



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

PRODUTO EDUCACIONAL

**GUIA DIDÁTICO-PEDAGÓGICO PARA O
ENSINO DE LIMITES POR MEIO DA
ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA**

EDUARDO RAFAEL ZIMDARS

JOINVILLE, SC

2018

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Programa: ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
Nível: MESTRADO PROFISSIONAL
Área de Concentração: Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias
Linha de Pesquisa: Ensino Aprendizagem e Formação de Professores

Título: Guia Didático-Pedagógico para o Ensino de Limites por meio da Assimilação Solidária

Autor: Eduardo Rafael Zimdars

Orientadora: Regina Helena Munhoz

Data: 21/02/2018

Produto Educacional: Guia Didático-Pedagógico

Nível de ensino: Ensino Superior

Área de Conhecimento: Matemática

Tema: Limites de funções reais com uma variável real, Continuidade

Descrição do Produto Educacional:

Resultado da pesquisa de mestrado, este guia didático-pedagógico é direcionado aos professores de Cálculo Diferencial e Integral que tenham interesse em uma proposta interventora para o ensino de limites. Desse modo, é composto pelos materiais – fichas de trabalho, contrato de trabalho, avaliação e questionários – e informações necessárias para implementação em sala de aula da Pedagogia da Assimilação Solidária.

Biblioteca Universitária UDESC: <http://www.udesc.br/bibliotecauniversitaria>

Publicação Associada: PEDAGOGIA DA ASSIMILAÇÃO SOLIDÁRIA: Desafios e Possibilidades no Processo de Ensino e Aprendizagem de Limites

URL: <http://www.cct.udesc.br>

Arquivo	*Descrição	Formato
0019018.pdf	Texto completo	Adobe PDF

Licença de uso: O autor é titular dos direitos autorais dos documentos disponíveis e é vedado, nos termos da lei, a comercialização de qualquer espécie sem sua autorização prévia (Lei nº 12.853, de 2013).

Caro(a) colega professor(a),

Apresentamos um guia didático-pedagógico para ensino de limites por meio da Pedagogia da Assimilação Solidária (AS). Ele aponta uma alternativa para o ensino tradicional vigente (ETV), tornando o estudante responsável e sujeito ativo do processo de ensino e aprendizagem.

A AS se configura como uma pedagogia, pois, conjuntamente com as alterações metodológicas que propõe para o ensino de matemática – especificamente ensino de limites neste guia, é um projeto político criado na sala de aula. Nesse sentido, o primeiro objetivo em propor uma alternativa ao ETV é evidenciar os motivos pelos quais o professor deseja assumir a AS como forma de trabalho. Por isso, é importante a quem assumi-la, compreender que a AS quer, em conjunto com o prêmio do saber – dado pelas avaliações escritas, considerar como critério subsidiário de aprovação o tempo de trabalho efetivo em grupo.

Todas as regras, formas de promoção e de trabalho são apresentadas no contrato de trabalho, gênese da proposta. Este contrato é aprovado por todos os participantes e pode ser alterado se assim a maioria quiser, com exceção de alguns itens considerados substanciais a AS. Entre esses itens, que serão abarcados ao longo deste guia, encontra-se a forma de trabalho em sala de aula, que é feita em grupos de trabalho de até quatro estudantes com desenvolvimento matemático similar. Estes grupos são avaliados pelo tempo de trabalho efetivo realizado e não pelo produto final, como ocorre nas provas. O trabalho de cada aula, ou seja, os assuntos que o grupo deve abordar com a mediação do professor, são disponibilizados na forma de fichas de trabalho. Elas também são apresentadas ao longo do guia.

A aula baseada na AS, além das fichas e do contrato de trabalho, conta com o Ensino Remedial, momento oferecido extraclasse, no qual o professor convida estudantes com rendimento matemático não satisfatório para compreensão de conceitos/conteúdos. O Ensino Remedial, além disso, é importante para os participantes que não conseguem finalizar todos os problemas propostos em sala.

Essa proposta exige que o professor esteja preparado para assumir uma posição de mediador do trabalho de aprendizagem do grupo. Além disso, que entenda que todos os itens da AS – inclusive o Ensino Remedial – são indissociáveis.

Para elucidação da AS enquanto proposta alternativa ao ensino de limites o presente guia foi pensando. Assim, ele foi organizado da seguinte forma:

- ➔ **Capítulo I:** Elucida os objetivos da AS;
- ➔ **Capítulo II:** Apresenta um contrato de trabalho e sugestões para implementação em sala de aula;
- ➔ **Capítulo III:** Elenca sete fichas de trabalho, de sugestões e de respostas com problemas relacionados ao conteúdo de Limites;
- ➔ **Capítulo IV:** Traz uma proposta de avaliação e forma de aplicação com base na AS;
- ➔ **Capítulo V:** apresenta a fórmula de cálculo da média, modelo de planilha de notas, questionário inicial e de satisfação, avaliação diagnóstica e considerações finais.

