	AP	A	AP	AP	AP	A	AP	A	EB	A
A23	A	A	A	AP	AP	A	AP	A	A	A
A24	A	A	AP	AP	AP	A	AP	A	A	A

A25	A	AP	A	A	AP	A	AP	A	A	A
A26	A	AP	A	A	AP	A	AP	A	A	A
A27	A	A	A	AP	EM	AP	AP	AP	EB	A
A28	A	A	A	AP	A	A	A	A	A	A
A29	A	A	AP	AP	A	A	A	A	A	A
A30	A	A	A	AP	EB	AP	A	A	A	A

Fonte: Experimento (out/Nov 2017)

Quadro 32: Aproveitamento dos alunos, por questão, no Pós-teste.

	Q1	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**	**Q9**	**Q10**
A1	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
A2	10	10	7,5	5	5	10	5	7,5	10	10
A3	10	10	10	7,5	0	10	2,5	10	10	10
A4	10	10	0	5	7,5	10	0	10	10	10
A5	10	7,5	10	5	7,5	10	2,5	10	10	10
A6	5	10	5	5	2,5	10	5	5	5	10
A7	10	10	2,5	5	7,5	10	5	2,5	10	10
A8	0	10	10	5	0	10	5	0	10	10
A9	10	10	10	7,5	5	10	10	10	7,5	10
A10	10	10	10	10	2,5	10	10	10	10	10
A11	10	10	10	5	5	10	2,5	10	10	10
A12	0	10	2,5	5	0	10	5	0	10	10
A13	10	10	5	5	2,5	10	0	5	0	10
A14	0	10	2,5	5	5	10	10	5	10	10

A15	10	10	10	5	5	10	10	5	10	10
A16	10	10	2,5	2,5	7,5	10	0	2,5	0	10
A17	10	10	2,5	5	7,5	10	2,5	2,5	10	10
A18	10	10	10	5	0,75	10	10	10	10	10
A19	10	10	5	10	7,5	10	10	5	10	10
A20	10	5	10	10	7,5	10	10	5	10	10
A21	10	10	10	5	5	10	5	10	10	10
A22	7,5	10	2,5	5	5	10	0	10	0	10
A23	10	10	10	5	5	10	0	10	10	10
A24	10	10	2,5	5	2,5	10	2,5	10	10	10
A25	10	7,5	10	10	5	10	2,5	10	10	10
A26	10	5	10	10	2,5	10	5	10	10	10
A27	10	10	5	2,5	0	5	2,5	5	0	10
A28	10	10	10	2,5	10	10	10	10	10	10
A29	10	10	2,5	5	10	10	10	10	10	10
A30	10	10	5	5	0	5	10	10	10	10

Fonte: Experimento (out/Nov 2017)

Conforme observado no quadro 29, a questão Q6 e Q10 foram resolvidas praticamente por todos os alunos, uma vez que os alunos tiveram um bom entendimento no experimento sobre o cálculo de volume do cubo nessas duas questões. Já a questão Q4 foi a que teve o menor desempenho, pois observamos que muitos dos alunos tiveram dificuldades na interpretação do texto na questão. As demais questões foram resolvidas de maneira muito satisfatória e produtiva, confirmando o bom aprendizado durante os experimentos.

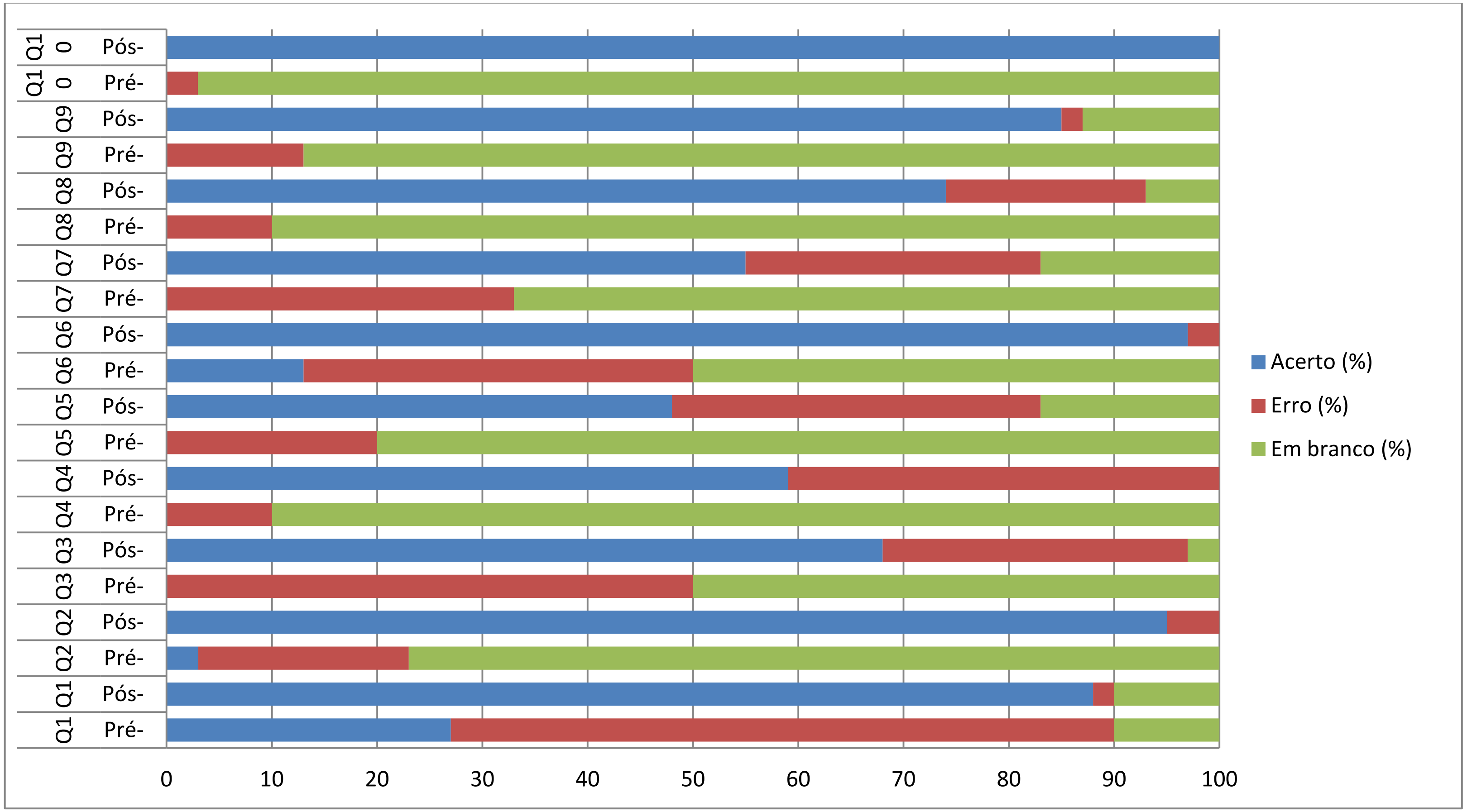
Agora, mostraremos o desempenho dos discentes no Pós- teste em comparação com o Pré-teste.

Quadro 33: Síntese do desempenho nos diagnósticos

	Acerto (%)		**Erro (%)**		**Em branco (%)**	
Questão	Pré-	**Pós-**	Pré-	**Pós-**	Pré-	**Pós-**
1ª	27	88	63	2	10	10
2ª	3	95	20	5	77	0
3ª	0	68	50	29	50	3
4ª	0	59	10	41	90	0
5ª	0	48	20	35	80	17
6ª	13	97	37	3	50	0
7ª	0	55	33	28	67	17
8ª	0	74	10	19	90	7
9ª	0	85	13	2	87	13
10ª	0	100	3	0	97	0

Fonte: Experimento (Out/Nov 2017)

Gráfico 20: Síntese do desempenho nos diagnósticos



Fonte: Experimento (Out/Nov 2017)

Dos quadros (29 e 30) e do gráfico 21, observamos que houve uma significativa melhora no desempenho dos alunos no Pós- teste, depois que eles fizeram as atividades de experimento. O aproveitamento foi significativo por que os alunos tiveram a oportunidade de colocar em prática as suas descobertas, algumas dificuldades com a interpretação dos textos das questões eles tiveram, mas a essência da atividade que foi saber calcular o volume dos principais sólidos geométricos eles tiveram com êxito.

O bom desempenho dos alunos após a aplicação da sequencia didática foi visível em todas as questões, porém um fato observado foi que dentre a percentagem de alunos que acertaram as questões no pós-teste, a maioria declarou gostar de matemática, porém sentem dificuldades com a disciplina. O que nos fez pensar que a relação dos alunos com a disciplina de matemática está mudando, porém cabendo aos professores de matemática, ir à busca de novos métodos e estratégias de ensino que venha contribuir com a aprendizagem dos alunos diminuindo assim suas dificuldades com relação a esta disciplina.

Quanto ao desempenho por aluno no pré- teste e pós- teste, a evolução do aprendizado no experimento foi muito significativa, conforme mostra a tabela a seguir:

Quadro 34: Síntese do desempenho por estudante nos diagnósticos

Estudantes	**Acerto (%)**		**Erro (%)**		**Em branco (%)**	
	Pré-	Pós-	Pré-	Pós-	Pré-	Pós-
A1	10	100	30	0	60	0
A2	0	80	30	20	70	0
A3	0	80	20	10	80	10
A4	0	73	20	7	80	20
A5	0	83	30	17	70	0
A6	0	63	10	37	90	0
A7	0	73	10	27	90	0
A8	0	60	30	10	70	30
A9	0	90	40	10	60	0
A10	0	93	30	7	70	0
A11	0	83	20	17	80	0
A12	0	53	20	17	80	30
A13	0	58	40	22	60	20
A14	0	68	10	22	90	10
A15	0	85	50	15	50	0
A16	0	55	0	25	100	20

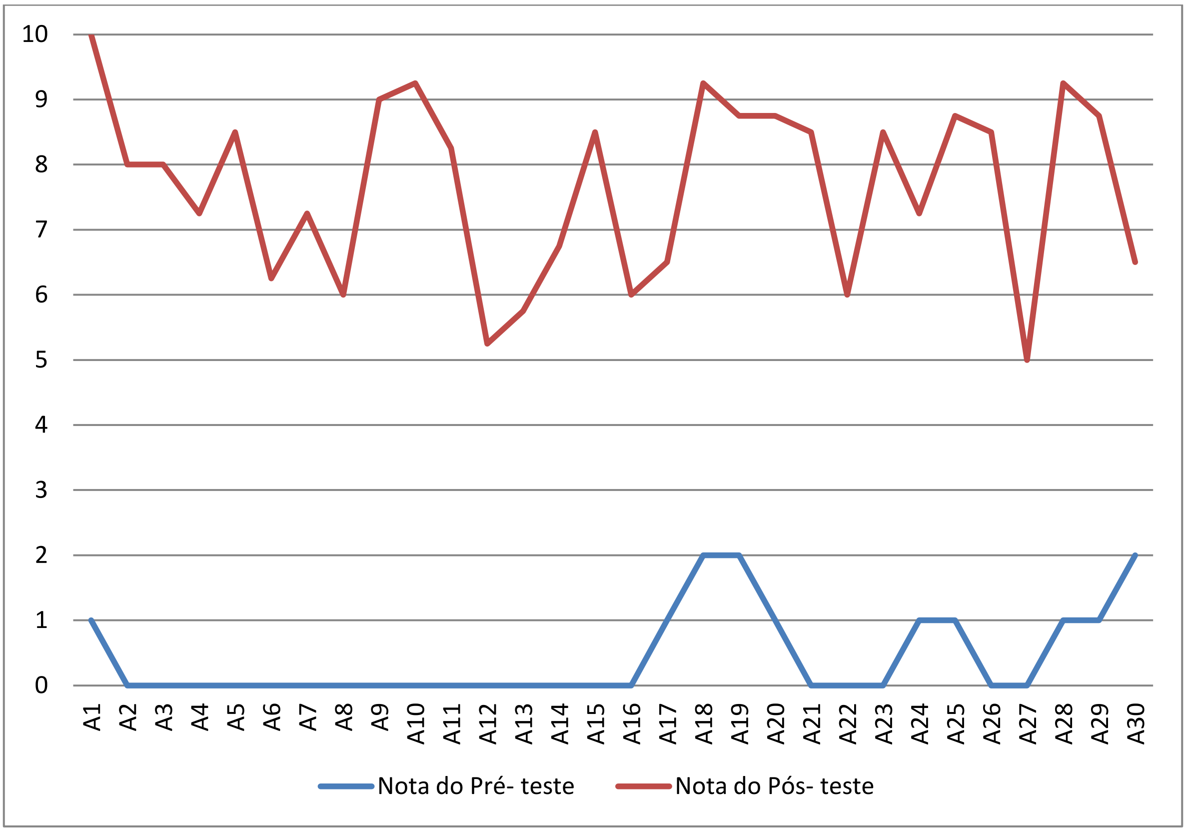
A17	10	70	10	30	80	0
A18	20	88	40	12	40	0
A19	20	88	50	12	30	0
A20	10	88	30	12	60	0
A21	0	85	0	15	100	0
A22	10	60	30	20	60	20
A23	0	80	20	10	80	10
A24	10	73	30	27	60	0
A25	10	85	20	15	70	0
A26	0	83	40	17	60	0
A27	0	50	0	30	100	20
A28	10	93	40	7	50	0
A29	10	88	30	12	60	0
A30	20	75	40	15	40	10

Fonte: Experimento (out/Nov 2017)

No pré- teste, observamos que a grande maioria das questões foi deixada em branco, a exceção foi a questão Q1 que não envolvia cálculos diretos e sim a ideia de volume. Essas questões deixadas em branco foram pelo desconhecimento dos alunos a respeito do assunto, pois todos declararam não ter estudado o assunto no questionário, usaram apenas o conhecimento de vivência nas escolas.

Os alunos A1, A17, A18, A19, A20, A22, A24, A25, A28, A29 e A30 foram os únicos que conseguiram pontuação no pré- teste, os demais não tiveram aproveitamento nenhum, ou seja, deixaram as questões em branco ou fizeram erradas as questões. O aproveitamento no pré – teste é muito pequeno em comparação com o pós-teste. Vejamos no gráfico esse desempenho.