Esperamos que os leitores tenham experiências enriquecedoras, tanto quanto nós tivemos, com a aplicação da AS em uma turma de CDI I. Sobre nossa intervenção, que foi parte de uma pesquisa de mestrado, na qual diversos itens deste guia foram aplicados, pode ser consultada a dissertação *Pedagogia da Assimilação Solidária: Desafios e Possibilidades no Processo de Ensino e Aprendizagem de Limites*. Caso tenham sugestões, relatos de aplicação, elogios ou críticas, podem nos contatar por meio do e-mail erzimdars@gmail.com.

Eduardo Rafael Zimdars

Regina Helena Munhoz

Sumário

<i>Capítulo I – Introdução</i>	<i>5</i>
<i>Capítulo II – Contrato de Trabalho.....</i>	<i>9</i>
➔ Como implementar o contrato de trabalho em sala?.....	11
➔ Sugestão de contrato de trabalho.....	12
<i>Capítulo III – Fichas de Trabalho.....</i>	<i>19</i>
➔ Ficha de Trabalho 1	21
➔ Ficha de Trabalho 2	27
➔ Ficha de Trabalho 3	34
➔ Ficha de Trabalho 4	44
➔ Ficha de Trabalho 5	56
➔ Ficha de Trabalho 6	63
➔ Ficha de Trabalho 7	71
<i>Capítulo IV – Avaliação na Proposta da AS</i>	<i>81</i>
<i>Capítulo V – Considerações Gerais e Sugestões para Aplicação.....</i>	<i>89</i>
➔ Planilha de notas e fórmula para o cálculo	89
➔ Questionário inicial	90
➔ Questionário final.....	91
➔ Teste sobre limites	92
➔ Considerações finais.....	94
<i>Referências.....</i>	<i>96</i>



Capítulo I – Introdução

A Pedagogia da Assimilação Solidária (AS) foi desenvolvida pelo pesquisador brasileiro Roberto Ribeiro Baldino. Ele desenvolveu a maior parte dos estudos nessa área quando foi professor da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP. Além dele, as professoras Tânia Batista Cabral e Maria Regina Gomes da Silva, as quais foram orientadas por Baldino, nos cursos de mestrado e Doutorado na UNESP, também desenvolveram estudos na área.

O principal objetivo da AS é romper com o Ensino Tradicional Vigente (ETV) (BALDINO, 1993, 1994, 1995, 1996; SILVA, 1997). Na concepção de Ensino Tradicional, existe um contrato de trabalho implícito que mantém professor e alunos atuando conforme o sistema vigente. Esse contrato assegura ao ETV as justificativas necessárias para aprovar os estudantes por critérios subsidiários ao rendimento matemático. Entre os vários critérios, estão os mais conhecidos: o professor faz questões “fáceis” na prova para que a pontuação mínima seja atingida, trabalhos extras, avaliações substitutivas, de segunda chamada, recuperações. Enquanto isso o aluno estuda apenas a parte do conteúdo que será solicitada na avaliação, cria técnicas de resolução e memorização para não precisar “entender”, apenas resolver. Assim, finge-se que o aluno aprendeu e que, se não for aprovado, não o foi porque não estudou o suficiente (BALDINO, 1995).

Dessa maneira, Baldino (1995) e Silva (1997) mostram que a questão da aprovação e reprovação ganha outro significado. Os alunos reprovados são aqueles que de alguma forma não se adequaram ao contrato estabelecido pelo ETV. Para essas reprovações se usam as justificativas de que o aluno não tem interesse, falta base, não faz os exercícios, entre outras. Entretanto, Baldino diz que “No ETV alardeia-se a preocupação com a injustiça de reprovar o aluno que sabe, exatamente para desviar a atenção da injustiça que mais se comete, ao aprovar o que não sabe” (Ibid., p. 4). Isso significa que muitas vezes, alunos aprovados são aqueles que se adequaram as “regras” do contrato ou que “No ETV sabe-se que muito poucos adquirem o que denominam mínimos necessários e se dá um jeito de aprovar boa parte dos que não atingiram estes mínimos” (Ibid., p. 4).

À vista disso, a AS é estruturada em um contrato de trabalho democrático, ou seja, conhecido por todos estudantes e aprovado pela maioria. Ele é apresentado pelo professor, evidenciando os aspectos pelos quais rompe-se com o ETV, como destacamos anteriormente, caracterizando a AS como um projeto político. O contrato apresenta os objetivos da AS e a forma de trabalho. Nessa concepção, conjuntamente ao desenvolvimento matemático auferido pelas avaliações escritas, oportuniza-se ao estudante o justo prêmio pelo tempo de trabalho de aprendizagem realizado em grupo. Assim, a importância da escola/universidade está em reconhecer que todos os alunos, em sua individualidade, tiveram condições de construir conhecimentos, como vemos: “A escola seria valorizada, não porque os que se formam adquiriram uma competência mínima, aliás, sempre falsa, mas porque eles terão trabalhado tanto quanto possível, durante tanto tempo quanto possível” (BALDINO, 1998, p. 13).