Gráfico 21: Comparação entre o desempenho no Pré- Teste e Pós- Teste



Fonte: Experimento (out/Nov 2017)

Ao analisar atentamente o gráfico, podemos tirar algumas conclusões, foram muitas notas zeros no Pré-teste e a evolução no Pós- teste foi muito significativa, a média geral ficou em 7,7. Observa-se que os alunos que tiraram médias abaixo da média geral foi aqueles que não participaram de todos os experimentos por algum motivo, ou ausência de transporte para alguns ou período que a escola estava em greve e alguns não sabiam se haveria aula ou não em fim, deixou de vim para o experimento em determinado encontro, como se observa a seguir:

Quadro 35: Ilustração da frequência dos alunos durante os experimentos

Atividades												
ALUNOS	**Pré-teste**	**Ideia de volume**	**Unidade de medida**	**Volume do paralelepípedo**	**Volume do cubo**	**Volume do Prisma**	**Volume da Pirâmide**	**Volume do Cilindro**	**Volume do Cone**	**Volume e da Esfera**	**Revisão**	**Pós-Teste**
A1	P	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	***10,00***
A2	P	P	P	P	F	F	P	F	P	P	P	***8,00***
A3	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	***8,00***
A4	P	P	F	F	F	P	P	P	P	P	P	***7,25***
A5	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	***8,50***
A6	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	***6,25***
A7	P	F	P	P	P	F	P	P	P	F	P	***7,25***
A8	P	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	***6,00***
A9	P	P	F	F	P	F	P	P	P	P	P	***9,00***
A10	P	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	***9,25***
A11	P	P	P	F	F	F	P	P	P	F	P	***8,25***
A12	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	P	***5,25***
A13	P	P	P	P	P	F	F	P	F	P	P	***5,75***
A14	P	P	P	P	P	F	P	F	P	F	P	***6,75***
A15	P	P	P	P	F	F	P	P	P	F	P	***8,50***
A16	P	P	P	P	F	F	F	F	F	P	P	***6,00***
A17	P	P	P	P	F	F	F	F	P	F	P	***6,50***
A18	P	P	P	F	F	F	P	P	F	P	P	***9,25***
A19	P	P	P	P	P	P	P	P	P	F	P	***8,75***
A20	P	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	***8,75***
A21	P	P	F	F	F	P	P	P	P	P	P	***8,50***
A22	P	F	P	P	F	F	F	P	P	F	P	***6,00***

A23	P	F	F	F	F	F	F	P	F	F	P	***8,50***
A24	P	P	F	F	F	F	P	P	F	P	P	***7,25***
A25	P	P	P	F	F	F	P	P	P	P	P	***8,75***
A26	P	P	P	F	F	F	P	P	P	P	P	***8,50***
A27	P	F	F	F	F	F	P	P	F	P	P	***5,00***
A28	P	P	P	P	P	F	P	P	F	P	P	***9,25***
A29	P	P	P	P	F	F	P	P	P	P	P	***8,75***
A30	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	P	***6,50***

Experimento (Ago/Nov 2017)

Ainda em relação ao gráfico que permite comparar o desempenho do Pré- teste e Pós-teste, selecionaremos os alunos que tiveram os melhores índices e faremos uma análise de seu perfil familiar. São eles A1, A9, A10, A18, A28.

Por esta tabela podemos perceber que um dos alunos que tirou as maiores notas tinha 18 anos, sem responsável masculino e a mãe trabalha como empregada doméstica, isso mostra que apesar das dificuldades, principalmente a familiar ele se encontra acima da média em relação a muitos que possui toda estrutura e recursos.

Outra constatação é a de que todos os cinco alunos possui pelo menos algum membro da família que trabalha e com exceção do A1, todos os responsáveis masculino tem uma profissão. São alunos jovens entre 16 e 18 anos em seus responsáveis tem ao menos o ensino fundamental.

Quadro 36: Perfil dos alunos que tiveram excelente aproveitamento no Pós-teste.

	A1	A9	A10	A18	A28
PROFISSÃO RF	Empregada Doméstica	Não trabalha	Professora	Empregada Doméstica	Não trabalha
PROFISSÃO RM	Não tem	Motorista	Pintor	Motorista	Pedreiro
RESP FEMININO	Mãe	Avó	Mãe	Mãe	Mãe
RESP MASCULINO	Não tem	Pai	Padrasto	Pai	Pai
SEXO	M	F	F	M	M
IDADE	18	16	16	15	16

Fonte: Experimento (Ago/Nov 2017)

A relação dos alunos com a matemática nos demonstrou que apenas um aluno demonstrou não ter nenhuma dificuldade com a matemática, os demais sentiam pelo menos um pouco de dificuldade. Todos os cincos alunos gostam apenas um pouco de matemática, demonstrando que não é sua disciplina preferida e dois deles se distrai durante as aulas de matemática com conversas paralelas ao assunto abordado.

Quadro 37: Relação dos alunos com a matemática que tiveram excelente aproveitamento no Pós-teste.

	A1	A9	A10	A18	A28
Quem lhe ajuda nas tarefas?	Ninguém	Ninguém	Ninguém	Pai, Mãe	Ninguém
Tempo de Estudo Para avaliação	Véspera de Prova	Alguns dias da semana (3 dias)	Véspera de Prova	Alguns dias da semana (4 dias)	Véspera de Prova
Repetiu alguma série no EM?	Não	Não	Não	Não	Não
Tem dificuldade em aprender Matemática	Um pouco	Um pouco	Um pouco	Um pouco	Não
Gosta de Matemática	Pouco	Pouco	Pouco	Pouco	Pouco
Você se distrai nas aulas de Matemática	Não	Não	Sim (conversas)	Sim (conversas)	Não

Fonte: Experimento (Ago/Nov 2012)

Importante observar que estes alunos demonstraram ter algum tipo de dificuldade com a matemática, no entanto, essas dificuldades foram superadas, pelo menos no que se refere a cálculo de volume de sólidos geométricos, pois os resultados mostram excelente aproveitamento no Pós- teste.

Apesar da escola onde foi feito o experimento, não oferecer suporte tecnológico para todos os estudantes, elaboramos uma sequencia didática voltada para a realidade dos alunos dessa escola, com o roteiro da atividade e questões de aprofundamento bem atual, vista nos principais centros de seleções do país. Levamos o material organizamos com os estudos de cada encontro de uma maneira que suprisse o auxílio tecnológico e favorecesse os seus aprendizados.

Durante o experimento tivemos algumas dificuldades no desenvolvimento do experimento, como aplicar a sequência nas últimas aulas com alguns alunos precisando sair mais cedo por conta do transporte escolar; a escola entrou em greve e em alguns encontros ficou difícil à participação de todos; e também considerando ainda o fato desses alunos nunca terem tido contato anteriormente com essa metodologia, sendo uma proposta inovadora, em que os alunos foram estimulados de uma maneira natural a buscar fórmulas e relações sem que os mesmos forem apresentados a eles, em fim dificuldades existiram, mas com tudo isso o aproveitamento foi relevante.

Segundo os resultados da aplicação da sequencia de atividades nos mostra que em todas as questões a percentagem de acertos no pós-teste foi mais de 77%, nos levando a considerar que o desempenho dos alunos com relação ao pré-teste foi bastante significativo, aumentando o potencial dos mesmos em resolver problemas de cálculo de volume e contribuindo positivamente para o aprendizado deste conteúdo, podendo ser adotado pelos professores como mais uma proposta de trabalho didático a ser inserindo em suas atividades.

Ao compararmos nosso trabalho atual com o feito no estudo diagnóstico, percebemos que o percentual de questões em branco no pós- teste caiu drasticamente.

Quadro 38- Resultados dos testes sobre cálculo de volume

Questão	Em Branco	Errado	Parcialmente Certo	Certo
01	34%	49%	0%	17%
02	35%	34%	0%	31%
03	64%	25%	2%	9%
04	81%	16%	0%	3%
05	49%	39%	2%	10%
06	85%	14%	1%	0%
07	83%	17%	0%	0%
08	84%	13%	2%	1%
09	76%	20%	1%	3%
10	80%	16%	1%	3%

Fonte: Pesquisa de Campo (2016)

Esses desempenhos insatisfatórios ocorridos neste trabalho, com ensino de volume, são problemas já conhecidos, entre eles, no insucesso com a disciplina no ensino fundamental, curso que os alunos adquirem conhecimentos de área e noções de espaço nos primeiros anos de estudo. Também a utilização de metodologias de ensino tradicionais que não consideram os avanços das teorias de aprendizagem.

Na realização desse estudo diagnóstico, foi escolhida uma amostra de 80 alunos do 3º ano do Ensino Médio, dos turnos noturno e vespertino de três escolas estaduais, localizadas na área urbana do município de Castanhal.

Já na realização do pós- teste, contamos com uma amostra de 30 alunos de uma escola pública de Castanhal, no qual foi feito uma atividade diferenciada em que o próprio aluno construía sua hipótese e fundamentação, o desempenho é mostrado a seguir e é muito positivo se comparando com o diagnóstico.

Quadro 39: Rendimento dos alunos no Pós- teste

Questões	Em Branco	Errado	Parcialmente Certo	Certo
1	0%	7%	7%	86%
2	0%	0%	14%	86%
3	3%	0%	47%	50%
4	0%	0%	83%	17%
5	10%	7%	73%	10%
6	0%	0%	7%	93%
7	3%	7%	47%	43%
8	3%	3%	37%	57%
9	3%	10%	7%	80%
10	0%	0%	0%	100%

Fonte: Experimento (Ago/Nov 2017)

Durante o experimento, buscamos garantir a eficácia da aprendizagem dos alunos com questões de aprofundamento e de testes totalmente contextualizados como é cobrado nos grandes centros de seleção como o Enem e prova Brasil; com isso além do conteúdo os alunos tiveram também que aprender a interpretar textos e propriedades. Podemos perceber também que o trabalho pedagógico que foi feito com alunos do 2° ano do Ensino Médio por meio de atividades, gerou um desempenho acima da média na resolução de questões envolvendo o cálculo de volume de sólidos geométricos, comprovando a hipótese.

A teoria das situações didáticas de Brousseau (2008) contribuiu positivamente para o bom desempenho desta pesquisa, e permitindo uma forma de controle das situações didáticas percebidas em sala de aula, considerando o contrato didático realizado entre o professor e os alunos, assim como as situações de ação, formulação, validação e institucionalização que foram primordiais para registrar os avanços, as dificuldades e possibilidades de amenização das duvidas e incertezas dos alunos no momento da experimentação.

A técnica de redescoberta, que norteou as atividades, causou nos alunos certo “espanto”, pois estes ficaram surpresos ao perceber que suas redescobertas estavam de acordo com as conclusões adotas pelos autores em seus livros didáticos, com isso concordamos com Sá (1999) à noz dizer que esta técnica é viável para trabalhos que tenha como objetivo: apresentar, propriedades, relações e regras.

Como forma de avanço destas atividades, o pesquisador considerou que esta surtiria ainda mais efeito na aprendizagem dos alunos, quando na seção de aprendizagem após a aplicação de cada atividade o professor realizasse em seguida o momento de institucionalização e após continuasse com a aplicação de um jogo da seção de fixação voltado à aprendizagem do cálculo de volume em questão. Acreditamos que adotando esta estratégia em sala de aula os professores conseguiram uma evolução na aprendizagem dos alunos ainda maior, podendo ser comprovada no momento da validação.

Ao finalizar nossa análise, temos que admitir que nossa metodologia trouxe para todos os alunos, algum tipo de benefício, foi uma método novo em que eles não estavam acostumados, sentiram algumas dificuldades, principalmente no início do experimento, mas a adaptação foi muito boa, tornaram-se através desse trabalho quase que independente, pois formularam suas próprias ideias; compreenderam que a matemática pode ser interessante a medida que se compreende o que está sendo estudado.

Em fim, sabemos que esse conteúdo não é visto com frequência nas escolas por ser um assunto muito técnico que exige muitas fórmulas e propriedades, dessa maneira ele é sempre deixado para as últimas avaliações ser der tempo e é um conteúdo muito rico pra ser deixado de lado. Assim nosso trabalho pode contribuí muito em aulas de geometria espacial, particularmente em aulas de Volume de sólidos Geométricos e suas unidades de medida.

5.3 CORRELAÇÂO ENTRE AS NOTAS DOS TESTES

Após fazermos as análises dadas pelos estudantes em relação aos conceitos trabalhados durante o experimento, analisaremos algumas variáveis obtidas no momento inicial do experimento, foram às informações colhidas através de questionário sócio-econômico dos participantes da pesquisa. A seguir, a correlação entre dificuldade em aprender matemática e as notas retiradas pelos participantes; as ternas ordenadas são respectivamente a identificação do aluno, a nota do Pré- teste e a nota do Pós- teste:

Quadro 40: Correlação entre dificuldade em aprender matemática e as notas retiradas pelos participantes

		DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA		
		Não	Um pouco	Muito
SUAS NOTAS DE MATEMÁTICA GERALMENTE SÃO?	Acima da média	(**A20;** 1,0; 8,75), (**A29**; 1,0 ; 8,75) (**A28**; 1,0; 9,25) (**A19**; 2,0 ; 8,75), (**A26**; 0,0; 8,5),	(**A1**; 1,0, 10), (**A9**; 0,0; 9,0) (**A10**; 0,0 ; 9,25), (**A11**; 00; 8,25), (**A15**;0,0; 8,85), (**A18**; 2,0; 9,25), (**A23**; 0,0 ; 8,5), (**A25**,1,0; 8,75),	(**A3**; 0,0 ; 8,0), (**A5**; 0,0 ; 8,25), (**A21**; 0,0 ; 8,5),
	Na média	(**A24**; 1,0; 7,25)	(**A2**; 0,0; 8,0), (**A4**; 0,0; 7,25), (**A7**; 0,0; 7,25)	
	Abaixo da média	(**A22**; 0,0 ; 6,0)	(**A8**; 0,0 ; 6,0), (**A13**; 0,0; 5,75), (**A14**; 0,0; 6,75), **A16** (00,; 6,0), (**A17**;1,0; 6,5),	(**A6**; 0,0; 6,25), (**A12**; 0,0; 5,25), (**A27**; 0,0 ; 5,0), (**A30**; 2,0 ; 6,5)

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A tabela acima mostra que 27% dos alunos (A1, A9, A10, A11, A15, A18, A23, A25), possuem um pouco de dificuldade em aprender Matemática, mas suas notas em Matemática geralmente são acima da média. Os alunos A3, A5 e A21 que se diziam ter muita dificuldade em aprender Matemática tiveram um desempenho acima da média em comparação com o pré-teste; os alunos A19, A20, A26, A28 e A29 que não tinham nenhuma dificuldade também tiraram notas acima da média.

Já os alunos A2 e A4 que se declararam ter um pouco de dificuldade tiraram notas na média; e o aluno A24, que não tinha dificuldade tirou uma nota na média. Também dentre os alunos que tiraram nota abaixo da média e que não tem dificuldades em matemática destaca-se o A22, os demais alunos que tem pouco ou muita dificuldade continuam com a nota abaixo média.

Dos alunos que se declararam não ter dificuldade em matemática (100%) o percentual está realmente acima da média (72%) em comparação com os demais colegas. Já os 100% dos alunos que se declararam ter um pouco de dificuldade também tiraram notas acima da média, 50% desses alunos. Também dos que se declararam ter muita dificuldade 43% tiraram notas excelentes.

A seguir apresentamos os dados referentes às notas, dificuldade em aprender matemática e o costume que os discentes têm de estudar matemática.

Quadro 41: Correlação entre dificuldade em aprender matemática e o costume que os discentes têm de estudar matemática.

		DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA		
		Não	Um pouco	Muito
VOCÊ COSTUMA ESTUDAR MATEMÁTICA FORA DA ESCOLA?	Só no período de prova	(**A26**; 0,0; 8,5), (**A29**; 1,0 ; 8,75)	(**A16**; 00; 6,0), (**A10**; 0,0 ; 9,25) (**A11**,00; 8,25), (**A8**; 0,0 ; 6,0), (**A2**; 0,0; 8,0), (**A25**,1,0; 8,75), (**A14**; 0,0; 6,75),	(**A5**; 0,0 ; 8,25), (**A21**; 0,0 ; 8,5),
	Só na véspera da prova	(**A24**; 1,0; 7,25) (**A28**; 1,0; 9,25)	(**A9**; 0,0; 9,0)	(**A27**; 0,0 ; 5,0),
	Só nos fins de semana		(**A4**; 0,0 ; 7,25),	(**A3**; 0,0 ; 8,0),
	Todo dia			
	Alguns dias da semana	(**A22**; 0,0 ; 6,0) (**A19**; 2,0 ; 8,75), (**A20;** 1,0; 8,75),	(**A1**; 1,0, 10), (**A7**; 0,0; 7,25) (**A13**; 0,0; 5,75), (**A23**; 0,0 ; 8,5), (**A17**;1,0; 6,5), (**A18**; 2,0; 9,25), (**A9**; 0,0; 9,0)	(**A6**; 0,0; 6,25), (**A12**; 0,0; 5,25), (**A30**; 2,0 ; 6,5)

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A tabela acima mostra que 37% dos discentes A16, A10, A11, A8, A2, A25, A14, A21, possuem o costume de estudar matemática só no período de prova e possuem um pouco de dificuldade em aprender esta disciplina. Todos esses alunos tiveram notas baixíssimas no pré- teste, com um acerto no máximo. Mais a grande maioria desses alunos teve um desempenho excelente no Pós- teste. Dois alunos A26, A29, que não possuem dificuldades em aprender matemática tiraram notas baixas no pré- teste, mas excelente nota no pós- teste.

Pela tabela vemos também que apenas um aluno (3% dos discentes) A21, possui o costume de estudar só na véspera da prova e possuem um pouco de dificuldade de dificuldade em aprender matemática. E também dois alunos A24, A28 que não possuem dificuldade em aprender matemática estudam só na véspera e tiveram ótimo desempenho no pós- teste em comparação com o pré- teste.

Já os que estudam sós nos finais de semana e tem um pouco ou muita dificuldade em aprender matemática A4, A3, tiveram um aproveitamento médio em matemática e excelente aproveitamento em comparação com o pré- teste. Observa-se ainda pela tabela que 37% dos discentes A1, A7, A13, A23, A17, A18, A9 costumam estudar só alguns dias da semana e possuem um pouco de dificuldade em aprender matemática e tiraram uma nota bem razoável em comparação com o pré- teste.

Ainda sobre a tabela acima, três alunos não possuem dificuldades em aprender matemática A19, A20, A22 e três possuem muita dificuldade A12, A6, A30 o que é notório é que todos tiveram baixo desempenho no pré- teste e excelente desempenho no pós – teste.

Quadro 42: Correlação entre distração na aula de Matemática e a dificuldade em aprender Matemática

		DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA		
		Não	Um pouco	Muito
VOCÊ SE DISTRAI NAS AULAS DE	Não, eu sempre presto atenção.	(**A26**; 0,0; 8,5), (**A24**; 1,0; 7,25) (**A28**; 1,0; 9,25) (**A19**; 2,0 ; 8,75), (**A20;** 1,0; 8,75),	**(A1**; 1,0, 10), (**A9**; 0,0; 9,0) (**A16**; 00; 6,0), (**A11**,00; 8,25), (**A8**; 0,0 ; 6,0), (**A4**; 0,0 ; 7,25),	(**A5**; 0,0 ; 8,25), (**A21**; 0,0 ; 8,5), (**A30**; 2,0 ; 6,5)

			(**A23**; 0,0 ; 8,5), (**A14**; 0,0; 6,75), **A21** (0; 8,5)	
	Sim, devido a agitação ou conversas dos colegas	(**A29**; 1,0 ; 8,75) (**A22**; 0,0 ; 6,0)	(**A10**; 0,0 ; 9,25), (**A17**;1,0; 6,5), (**A18**; 2,0; 9,25), (**A2**; 0,0; 8,0), (**A25**;1,0; 8,75), (**A7**; 0,0; 7,25)	(**A3**; 0,0 ; 8,0), (**A27**; 0,0 ; 5,0), (**A12**; 0,0; 5,25),
	Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática.		(**A13**; 0,0; 5,75),	(**A6**; 0,0; 6,25),

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A tabela acima mostra que 30% dos discentes, **A1** (1, 10), **A9** (0; 9), **A16** (0; 6), **A11** (0; 8,25), **A8** (0; 6), **A4** (0; 7,25), **A23** (0; 8,5), **A14** (0; 6,75), **A21** (0; 8,5), sempre prestam atenção nas aula de matemática e possuem um pouco de dificuldade em aprender matemática. A maioria desses alunos apresentaram um bom desempenho e comparação com o pré- teste destaque para os alunos **A1** (1, 10), **A9** (0; 9). A tabela mostra também que 17% dos alunos **A26** (0;8,5), **A24** (1; 7,25), **A28** (1; 9,25), **A19** (2; 8,75), **A20** (1; 8,75), sempre prestam atenção nas aulas de matemática e não possui dificuldade em aprender essa disciplina, também tiveram excelente desempenho no pós -teste. Já os alunos **A5** (0; 8,25), **A21** (0; 8,5), **A30** (2; 6,5), que se declararam ter muita dificuldade em aprender matemática e sempre prestam atenção nas aulas, tiveram um bom aproveitamento.

Pela tabela acima se observa que 37% dos discentes declararam Sim, devido a agitação ou conversas dos colegas apenas dois alunos **A29** (1; 8,75), **A22** (0; 6), declararam não ter dificuldades em aprender matemática e três alunos muita dificuldades **A3** (0; 8), **A27** (0; 5), **A12** (0, 5,25). Desses o destaque para o excelente aproveitamento dos alunos, **A10** (0; 9,25), **A18** (2; 9,25) no pós- teste. Apenas os alunos **A13** (0; 5,75), **A6** (0; 6,25), que tem um pouco ou muita dificuldade respectivamente tiveram um aproveitamento regula, mas excelente em relação ao pré- teste, eles se declararam que na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de matemática.

Quadro 43: Correlação entre quem lhe ajuda nas tarefas e a dificuldade em aprender Matemática

		DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA		
		Não	Um pouco	Muito
QUEM O AUXILIA NAS TAREFAS EXTRACLASSE DE MATEMÁTICA?	Professor particular		(**A11**,00; 8,25),	
	Pai		(**A18**; 2,0; 9,25), (**A2**; 0,0; 8,0),	(**A6**; 0,0; 6,25),
	Mãe		(**A7**; 0,0; 7,25),	(**A3**; 0,0 ; 8,0),
	Irmão			
	Amigo (a)		(**A14**; 0,0; 6,75), (**A13**; 0,0; 5,75),	(**A5**; 0,0 ; 8,25),
	Ninguém	(**A26**; 0,0; 8,5), (**A24**; 1,0; 7,25) (**A28**; 1,0; 9,25) (**A19**; 2,0 ; 8,75), (**A29**; 1,0 ; 8,75) (**A22**; 0,0 ; 6,0)	**(A1**; 1,0, 10), (**A9**; 0,0 ; 9,0) (**A16**; 00; 6,0), (**A8**; 0,0 ; 6,0), (**A23**; 0,0 ; 8,5), (**A21**; 0,0 ; 8,5), (**A10**; 0,0 ; 9,25), (**A17**;1,0; 6,5), (**A25**,1,0; 8,75),	(**A21**; 0,0 ; 8,5), (**A30**; 2,0 ; 6,5) (**A27**; 0,0 ; 5,0), (**A12**; 0,0; 5,25),
	Outros	(**A20;** 1,0; 8,75),	(**A4**; 0,0 ; 7,25),	

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Pela tabela acima podemos perceber que a maioria, 60%, dos discentes não tem ninguém que lhe auxilie nas tarefas diárias, apesar disso esses alunos tiveram excelente desempenho no pós- teste em relação ao pré- teste. Dos que não possuem dificuldade em aprender matemática, que somam 20%, destacam-se os alunos A26, A28, A19 e A29 esses tiveram uma grande evolução. Dos que possuem um pouco de dificuldade em aprender matemática, que somam 30%, destacam-se os alunos A1, A9, A10 e A25 esses tiveram desempenho acima da média. Por outro lado os que possuem muita dificuldade no aprendizado de matemática somam 13%, destaca- se o aluno A21 muito bom no pós- teste.

Os demais alunos como mostra a tabela, tem pai, mãe e amigos que lhes auxiliam nas tarefas diárias, todos eles possuem um pouco de dificuldade ou muita dificuldade, mas que tiveram um pós teste bem produtivo com notas excelente, destacam- se os alunos A11, A18 e A5.

5.4 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR DE PEARSON DOS TESTES

Segundo Barbeta (2012, p. 254), o coeficiente de Pearson é indicado para auxiliar na análise da correlação linear entre duas variáveis existentes, após comparação das variáveis, calcula-se o coeficiente linear de Pearson (r), pertencente ao intervalo de $-1 \leq r \leq 1$.

O resultado calculado para o coeficiente determina o tipo de classificação da correlação:

Quadro 44: Coeficiente de Correlação

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO	CORRELAÇÃO
$r = 1$	Perfeita positiva
$0,8 \leq r < 1$	Forte positiva
$0,5 \leq r < 0,8$	Moderada positiva
$0,1 \leq r < 0,5$	Fraca positiva
$0 < r < 0,10$	Ínfima positiva
$r = 0$	Nenhuma correlação
$-0,1 < r < 0$	Ínfima negativa
$-0,5 < r \leq -0,1$	Fraca negativa
$-0,8 < r \leq -0,5$	Moderada negativa
$-1 < r \leq -0,8$	Forte negativa
$r = -1$	Perfeita negativa

Fonte: Barbeta (2012, p. 254)

Quadro 45- Parametrização dos dados - dificuldade em aprender Matemática

DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Não	1
Um pouco	2
Muita	3

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

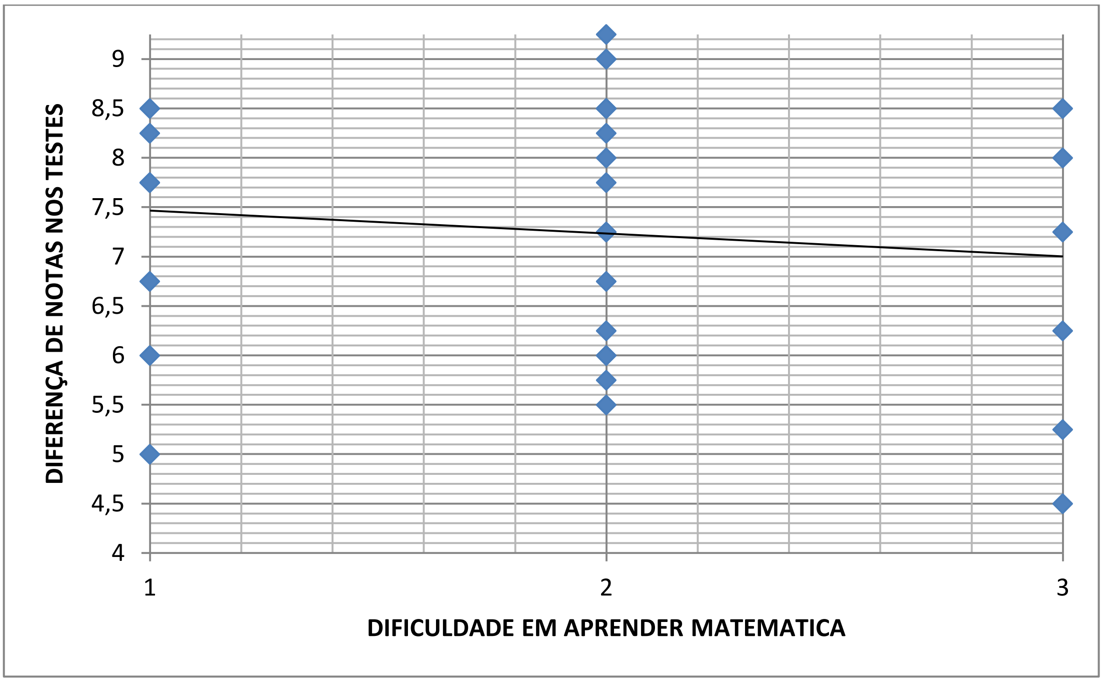
Quadro 46: Correlação entre a diferença das notas nos testes e dificuldade em aprender Matemática

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFRENÇA	DIFICULDADE EM APRENDER MATEMÁTICA
A 1	1	10	9	2
A 2	0	8	8	2
A 3	0	8	8	3
A 4	0	7,25	7,25	2
A 5	0	8,5	8,5	3
A 6	0	6,25	6,25	3
A 7	0	7,25	7,25	2
A 8	0	6	6	2
A 9	0	9	9	2
A 10	0	9,25	9,25	2
A 11	0	8,25	8,25	2
A12	0	5,25	5,25	3
A 13	0	5,75	5,75	2
A 14	0	6,75	6,75	2
A 15	0	8,5	8,5	2
A 16	0	6	6	2
A 17	1	6,5	5,5	2
A 18	2	9,25	7,25	3
A 19	2	8,75	6,75	1
A 20	1	8,75	7,75	1
A 21	0	8,5	8,5	2
A 22	0	6	6	1
A 23	0	8,5	8,5	2
A 24	1	7,25	6,25	2
A 25	1	8,75	7,75	2
A 26	0	8,5	8,5	1
A 27	0	5	5	1
A 28	1	9,25	8,25	1
A 29	1	8,75	7,75	1
A 30	2	6,5	4,5	3

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nesta correlação o valor do coeficiente linear de Pearson (ρ) foi ρ = – **0,11706** pertencente ao intervalo -0,5<ρ≤-0,1, fato que, de acordo com os dados explicitados anteriormente, se traduz em uma correlação fraca negativa. A representação gráfica desta correlação está expressa a seguir.

Gráfico 22: Dispersão - Dificuldade em aprender Matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações produzidas através da pesquisa e que foram explicitadas através do gráfico anterior nos apresentam uma reta decrescente, no entanto a correlação negativa entre as variáveis analisadas é fraca, sendo assim, podemos inferir que não houve uma correlação entre os resultados dos testes o aluno e o ato da **Dificuldade em aprender Matemática**. A seguir a correlação entre a **escolaridade dos responsáveis masculinos** e as notas dos testes.

Quadro 47- Parametrização dos dados - escolaridade dos responsáveis masculinos

ESCOLARIDADE DOS RESPONSÁVEIS MASCULINOS	PARAMETRIZAÇÃO
Não Sabe	1
Ensino Fundamental Incompleto	2
Ensino Fundamental Completo	3
Ensino Médio Incompleto	4
Ensino Médio Completo	5
Ensino Superior Completo	6

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Quadro 48: Correlação entre a diferença das notas nos testes e escolaridade dos responsáveis masculinos

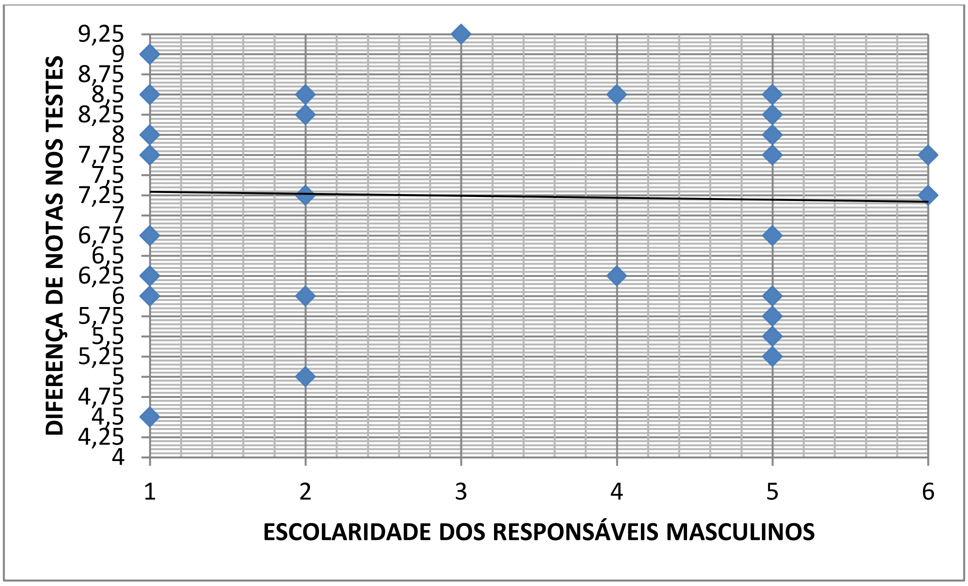
ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFRENÇA	ESCOLARIDADE DOS RESPONSÁVEIS MASCULINOS
A 1	1	10	9	1
A 2	0	8	8	5
A 3	0	8	8	1
A 4	0	7,25	7,25	2
A 5	0	8,5	8,5	1
A 6	0	6,25	6,25	4
A 7	0	7,25	7,25	6
A 8	0	6	6	1
A 9	0	9	9	1
A 10	0	9,25	9,25	3
A 11	0	8,25	8,25	5
A12	0	5,25	5,25	5
A 13	0	5,75	5,75	5
A 14	0	6,75	6,75	1
A 15	0	8,5	8,5	5
A 16	0	6	6	2
A 17	1	6,5	5,5	5
A 18	2	9,25	7,25	2
A 19	2	8,75	6,75	5
A 20	1	8,75	7,75	6
A 21	0	8,5	8,5	5
A 22	0	6	6	5
A 23	0	8,5	8,5	4
A 24	1	7,25	6,25	1
A 25	1	8,75	7,75	5

A 26	0	8,5	8,5	2
A 27	0	5	5	2
A 28	1	9,25	8,25	2
A 29	1	8,75	7,75	1
A 30	2	6,5	4,5	1

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nesta correlação o valor do coeficiente linear de Pearson (ρ) foi ρ = – **0,0343** pertencente ao intervalo -0,1<ρ<0, fato que, de acordo com os dados explicitados anteriormente, se traduz em uma correlação ínfima negativa. A representação gráfica desta correlação está expressa a seguir.

Gráfico 23: Dispersão - Escolaridade dos responsáveis masculinos



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações produzidas através da pesquisa e que foram explicitadas através do gráfico anterior nos apresentam uma reta decrescente, no entanto a correlação positiva entre as variáveis analisadas é fraca, além disso, a "nuvem" de pontos encontra-se dispersa em relação à reta e, por este motivo podemos inferir não houve uma correlação entre os resultados dos testes o aluno e a **escolaridade dos** que **responsáveis masculinos**. A seguir a correlação entre a **escolaridade dos responsáveis femininos** e as notas dos testes.

Quadro 49: Parametrização dos dados - escolaridade dos responsáveis femininos

ESCOLARIDADE DOS RESPONSÁVEIS FEMININOS	PARAMETRIZAÇÃO
Não Sabe	1
Ensino Fundamental Incompleto	2
Ensino Fundamental Completo	3
Ensino Médio Incompleto	4
Ensino Médio Completo	5
Ensino Superior Completo	6

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Quadro 50: Correlação entre a diferença das notas nos testes e escolaridade dos responsáveis femininos

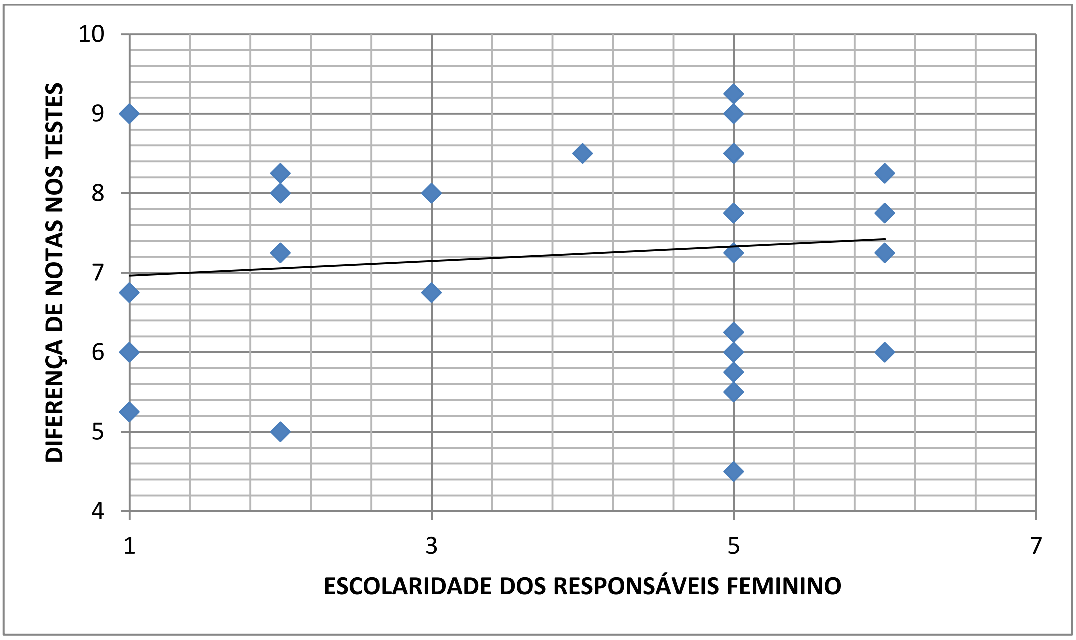
ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFRENÇA	ESCOLARIDADE DOS RESPONSÁVEIS FEMININO
A 1	1	10	9	1
A 2	0	8	8	2
A 3	0	8	8	3
A 4	0	7,25	7,25	2
A 5	0	8,5	8,5	5
A 6	0	6,25	6,25	5
A 7	0	7,25	7,25	6
A 8	0	6	6	6
A 9	0	9	9	5
A 10	0	9,25	9,25	5
A 11	0	8,25	8,25	6
A12	0	5,25	5,25	1
A 13	0	5,75	5,75	5
A 14	0	6,75	6,75	1
A 15	0	8,5	8,5	5
A 16	0	6	6	1
A 17	1	6,5	5,5	5
A 18	2	9,25	7,25	5
A 19	2	8,75	6,75	3
A 20	1	8,75	7,75	6
A 21	0	8,5	8,5	5
A 22	0	6	6	5
A 23	0	8,5	8,5	4
A 24	1	7,25	6,25	5
A 25	1	8,75	7,75	5
A 26	0	8,5	8,5	5
A 27	0	5	5	2

A 28	1	9,25	8,25	2
A 29	1	8,75	7,75	5
A 30	2	6,5	4,5	5

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nesta correlação o valor do coeficiente linear de Pearson (ρ) foi ρ = **0,1179** pertencentes ao intervalo $0,1 \leq \rho < 0,5$, fato que, de acordo com os dados explicitados anteriormente, se traduz em uma correlação fraca positiva. A representação gráfica desta correlação está expressa a seguir.

Gráfico 24: Dispersão – escolaridade dos responsáveis femininos



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações produzidas através da pesquisa e que foram explicitadas através do gráfico anterior nos apresentam uma reta crescente, no entanto a correlação positiva entre as variáveis analisadas é fraca, além disso, a "nuvem" de pontos encontra-se dispersa em relação à reta e, por este motivo podemos inferir que a **escolaridade dos responsáveis femininos** não foi um fator preponderante para a questão das notas apresentadas nos testes que aplicamos. A seguir a correlação entre a **distração nas aulas de Matemática** e as notas dos testes.

Quadro 51: Parametrização dos dados – distração nas aulas de Matemática

DISTRAI-SE NAS AULAS DE MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Não	1
Às vezes	2
Sim	3

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

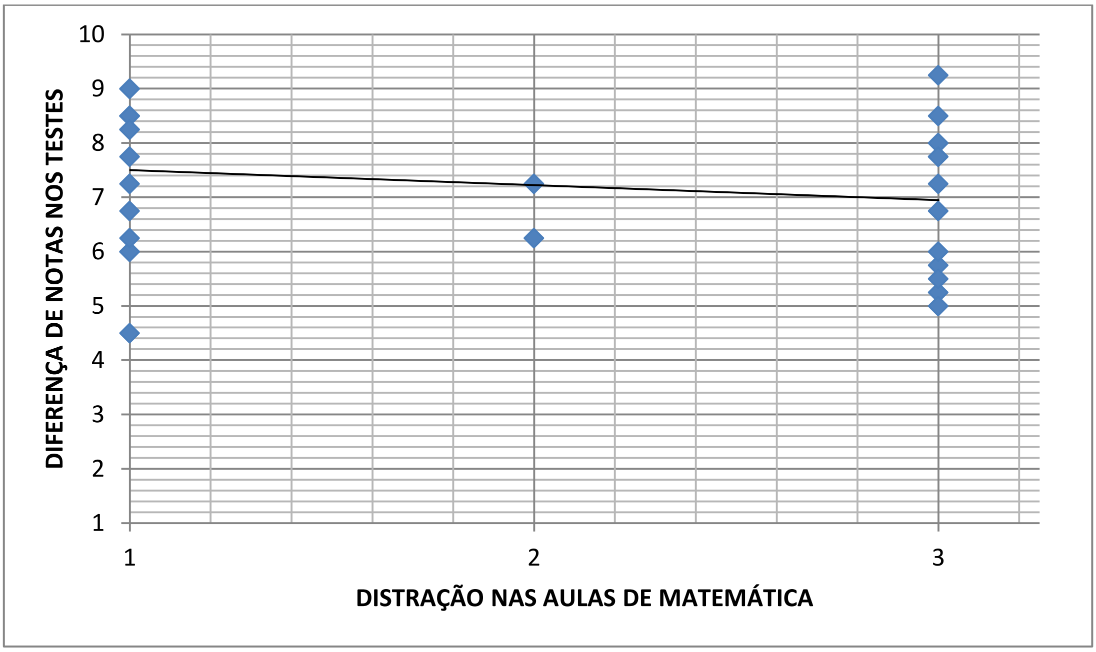
Quadro 52: Correlação entre a diferença das notas nos testes e distração nas aulas de Matemática

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFRENÇA	DISTRAÇÃO NAS AULAS DE MATEMÁTICA
A 1	1	10	9	1
A 2	0	8	8	3
A 3	0	8	8	3
A 4	0	7,25	7,25	1
A 5	0	8,5	8,5	1
A 6	0	6,25	6,25	2
A 7	0	7,25	7,25	3
A 8	0	6	6	1
A 9	0	9	9	1
A 10	0	9,25	9,25	3
A 11	0	8,25	8,25	1
A12	0	5,25	5,25	3
A 13	0	5,75	5,75	3
A 14	0	6,75	6,75	3
A 15	0	8,5	8,5	3
A 16	0	6	6	1
A 17	1	6,5	5,5	3
A 18	2	9,25	7,25	2
A 19	2	8,75	6,75	1
A 20	1	8,75	7,75	3
A 21	0	8,5	8,5	1
A 22	0	6	6	3
A 23	0	8,5	8,5	1
A 24	1	7,25	6,25	1
A 25	1	8,75	7,75	1
A 26	0	8,5	8,5	1
A 27	0	5	5	3
A 28	1	9,25	8,25	1
A 29	1	8,75	7,75	3
A 30	2	6,5	4,5	1

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nesta correlação o valor do coeficiente linear de Pearson (ρ) foi ρ = **– 0,206** pertencente ao intervalo -0,5<ρ≤-0,1, fato que, de acordo com os dados explicitados anteriormente, se traduz em uma correlação fraca negativa. A representação gráfica desta correlação está expressa a seguir.

Gráfico 25: Dispersão - distração nas aulas de Matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações produzidas através da pesquisa e que foram explicitadas através do gráfico anterior nos apresentam uma reta decrescente, no entanto a correlação negativa entre as variáveis analisadas é fraca, além disso, a “nuvem” de pontos encontra-se dispersa em relação à reta e, por este motivo podemos inferir que a **distração nas aulas de Matemática** não foi um fator preponderante para a questão das notas apresentadas nos testes que aplicamos. A seguir a correlação entre o **gosto por Matemática** e as notas dos testes.

Quadro 53: Parametrização dos dados – Gosto por matemática

GOSTA DE MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Não Gosto	1
Muito Pouco	2
Pouco	3
Muito	4

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

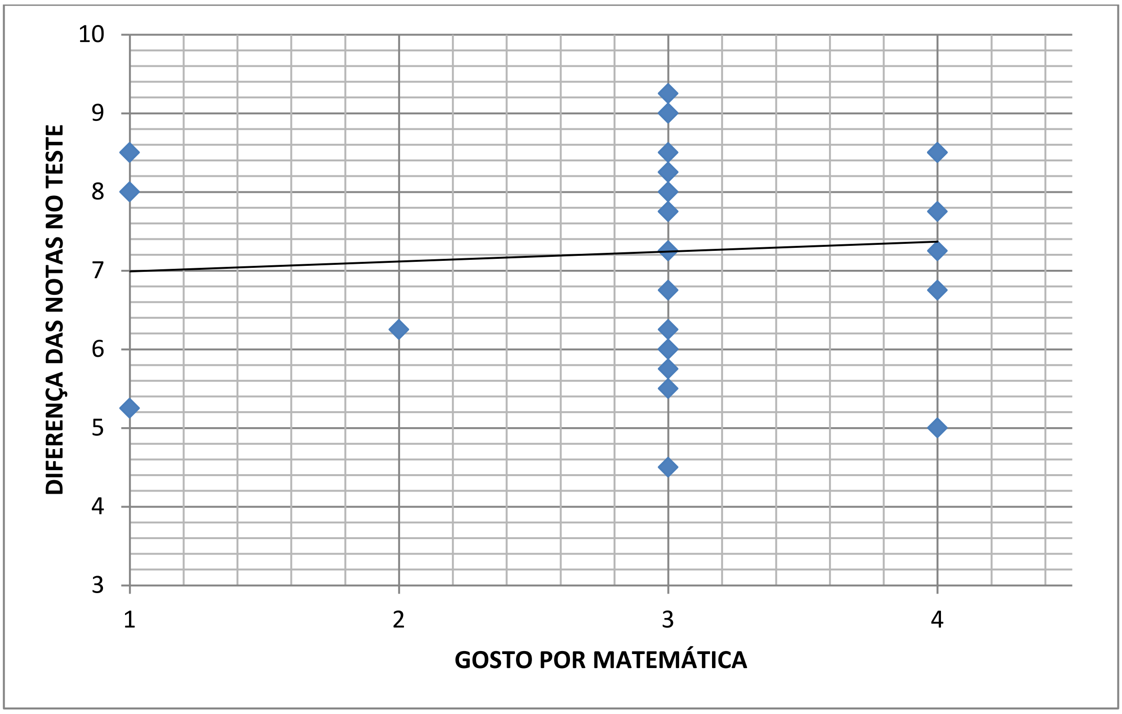
Quadro 54- Correlação entre a diferença das notas nos testes e Gosto por matemática

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇ A	GOSTO POR MATEMÁTICA
A 1	1	10	9	3
A 2	0	8	8	1
A 3	0	8	8	3
A 4	0	7,25	7,25	4
A 5	0	8,5	8,5	1
A 6	0	6,25	6,25	2
A 7	0	7,25	7,25	3
A 8	0	6	6	3
A 9	0	9	9	3
A 10	0	9,25	9,25	3
A 11	0	8,25	8,25	3
A12	0	5,25	5,25	1
A 13	0	5,75	5,75	3
A 14	0	6,75	6,75	3
A 15	0	8,5	8,5	4
A 16	0	6	6	3
A 17	1	6,5	5,5	3
A 18	2	9,25	7,25	3
A 19	2	8,75	6,75	4
A 20	1	8,75	7,75	3
A 21	0	8,5	8,5	3
A 22	0	6	6	3
A 23	0	8,5	8,5	4
A 24	1	7,25	6,25	3
A 25	1	8,75	7,75	4
A 26	0	8,5	8,5	4
A 27	0	5	5	4
A 28	1	9,25	8,25	3
A 29	1	8,75	7,75	3
A 30	2	6,5	4,5	3

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nesta correlação o valor do coeficiente linear de Pearson (ρ) foi ρ = **0,0783** pertencente ao intervalo 0<ρ<0,1, fato que, de acordo com os dados explicitados anteriormente, se traduz em uma correlação ínfima positiva. A representação gráfica desta correlação está expressa a seguir.

Gráfico 26: Dispersão – Gosto por matemática



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações produzidas através da pesquisa e que foram explicitadas através do gráfico anterior nos apresentam uma reta crescente, no entanto a correlação positiva entre as variáveis analisadas é fraca, além disso, é de fácil percepção que a "nuvem" de pontos encontra-se dispersa em relação à reta em questão e, por este motivo temos condições para inferir que o **gosto por Matemática** não foi um fator que veio a influenciar no resultado das notas apresentadas nos testes que aplicamos. A seguir a correlação entre o **tempo de estudo** e as notas dos testes.

Quadro 55: Parametrização dos dados – Tempo de Estudo

GOSTA DE MATEMÁTICA	PARAMETRIZAÇÃO
Só na véspera da Prova	1
Só no Período de Prova	2
Só nos fins de Semana	3
Alguns dias da Semana	4
Todo dia	5

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

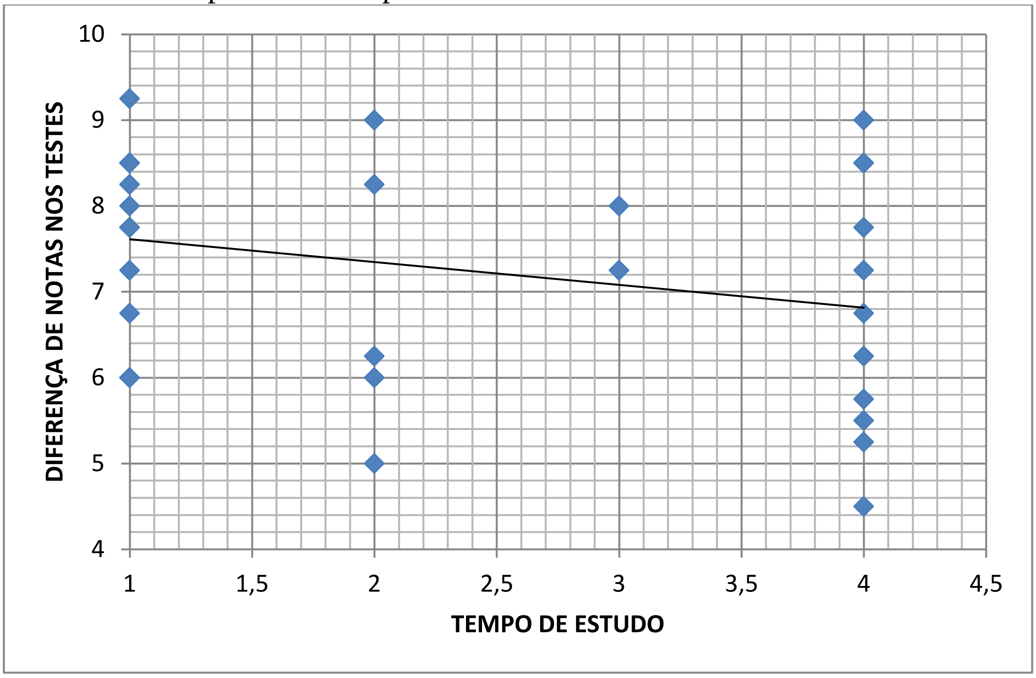
Quadro 56- Correlação entre a diferença das notas nos testes e o tempo de estudo

ALUNOS	PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE	DIFERENÇ A	TEMPO DE ESTUDO
A 1	1	10	9	2
A 2	0	8	8	1
A 3	0	8	8	3
A 4	0	7,25	7,25	3
A 5	0	8,5	8,5	1
A 6	0	6,25	6,25	4
A 7	0	7,25	7,25	4
A 8	0	6	6	1
A 9	0	9	9	4
A 10	0	9,25	9,25	1
A 11	0	8,25	8,25	1
A12	0	5,25	5,25	4
A 13	0	5,75	5,75	4
A 14	0	6,75	6,75	1
A 15	0	8,5	8,5	4
A 16	0	6	6	1
A 17	1	6,5	5,5	4
A 18	2	9,25	7,25	1
A 19	2	8,75	6,75	4
A 20	1	8,75	7,75	4
A 21	0	8,5	8,5	1
A 22	0	6	6	2
A 23	0	8,5	8,5	4
A 24	1	7,25	6,25	2
A 25	1	8,75	7,75	1
A 26	0	8,5	8,5	1
A 27	0	5	5	2
A 28	1	9,25	8,25	2
A 29	1	8,75	7,75	1
A 30	2	6,5	4,5	4

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Nesta correlação o valor do coeficiente linear de Pearson (ρ) foi ρ = – **0,2718** pertencentes ao intervalo $-0,5<\rho\leq-0,1$, fato que, de acordo com os dados explicitados anteriormente, se traduz em uma correlação fraca negativa. A representação gráfica desta correlação está expressa a seguir.

Gráfico 27: Dispersão – Tempo de estudo



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações produzidas através da pesquisa e que foram explicitadas através do gráfico anterior nos apresentam uma reta decrescente, no entanto a correlação negativa entre as variáveis analisadas é fraca, além disso, é de fácil percepção que a "nuvem" de pontos encontra-se dispersa em relação à reta em questão e, por este motivo temos condições para inferir que o **tempo de estudo** não foi um fator que veio a influenciar de modo significativo no resultado das notas apresentadas nos testes que aplicamos.

Deste modo, para melhor entendimento das correlações que realizamos, mostramos a seguir, no quadro 44, uma síntese.

Quadro 57- Resultados da correlação linear de Pearson

VARIÁVEL	VALOR DE (ρ)	INTENSIDADE	DIREÇÃO
Dificuldade em aprender Matemática	**– 0,11706**	Fraca negativa	Negativamente correlacionadas
Escolaridade dos responsáveis masculinos	**0,0343**	Ínfima positiva	Positivamente correlacionadas
Escolaridade dos responsáveis femininos	**0,1179**	Fraca positiva	Positivamente correlacionadas
Distração nas aulas de matemática	**– 0,206**	Fraca negativa	Negativamente correlacionadas
Gosto por matemática	**0,0783**	Ínfima Positiva	Positivamente correlacionadas
Tempo de estudo	**– 0,2718**	Fraca negativa	Negativamente correlacionadas

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

As informações que foram anteriormente explicitadas, como resultado da pesquisa e da correlação entre algumas das variáveis, nos fornecem elementos para que, como precisão estatística, possamos inferir que tanto as variáveis socioeconômicas e outras igualmente importantes no âmbito do ensino aprendizagem, não chegaram a interferir de modo significativo, nos resultados dos testes e, consequentemente, nas diferenças das notas apresentadas pelos sujeitos participantes desta etapa da pesquisa em questão.

Teste de hipótese

A última parte de uma pesquisa que tem como metodologia a Engenharia Didática é a validação da sequência didática apresentada, que deve ser realizada com subsídios matemáticos plausíveis e pertinentes, deste modo, além dos dados apresentados mostrando que as notas dos alunos melhoraram comparando o pré-teste e o pós-teste, vamos usar, considerando a quantidade de acertos de cada estudante, a Estatística de testes, para que assim possamos, com mais rigor, fazer a validação da pesquisa realizada.

Deste modo, após analisar percentualmente os resultados quantitativos obtidos nos testes, aplicamos o teste de hipótese a fim de apreender conclusões estatísticas sobre o pós-teste e, consequentemente, a metodologia de ensino adotada durante o experimento, já que este teste é reflexo, tanto dos conhecimentos que os alunos tinham previamente acerca do assunto, quanto dos conhecimentos adquiridos no decorrer das aulas.

Para aplicação do teste de hipóteses, inicialmente consideramos as notas absolutas dos alunos nos dois testes. Como foram 10 (dez) questões, as notas foram tabuladas de 0 a 10, de acordo com o número de questões corretas de cada aluno.

Quadro 58: Notas do pré- Teste e Pós- Teste

Aluno	Pré-teste	Pós-teste
A 1	1	10
A 2	0	8
A 3	0	8
A 4	0	7,25
A 5	0	8,5
A 6	0	6,25
A 7	0	7,25
A 8	0	6
A 9	0	9
A 13	0	9,25
A 10	0	8,25
A11	0	5,25
A 12	0	5,75
A 13	0	6,75
A 14	0	8,5
A 15	0	6
A 16	1	6,5
A 17	2	9,25
A 18	2	8,75
A 19	1	8,75
A 20	0	8,5
A 21	0	6
A 22	0	8,5
A 23	1	7,25
A 24	1	8,75
A 25	0	8,5
A 26	0	5
A 27	1	9,25
A 28	1	8,75

A 29	2	6,5
A 30	1	10

Fonte: Pesquisa de campo (2017)

Em seguida retiramos os dados para a aplicação do teste com base na fórmula $t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}}$ onde:

$\bar{X}$ = média do pré-teste;

μ_0 = média do pós-teste;

ϑ = desvio padrão das diferenças de notas nos testes;

n = número da amostra.

Com os dados presentes no quadro 45, teremos:

$\bar{X} = 0{,}433$

$\mu_0 = 7{,}675$

$\vartheta = 1{,}325$

$n = 30$

Que aplicado à equação resulta em:

$$t = \frac{0{,}433 - 7{,}675}{1{,}325/\sqrt{30}}$$

$$t = -29{,}937$$

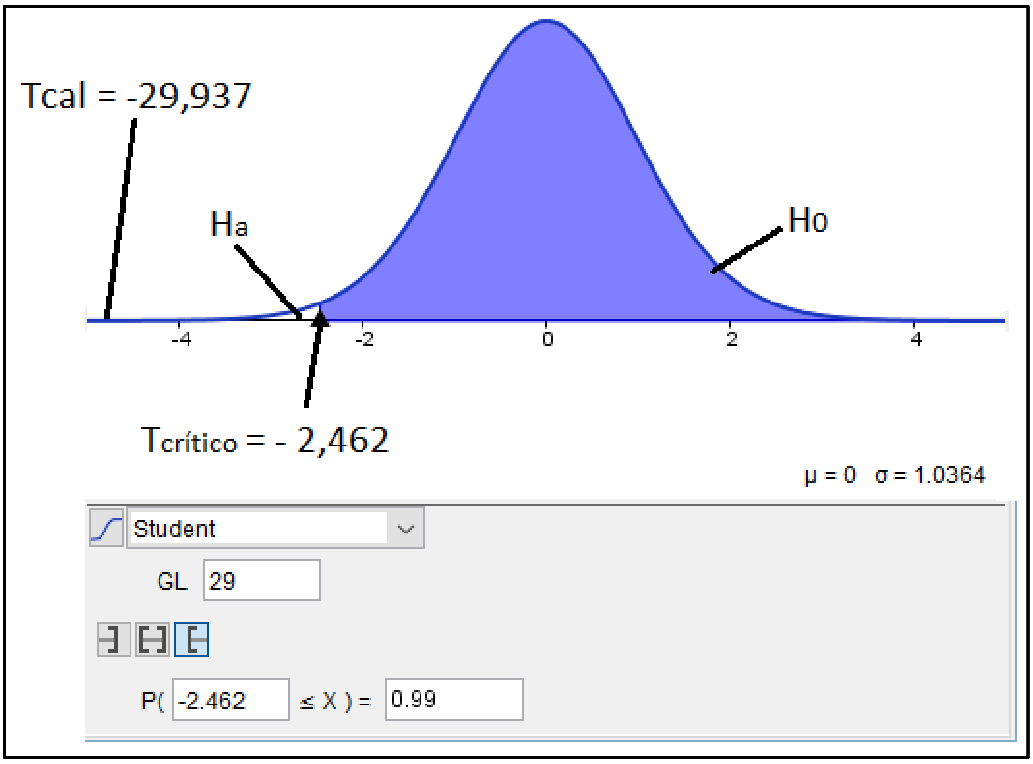
O passo seguinte foi testar as seguintes hipóteses, que são:

Hipótese nula H_0: A média do pré-teste foi maior ou igual à do pós-teste ($M_1 \geq M_2$).

Hipótese alternativa H_a: A média do pré-teste foi menor que a do pós-teste ($M_1 < M_2$).

Com base no resultado do teste utilizamos o diagrama t de Student com a finalidade de analisar os resultados com as hipóteses anteriormente levantadas. Teremos, então, o seguinte gráfico:

Gráfico 28: Diagrama t de Student



Fonte: Pesquisa de campo (2017)

A hipótese inicial está representada no espaço em azul do gráfico. O T crítico do teste resultou em – 29,937, ou seja, dera um valor bem abaixo de – 2,462. Neste caso, com uma confiança de 99%, rejeitamos a hipótese nula e consideramos a hipótese alternativa, isto é, o pós-teste apresentou, estatisticamente, melhores notas de que o pré-teste.

De posse do exposto, em face das notas apresentadas pelos alunos no pós-teste que melhoraram significativamente em relação ao pré-teste e, considerando os resultados do teste de hipóteses, podemos afirmar que a sequência didática realizada, revelou-se como uma eficiente alternativa metodológica para o ensino de volume de sólidos Geométricos, deste modo, podendo ser perfeitamente adotada por outros docentes, pois proporcionou significativos resultados na perspectiva da Educação Matemática, além de fornecer subsídios para os alunos visualizarem e buscarem caminhos para resolver problemas. Abordagem recomendada pelos PCN, no desenvolvimento dos conteúdos matemáticos e aludida no ENEM e no SAEB.

6- CONSIDERAÇÕES

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de analisar a eficácia de uma sequencia didática no Ensino de volume de sólidos geométricos, no Ensino Médio por meio de atividades, diferente da tradicional, que se desenvolveu a partir de ideia de volume, passando por unidades de medidas de volume, volumes do paralelepípedo, cubo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera. Com este propósito pretendíamos analisar de que forma uma metodologia de ensino que privilegiasse o uso de uma sequência didática poderia conduzir o aluno à percepção e ao aprendizado de conceitos geométricos, particularmente volume de sólidos, necessários para a resolução de questões sobre volume de sólidos geométricos e sua unidade de medida.

Optamos pela construção de um objeto de aprendizagem no sentido de fazer uma sequencia didática que contemple o aluno para que ele consiga desenvolver de maneira simples e eficaz a descoberta das fórmulas. Esse instrumento deveria omitir a fórmula até que o educando descobrisse, essa é a característica essencial do nosso trabalho e que não é encontrado facilmente e também acessível nos repertórios educacionais disponíveis, principalmente na internet.

O experimento na prática se desenvolveu com uma turma do 2º ano do Ensino médio, em doze sessões. Nosso propósito era que os alunos, a partir de uma sequencia lógica de figuras com o respectivo comando e valores de comprimento, largura e altura, para paralelepípedo e cubo; área da base e altura para prisma e pirâmide; raio e altura para cilindro e cone; e raio para a esfera; conseguissem descobrir a fórmula que calculassem esses volumes. Além disso, fizemos também uma atividade para que os alunos tivessem inicialmente a ideia de volume e a utilização das unidades de volume.

Muitas de nossas ideias durante o planejamento das atividades foram baseadas em informações dos estudos contidos nas análises prévias, pois, nos indicaram muitos caminhos acerca das principais dificuldades encontradas por alunos e professores durante suas pesquisas sobre o ensino de volume de sólidos geométricos. Assim nosso trabalho inicia-se com um pré-teste, que tinha como objetivo perceber o perfil e o conhecimento prévios dos alunos sobre o assunto abordado. Os encontros nos permitiram acompanhar o desenvolvimento das atividades de descobertas, com estímulo a reflexão e a interação, de maneira eficaz e dinâmica.

As sessões referentes ao volume do paralelepípedo, cubo, prisma e pirâmide os alunos não tiveram muita dificuldade na descoberta, a não ser para alguns poucos alunos, mas durante a socialização, essas dúvidas foram esclarecidas e todos conseguiram concluir com sucesso suas atividades e exercícios de fixação. Já nos sólidos redondos, tivemos que socializar o valor da constante π e adaptar os resultados dos com a inclusão desse número, no cone e na esfera alguns tiveram um pouco de dificuldade, mas facilmente sanada com a socialização entre os alunos. A ideia de volume foi feita inicialmente para que os discentes tivessem um conceito de volume e de dimensões; as unidades de volume foi importante devido às diversas questões cobradas nos grandes centros de seleção sobre as principais unidades de medida de volume, além de facilitar na hora de interpretar o que cada km^3, hm^3, dam^3, m^3, dm^3, cm^3, mm^3; significa na prática.

Durante as atividades, para certificarmos de que os alunos haviam compreendido o que ocorria, pedimos que expressassem suas conclusões sobre o experimento que havia aprendido e com registros percebemos que eles conseguiram compreender o que estavam estudando de maneira satisfatória. Todas as atividades continha uma lista de exercícios de fixação, com o objetivo dos estudantes se familiarizarem com o que pede no ENEM e SAEB e outros centros de seleção, além de exercitar as descobertas das fórmulas encontradas por eles.

A análise a posteriori de nossa sequencia didática evidenciou que antes das atividades os alunos não conseguiram resolver questões de volume de sólidos geométricos, mas acreditamos que nossa proposta de atividade desenvolvida nas sessões de Ensino, contribuíram significativamente para o resultado obtido no Pós- teste, onde o percentual de aproveitamento foi muito expressivo, ou seja, tivemos como média geral 7,7 superando em muito o pré- teste.

É provado estatisticamente que esse procedimento metodológico é eficaz e aliado às tecnologias existentes, contribuirá e muito nas aulas de geometria espacial, particularmente nos cálculos de volume de sólidos geométricos. Diante de todas essas justificativas, sugerimos, como trabalhos futuros, inserir outros módulos de aprendizagem como cálculo de área simples e total dos sólidos geométricos; atividades de manipulação de volumes e programas de animações de cada figura durante as atividades.

Finalizando, temos a certeza de que esse estudo no âmbito do Programa de Mestrado Profissional nos proporcionou uma valiosa contribuição em nossa formação como professor e pesquisador, que acima de tudo é possível trabalhar com instrumentos didáticos que propiciem um aprendizado significativo no processo de Ensino e aprendizagem de qualidade em matemática.

Os resultados do trabalho a que nos propomos realizar e os resultados da coleta de dados analisados apresentaram elementos significativos, que poderão revelar potencialidades, mas também a deficiência e obstáculos do ensino de matemática em nossas escolas públicas e ao mesmo tempo nos levar a indagarmos sobre os possíveis fatores que estão influenciando neste resultado.

Pretendemos com esse trabalho contribuir com uma alternativa para o ensino de volume de sólidos geométricos em que o estudante terá a oportunidade de testar suas hipóteses e construir seus conceitos de forma mais efetiva.

7- REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Leal, L. & Ponte, (Org). **Investigar para Aprender Matemática:** "Matemática para todos" & Associação de professores de Matemática, 1996.

ALMOULOUD, S. A**., Fundamentos da didática da matemática - edição atualizada**. Ed. UFPR. Curitiba, 2010.

ARAUJO, J.C.C. **Tempo, desafio conceitual e didático**: um estudo exploratório dos documentos curriculares e atividades de livros didáticos para alfabetização matemática. 144f. Dissertação (Mestrado em Educação e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

ARTIGUE, Michelle. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BARBETTA, Pedro Alberto. **Estatística Aplicada às Ciências Sociais**. 8ª ed. Florianópolis: ed. da UFSC, 2012.

BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática – 2º Grau**. Volume único. São Paulo: Scipione,1995.

BOAS, R. A. V., ***A Geometria do futebol: Um facilitador no ensino aprendizagem***. 2008. 43 f. Monografia (Graduação em Matemática) * Centro Universitário de Lavras - UNILAVRAS, Lavras, 2008.

BRASIL, PCN _ Ensino Médio: **orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**, Brasília/DF: MEC, 2000 Disponível em: http//portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em 12/06/2016.

CHAVES, Marcelo Santos. **Geometria Espacial:** uma abordagem sobre o modelo do sólido cônico enquanto alternativa didática para o ensino na educação básica. Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia- PA,2013,p.12.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Desafio da Educação Matemática no novo milênio**. Revista da Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, ano 8, n. 11, p. 14-17, dez. 2001

DOLCE, O., POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9**: geometria plana. 7. ed. São Paulo: E. Atual, 1993. ISBN 85-7056-268-3.

EVES, Howard; tradução Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática**. 5º ed. –, Campinas – SP: Editora da Unicamp – 2011.

FAINGUELERNT, E. K.; Educação Matemática: Representação e Construção em geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. Entrevistador: **Educação Matemática em Revista.** Revista da Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, ano 11, n. 16, p. 4-7, maio 2004. Entrevista.

GRILLO, Jean Daniel. **Atividades e problemas de Geometria Espacial para o Ensino Médio.** Dissertação(Mestrado em Educação Matemática) Universidade Federal de São Carlos, SP, 2014.

http://agenciabrasil.ebc.com.b/educaçãonoticia/2016-02

http://atlante.eumed.net/geometria-espacial/2016-05

http://www.matematiques.com.br.ppt. Acessado em: jan/2017.

(http://www.matematicadidatica.com.br/Solidos-Geometricos-Area-Volume-Piramide.aspx). Acessado em: fev/2017.

https://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial16.php. Acessado em: out/2016.

Iezzi, Gelson et. al. Matemática: ciência e aplicações. Volume 2. São Paulo: Saraiva 2010, p.241-242.

KOPKE, R. C. M. Geometria, Desenho, Escola e Transdiciplinaridade: abordagens possíveis para Educação. (Tese em Educação), UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Medidas e Formas em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro, 1991.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? In: Educação Matemática em Revista. SEBM 4, p. 3-13, jun. 1995.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria**, Educação em Revista – Sociedade Brasileira Matemática – SBM, ano 3, n. 4 – 13, 1º sem. 1995.

MACHADO, S. D. A. et.al. **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. 3ª ed, Educ, São Paulo, 2012.

MAIA, Lícia de Souza Leão. O ensino da Geometria: Analisando diferentes representações. Revista da Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, ano 7, n. 8, p. 24-33, jun. 2000.

MANRIQUE, A.L.; SILVA, M.J.F.; CAMPOS, T.M.M.; A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo> Acesso em: 21 mar. 2007.

MARCIEL, Mariana de Vargas. **A importância do Ensino da Matemática na formação do Cidadão**. Faculdade de Filosofia Católica do Rio Grande do Sul- Uruguaiana, 2009.

MENEZES, José Claudemir de . **Áreas e Volumes**: uma abordagem complementar ao livro “a matemática do ensino Médio”- SBM- vol 2, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Federal de Sergipe, SE, 2015

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. PCN Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília, 2002.

MORAIS, L. B., BELLEMAIN, P. M. B. **Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de Matemática para os anos finais do ensino fundamental sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**. Congresso de Iniciação Científica - UFPE, Recife, 2011.

MOURA, Manoel. A atividade de ensino como unidade formadora. Bolema, São Paulo, ano II, n.12, pp. 29-43. 1996.

MOURA, M. O.A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Org.). **Ensinar a ensinar – Didática para a escola Fundamental e Média**. São Paulo/SP: Editora Pioneira, 2001. p. 143-162.

NACARATO, Adair Mendes.; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **A Geometria nas séries iniciais:** uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NASCIMENTO, Hugo Leandro et al. O abandono do ensino de geometria e suas implicações no ensino fundamental. Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/epem/> . Acesso em: 22 mar. 2007.

NASSER, L. e TINOCO, L. **Curso básico de geometria**: enfoque didático. – 3 ed.- Rio de

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

OLIVEIRA, L. O. Uso do princípio de Cavalieri no cálculo de áreas e de volumes. 2016.54F. Dissertação (Mestrado Profissional- PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016.

PAIVA, Manuel Rodrigues. **Matemáti**ca – Volumes 1, 2 e 3.1ª Ed. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

PAULA, A. P. M. **Ensino de área de figuras planas por atividades**. 2011. 232f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. In Zetetiké, v. 1, n. 1, 1993.

PENTEADO, M. G.; Novos Atores, Novos Cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 297-313.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interferência, 1995.

ROGENSKI, Maria Lúcia Cordeiro; Pedroso, Sandra Mara Dias. (2007***). O Ensino da Geometria na Educação Básica**:* Realidade e Possibilidades. Disponível na Internet: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acessado em: fev/2017.

RONCA, A. C. C; ESCOBAR, V. F. **Técnicas pedagógicas**: domesticação ou desfio à participação? Petrópolis: Vozes, 1980.

SÁ, Pedro Franco de**. Atividades para o Ensino de Matemática no nível fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

SANTANA, Mauro Sergio**. O volume dos principais poliedros**: Metodologia e atividades no esquema de resolução de problemas. Mato grosso, Dissertação Mestrado- UF de Mato grosso. Centro Universitário de Araguaia, Barra do Garça, 2014.

SANTOS, Waldiza Lima, Salgado dos**. O ensino de volume de sólidos por atividades.** Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Estado do Pará: Belém, 2012.

SILVA, Alessandra Pereira da; **Arquimedes e o volume da esfera**, Especialização para Professores-3º grau; Universidade Federal de Minas Gerais- UFMG, 2005.

SILVA, Haroldo Oliveira e. O ensino de sólidos de revolução com auxílio do SuperLogo 3.0. Dissertação de Mestrado em Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, UFPA, 2017.

STRATHERN, Paul. **Arquimedes e a alavanca em 90 minutos** (coleção 90 minutos). Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998. A.Silva. Arquimedes e o volume da esfera. Belo Horizonte, 2005.

VALENTE, V. R. Uma história da Matemática escolar no Brasil (1730-1930). São Paulo: FAPESP, 1999.

ZUCHI, Ivanete. A importância da linguagem do ensino de Matemática. Revista da Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, ano 11, n. 16, p. 49-54, maio 2004.

Apêndices

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO DO RESPONSÁVEL

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO

Caro Aluno, você que estuda nessa Escola está sendo convidado a participar da pesquisa intitulada: **DESAFIOS E POSSIBILIDADES NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS** sob a responsabilidade do pesquisador IDENY ESPIRITO SANTO QUEIROS MORAES, vinculado a universidade do estado do Pará.

A sua colaboração na pesquisa será permitir que o pesquisador possa passar um questionário no horário das aulas de matemática em sala, nesta devida escola, sob supervisão de um docente da mesma. Em nenhum momento você será identificado. Os resultados da pesquisa serão publicados e assim sua identidade será preservada.

Você não terá nenhum gasto ou ganho financeiro por participar da pesquisa.

Não há risco. Os benefícios serão de natureza acadêmica com um estudo em Volume. Você é livre para decidir se colaborará com a pesquisa sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste termo de consentimento livre e esclarecido ficará com você.

Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato pelo fone: 999176036. Poderá também entrar em contato com a direção do centro de ciências sociais e educação (CCSE) da Universidade do Estado do Pará (UEPA): Tv. Djama Dutra s/n. telegrafo. Belém-Pará- CEP: 66113-010; FONE: 4009-9542.

Belém,_____ de __________________de 2017.

____

Assinatura do pesquisador

Eu, ____ aceito participar voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecido.

____

Assinatura do participante da pesquisa

APÊNDICE B–Questionário para Discentes

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Prezado (a) aluno (a),

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1. GÊNERO ( ) Masculino ( ) Feminino

2. IDADE_______

3. Tipo de escola ainda estuda?

( )Municipal ( )estadual ( ) particular

( )Conveniada ( )Federal

4. Você está em dependência?

( )Sim. Qual(is) disciplinas(s) _______________ ( )Não

5. Você gosta de estudar Matemática?

( )Detesto ( )Suporto ( )Gosto um pouco ( )Adoro

6. Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?

( )Professor particular

( )Família. Quem? ____________________

( )Outros: Quem? ____________________

( )Ninguém

7. Com que Freqüência você costuma estudar matemática fora da escola?

( )Só no período de prova ( )Só no fim de semana

( )Todo dia ( )Só na véspera da prova. ( )Nunca

8. Você consegue entender as explicações dadas na aula de matemática?

( )sempre ( )quase sempre ( )poucas vezes ( )nunca

9. Qual(is) a(s) forma(s) de atividade(s) você costuma ser avaliado em matemática?

( )Prova (simulado) ( )Testes semanais ( )Seminários

( )Pesquisas ( )Projetos interdisciplinares

( ) Outros. Qual(is)? ___________________

10. Como você se sente quando está diante de uma avaliação de matemática?

( )contente ( ) tranqüilo ( )com medo ( )com raiva

( )preocupado ( )com calafrios ( )outros. Quais?________________________

11. Você gosta de Matemática?

( ) Pouco ( ) Muito ( ) Muito pouco ( )Não gosto

12. Você tem dificuldade para aprender matemática?

( ) Não ( ) Um pouco ( ) Muita ( ) As vezes

13. Além do horário escolar você costuma estudar matemática:

( ) Só no período de prova ( ) Só na véspera da prova

( ) Só nos fins de semana ( )Todo dia

( ) Alguns dias da semana. Quantos dias? _________

14. - **Para apresentar um conteúdo novo, seu professor de Matemática, na maioria das aulas inicia como?**

( ) Pela definição seguida de exemplos e exercícios

( ) Com uma situação problema para depois introduzir o assunto.

( ) Com um experimento para chegar ao conceito

( ) Com jogos para depois sistematizar os conceitos

( ) Nunca estudei esse assunto.

15. Seu professor de Matemática utiliza recursos de computação nas aulas?

( ) Sim ( ) Não

16. Para fixar o conteúdo de matemática seu professor, na maioria das aulas:

( ) Apresenta uma lista de exercícios para serem resolvidos

( ) Apresentava jogos envolvendo o assunto

( ) Manda resolver os exercícios do livro didático

( ) Não fazia proposta de questões de fixação

( ) Pede que você pesquise em outras fontes (ex: internet, outros livros) questões sobre o assunto para resolver

17. Você já estudou o conteúdo de **Volume de Sólidos Geométricos**?

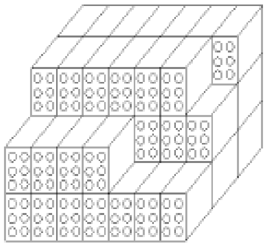
( )Não ( )Sim

18- Preencha com um **X** o quadro abaixo

Assunto	Você Lembra de ter estudado?		Grau de dificuldade para aprender				
	Sim	Não	Muito fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito difícil
Idéia de volume							
O metro cúbico seus múltiplos e submúltiplos							
Cálculo de Volume do **cubo**							
Cálculo de Volume do **paralelepípedo reto**							
Cálculo de Volume do **paralelepípedo obliquo**							
Cálculo de Volume do **prisma reto**							
Cálculo de Volume do **prisma oblíquo**							
Cálculo de Volume do **cone reto**							
Cálculo de Volume do **cone oblíquo**							
Cálculo de Volume do **cilindro reto**							
Cálculo de Volume do **cilindro oblíquo**							
Cálculo de Volume da **esfera**							
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura simples e apresentam imagens para ilustrar a situação							
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura composta e apresentam imagens para ilustrar a situação							
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura simples e não apresentam imagens para ilustrar a situação							
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura simples e não apresentam imagens para ilustrar a situação							
Problemas sobre **volume de sólidos geométricos** que envolvam uma figura composta e não apresentam imagens para ilustrar a situação							
Problemas sobre **volume de Tronco de Pirâmide**							

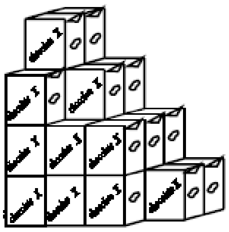
Resolva as questões abaixo

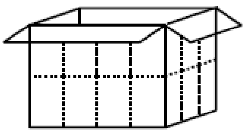
01-. Quantos tijolos formam o sólido abaixo?



Resposta:

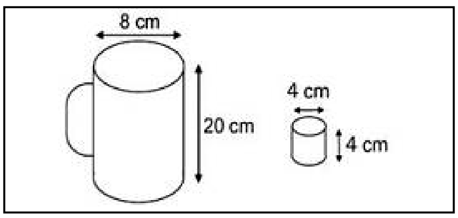
02- Quantas caixas de chocolate sobrarão após encher a caixa?





Resposta:

03- Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos. Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os copinhos. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá enche no máximo quantos copinhos:

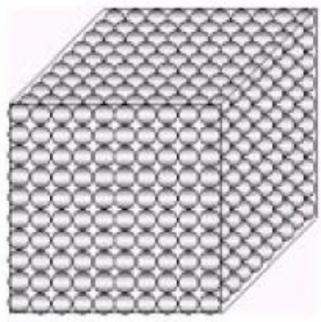


Resposta:

04- Um motorista transporta areia em um caminhão que possui carroceria medindo 6m de comprimento 2,5 de largura e 1m de altura. Quantos m^3 de areia esse motorista transporta neste caminhão?

Resposta:

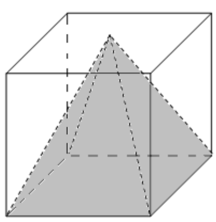
05- Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado quantas bolinhas?



Resposta:

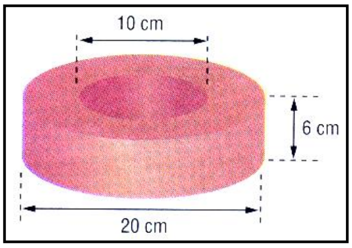
06- Um empresário produz sólidos pedagógicos de plástico, como por exemplo, pirâmides. Ele quer embalá-las em caixas no formato de um cubo, sabendo que a pirâmide está inscrita, como mostra a figura abaixo.

Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3, então o volume do cubo, em m^3, é igual a:



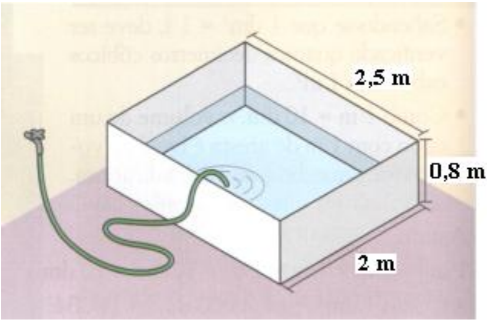
Resposta:

07- Uma peça de madeira tem as dimensões e forma da figura abaixo. Qual é o volume de madeira empregado para fabricar esta peça?



Resposta:

08- Uma mangueira, que despeja água numa piscina no formato de um paralelepípedo, que mede 2 metros de comprimento, 0,8m de altura e 2,5m de largura, de acordo com a figura abaixo:



O volume desta piscina, em m³, é:

Resposta:

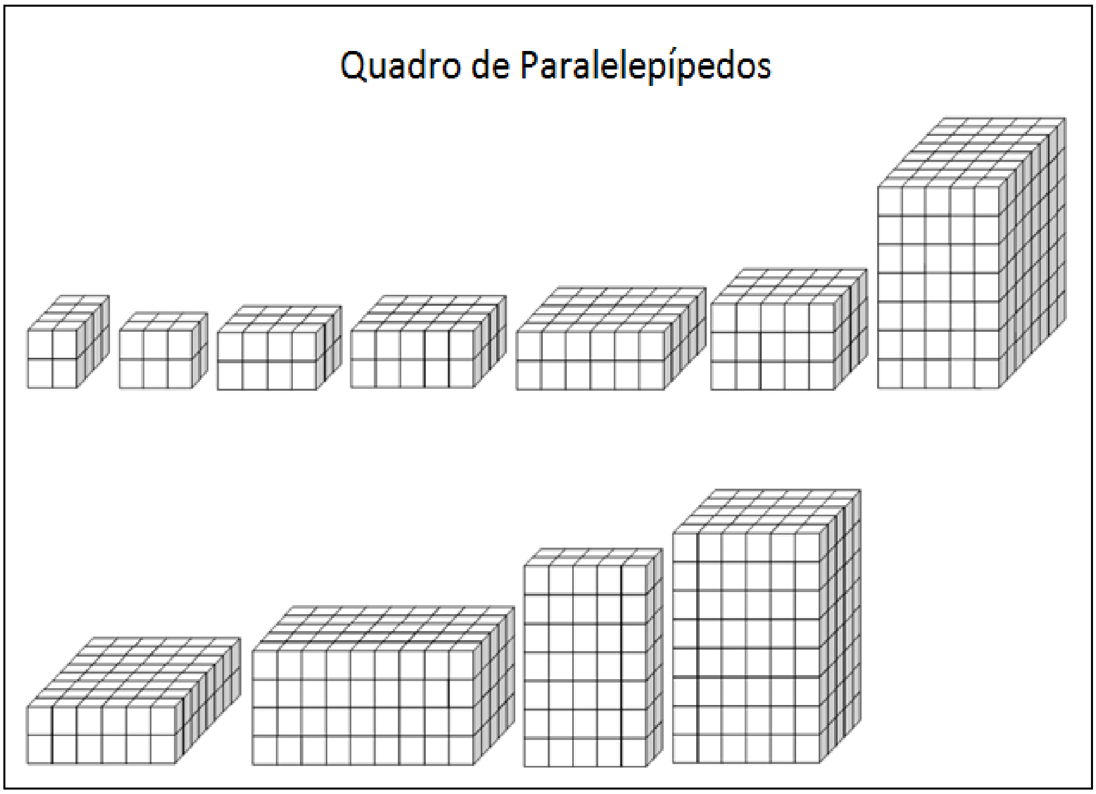
09- Qual o volume de uma esfera que possui 10 cm de raio.

Resposta:

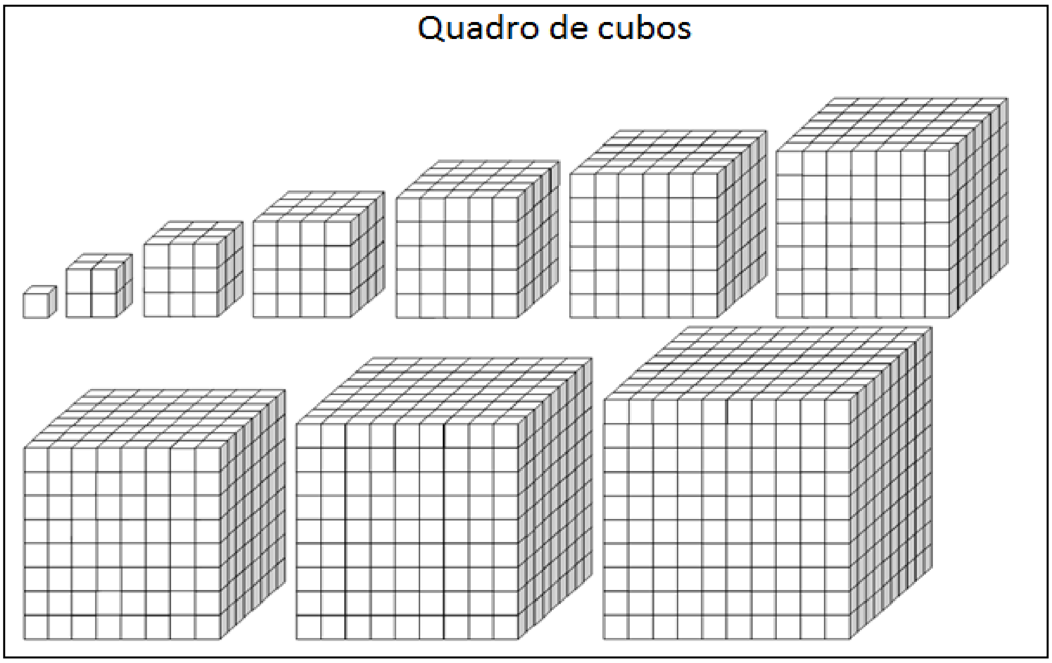
10- cone reto mede 8 *cm* de raio e 15 *cm* de altura. Qual o seu volume?

Resposta:

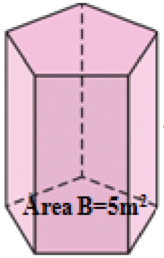
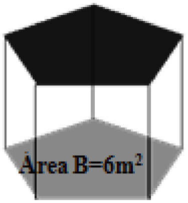
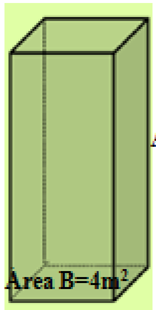
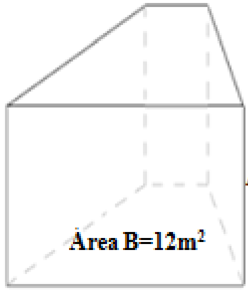
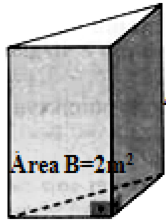
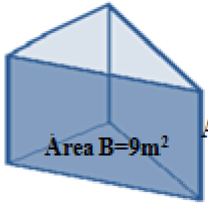
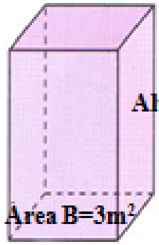
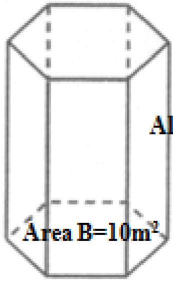
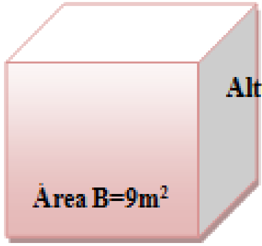
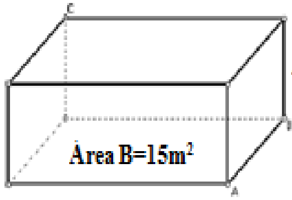
APÊNDICE C–Quadro de Paralelepípedo



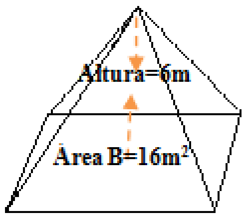
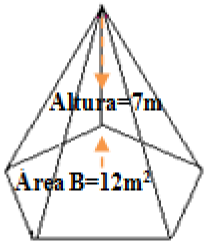
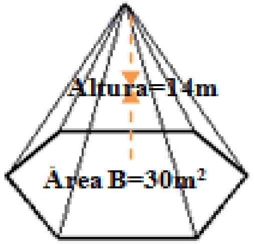
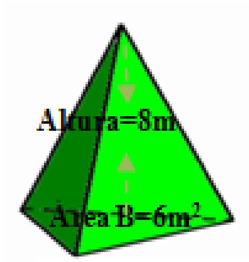
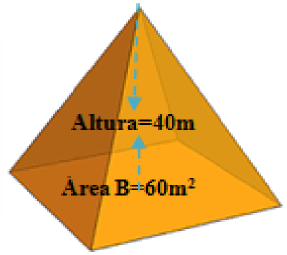
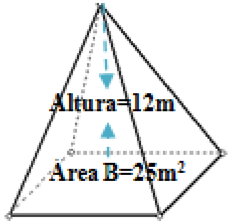
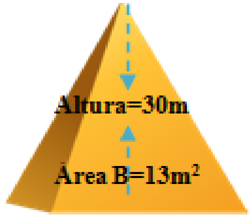
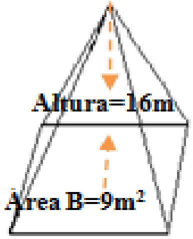
APÊNDICE D–Quadro de Cubos



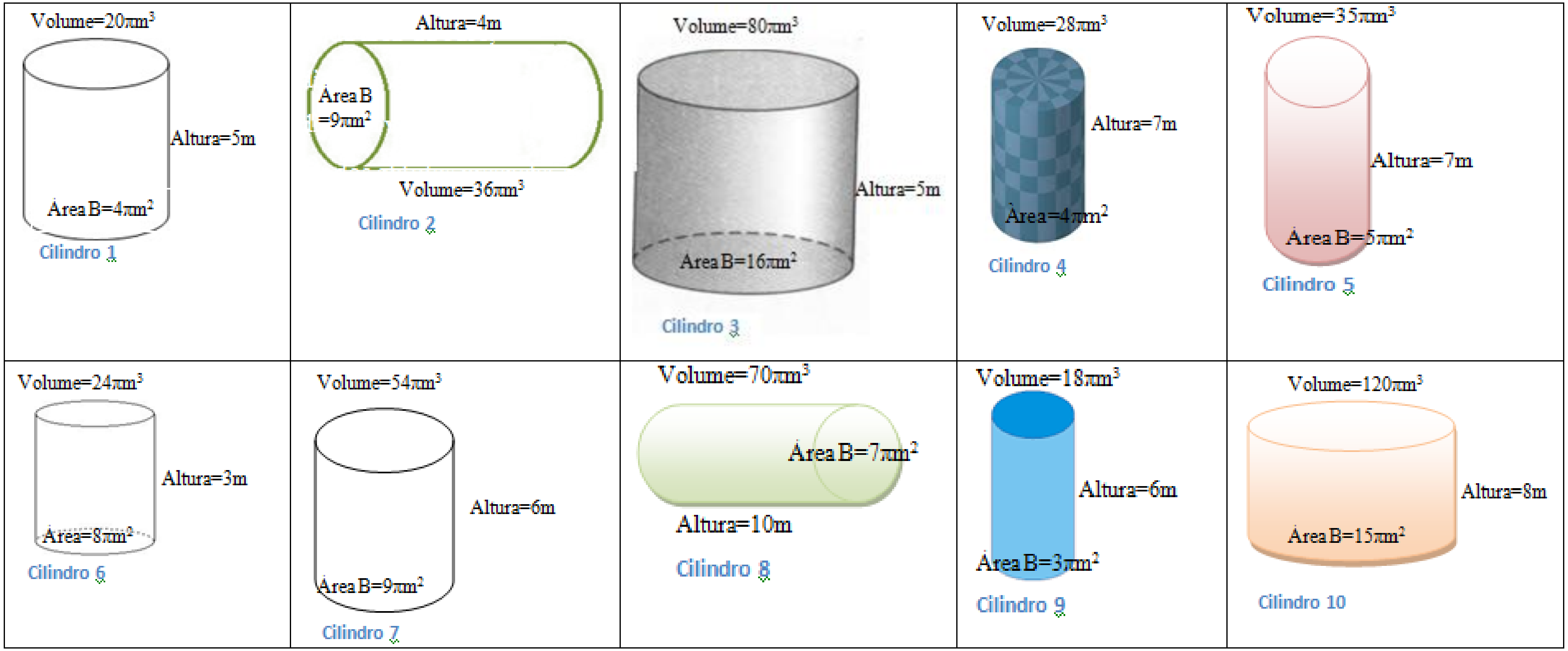
APÊNDICE E–Quadro de Prismas

Volume=40m^3  Altura=8m Área B=5m^2 Prisma nº1	Volume=18m^3  Altura=3m Área B=6m^2 Prisma nº2	Volume=32m^3  Altura=8m Área B=4m^2 Prisma nº3	Volume=120m^3  Altura=10m Área B=12m^2 Prisma nº 4	Volume=14m^3  Altura=7m Área B=2m^2 Prisma nº5
Volume=45m^3  Altura=5m Área B=9m^2 Prisma6	Volume=33m^3  Altura=11m Área B=3m^2 Prisma nº7	Volume=150m^3  Altura=15m Área B=10m^2 Prisma8	Volume=27m^3  Altura=3m Área B=9m^2 Prisma nº9	Volume=60m^3  Altura=4m Área B=15m^2 Prisma nº10

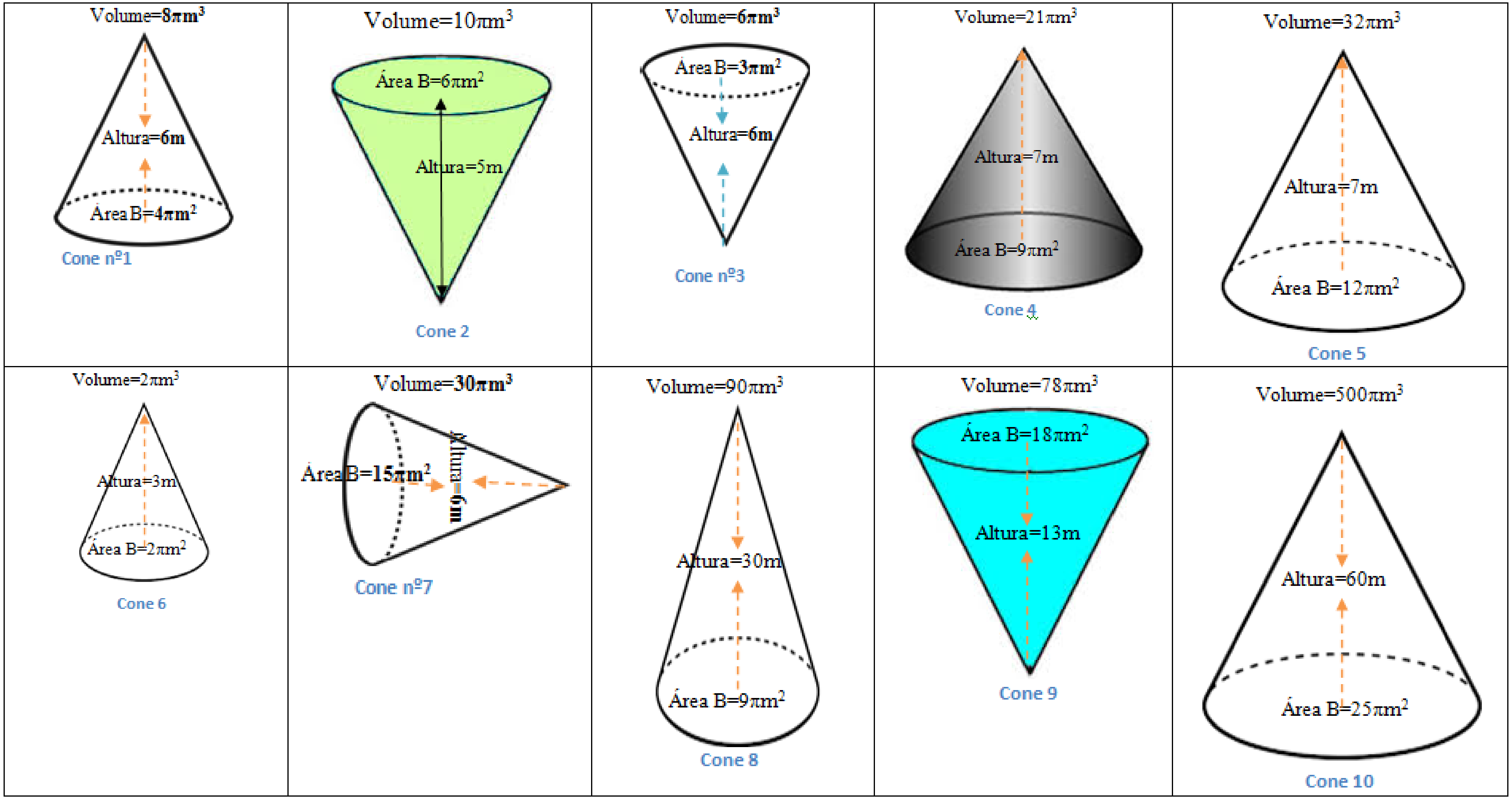
APÊNDICE F–Quadro de Pirâmides

Volume=32m^3  Altura=6m Área B=16m^2 Pirâmide nº1	Volume=28m^3  Altura=7m Área B=12m^2 Pirâmide nº2	Volume=140m^3  Altura=14m Área B=30m^2 Pirâmide nº3	Volume=16m^3  Altura=8m Área B=6m^2 Prisma nº4	Volume =800m^3  Altura=40m Área B=60m^2 Pirâmide nº5
Volume= 100m^3  Altura=12m Área B=25m^2 Pirâmide nº6	Volume= 250m^3  Altura=15m Área B=50m^2 Pirâmide nº7	Volume =130m^3  Altura=30m Área B=13m^2 Pirâmide nº8	Volume =48m^3  Altura=16m Área B=9m^2 Pirâmide nº9	Volume =1500m^3  Altura=50m Área B=90m^2 Pirâmide nº10

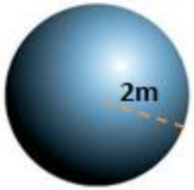
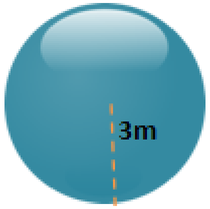
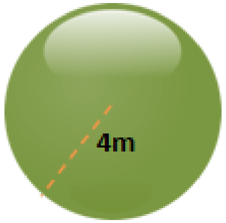
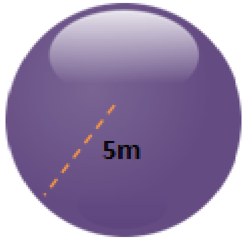
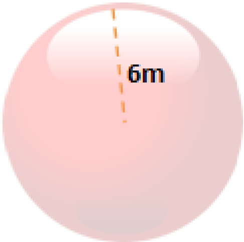
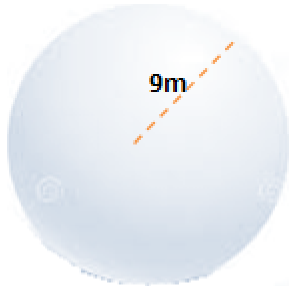
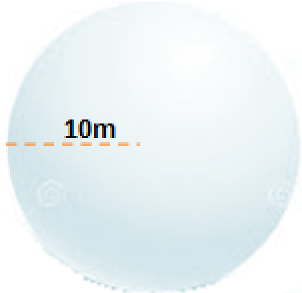
APÊNDICE G–Quadro de Cilindros



APÊNDICE H–Quadro de Cones



APÊNDICE I–Quadro de Esferas

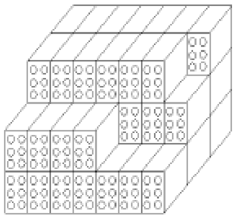
Volume=$\frac{4}{3}\pi m^3$  Esfera 1	Volume=$\frac{32}{3}\pi m^3$  Esfera 2	Volume=$36\pi m^3$  Esfera 3	Volume=$\frac{256}{3}\pi m^3$  Esfera 4	Volume=$\frac{500}{3}\pi m^3$  Esfera 5
Volume=$288\pi m^3$  Esfera 6	Volume=$\frac{1372}{3}\pi m^3$  Esfera 7	Volume=$\frac{2048}{3}\pi m^3$  Esfera 8	Volume=$972\pi m^3$  Esfera 9	Volume=$\frac{4000}{3}\pi m^3$  Esfera 10

APÊNDICE J–Questões do Pré- Teste

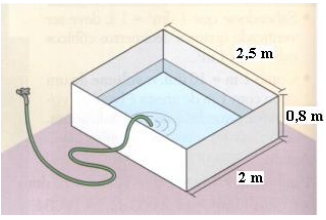
Questões de Avaliação (Pós teste)

Resolva as questões abaixo

01-. Quantos tijolos formam o sólido abaixo?

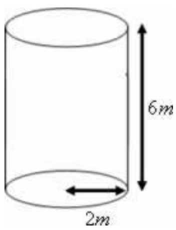


02- Uma mangueira, que despeja água numa piscina no formato de um paralelepípedo, que mede 2 metros de comprimento, 0,8m de altura e 2,5m de largura, de acordo com a figura abaixo:



O volume desta piscina, em m³, é:

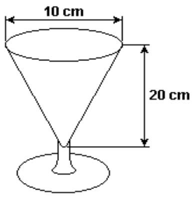
03- Um reservatório em formato cilíndrico possui 6 metros de altura e raio da base igual a 2 metros. Determine:



Qual a capacidade desse reservatório em litros?

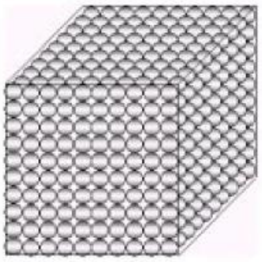
04- Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio **3 cm** podemos fazer a partir de um recipiente que contém $24\pi m^3$ de chocolate?

05- Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de milk shake com as dimensões mostradas no desenho.



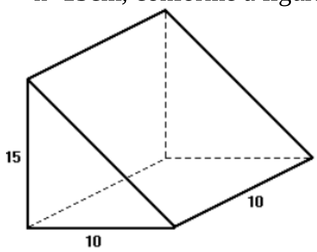
Sabendo-se que a taça estava totalmente cheia e que eles beberam todo o milk shake, calcule qual foi o volume, em m^3 e mL, ingerido pelo casal. Adote $\pi = 3$.

06- Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado quantas bolinhas?



07- A base de uma pirâmide é um quadrado com 8cm de lado, qual o volume dessa pirâmide, em cm^3, sabendo que sua altura é 10cm?

08- De uma viga de madeira de seção quadrada de lado L=10cm extrai-se uma cunha de altura h=15cm, conforme a figura. O volume da cunha é:



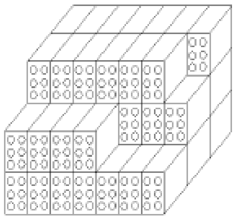
09- Seu Joaquim Foi colocar gasolina no seu carro, que estava com o tanque pela metade. Colocou 35 litros e encheu o tanque. Qual é a capacidade do tanque em m^3?

10- Um aquário, que tem a forma de um cubo, possui 40cm de aresta. Qual é seu volume em cm^3?

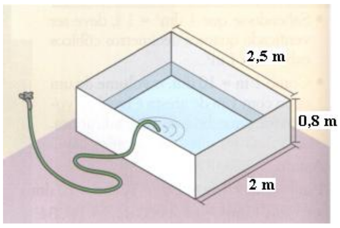
APÊNDICE K–Questões do Pós- Teste

Resolva as questões abaixo

01-. Quantos tijolos formam o sólido abaixo?

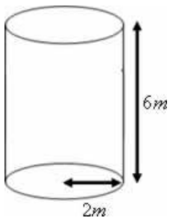


02- Uma mangueira, que despeja água numa piscina no formato de um paralelepípedo, que mede 2 metros de comprimento, 0,8m de altura e 2,5m de largura, de acordo com a figura abaixo:



O volume desta piscina, em m³, é:

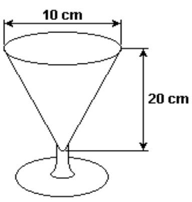
03- Um reservatório em formato cilíndrico possui 6 metros de altura e raio da base igual a 2 metros. Determine:



Qual a capacidade desse reservatório em litros?

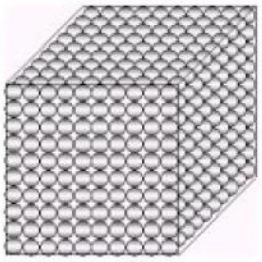
04- Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio **3 cm** podemos fazer a partir de um recipiente que contém $24\pi m^3$ de chocolate?

05- Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de milk shake com as dimensões mostradas no desenho.



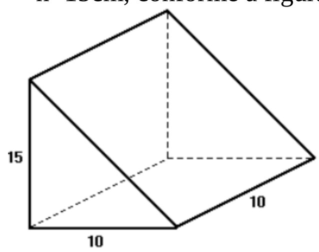
Sabendo-se que a taça estava totalmente cheia e que eles beberam todo o milk shake, calcule qual foi o volume, em m^3 e mL, ingerido pelo casal. Adote $\pi = 3$.

06- Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado quantas bolinhas?



07- A base de uma pirâmide é um quadrado com 8cm de lado, qual o volume dessa pirâmide, em cm^3, sabendo que sua altura é 10cm?

08- De uma viga de madeira de seção quadrada de lado L=10cm extrai-se uma cunha de altura h=15cm, conforme a figura. O volume da cunha é:



09- Seu Joaquim Foi colocar gasolina no seu carro, que estava com o tanque pela metade. Colocou 35 litros e encheu o tanque. Qual é a capacidade do tanque em m^3?

10- Um aquário, que tem a forma de um cubo, possui 40cm de aresta. Qual é seu volume em cm^3?