O trabalho de aprendizagem do qual se fala é o desenvolvimento dos grupos de trabalho a cada aula, de acordo com os problemas/temas estudados. A ideia de avaliar os estudantes pelo tempo que permanecem trabalhando, tem como objetivo considerar a construção do conhecimento, não o produto final. Por isso, a cada aula com base na AS, o estudante terá uma nota de acordo com o trabalho do dia.

Na sala de aula, o trabalho será produtivo se forem observados alguns aspectos dos grupos, tanto por seus próprios integrantes, como pelo professor. Conforme Baldino: “O trabalho produtivo é medido por sua duração, não pela competência matemática atingida, nem pela extensão do assunto coberto (quantidade de exercícios resolvidos, número de páginas lidas, etc.)” (BALDINO, 1998, p. 13). Cabe, assim, a todos os envolvidos definirem se foi produtivo ou não, sendo que não existem critérios gerais, pois cada grupo, embora esteja com o mesmo propósito de trabalho inicial, enfrentará uma realidade distinta. Essa avaliação crítica do trabalho desenvolvido é que determina o peso da AS, ou seja, o peso da nota do dia na média final. Nessa perspectiva, o mais importante é quanto cada grupo produziu, não a comparação com o resultado final que deveria ter sido alcançado (BALDINO, 1993).

Desse modo, na AS o papel do professor é de orientar o trabalho dos grupos. Ele faz a intervenção quando os estudantes o chamam ou quando constata alguma situação que seja relevante a sua participação. Porém, o professor não diz sim ou não, certo ou errado, mas tenta, com base nas fichas de trabalho e diálogo, entender o raciocínio do grupo – ou aluno, para então fazer colocações que auxiliarão no desenvolvimento do

problema. Durante toda a aula o professor vai atendendo os grupos, como vemos: “Eu vou de grupo em grupo, atendendo aos chamados e fornecendo a cada um a explicação adequada no momento em que surge a dúvida” (BALDINO, 2012, p. 404).

Os grupos desenvolvem os conteúdos com base na Ficha de Trabalho (FT), onde o professor elenca problemas e exercícios para o grupo resolver. Além disso, são distribuídas fichas de sugestões que auxiliam os grupos na resolução dos problemas. Ao final da aula ainda é entregue a ficha de respostas dos problemas/exercícios, no momento da plenária. A plenária é feita nos últimos 10/15 minutos da aula, para comentar o trabalho dos grupos, votar o peso da nota do dia e para serem feitas quaisquer colocações dos estudantes. Nesse momento podem ser votadas alterações no contrato de trabalho.

Outro ponto substancial da AS é o Ensino Remedial, momento extraclasse oferecido pelo professor aos estudantes que apresentam dificuldades no desenvolvimento matemático dos conteúdos. O lema do Ensino Remedial é “ensina-se ouvindo, aprende-se falando” (BALDINO, 2001, p. 13). Os alunos mudam de papel com o professor, de modo que este ocupa a função de analista, sendo uma das formas de fazer isso com base na estratégia didática denominada de terceira-situação-problema (BALDINO, 1993, p. 13). Essa estratégia é assim: a partir da situação inicial justificada pelos alunos (possivelmente errada), o professor propõe uma segunda situação-problema de modo a contradizer a justificativa dos alunos. Surge, então, uma terceira-situação-problema que deverá ser resolvida, nesse momento é iniciado o Ensino Remedial. Muitas dessas discussões podem ser feitas de forma oral, dependendo o número de alunos presentes.

Com base no exposto, alguns leitores podem indagar sobre qual a proposta da AS para ensinar limites, especificamente, comparando-a com metodologias de ensino. Por isso, é importante destacar que a AS não tem como objetivo romper com os conteúdos ou abordagem deles, no sentido de serem tratados com viés mais algébrico, gráfico, aplicado – através da resolução de problemas, história da matemática, entre outros, mas rompe com o uso que se faz deles. Com isso, a AS permanece tendo o conhecimento matemático como álibi¹, como faz o ETV.

¹ Baldino (1998) cita o termo “álibi” quando retrata o fracasso da AS. Ter o conhecimento como álibi, para ele, significa apontar que a AS não tem a pretensão de resolver todos os problemas da Educação Matemática, no que tange a aprendizagem dos estudantes.

Contudo, é preciso determinar do que é álibi. “Para o ensino tradicional vigente, o conhecimento é o álibi: 1) da instituição, dos critérios subsidiários de aprovação, cujo produto final é a reprodução da consciência cínica; 2) da iniciação dos alunos ao processo de apropriação do trabalho alheio” (BALDINO, 1998, p. 14). Em contrapartida, na AS o conhecimento é álibi para expor e contrapor esses dois fatores, corroborando, em princípio, para não serem reproduzidos. Desse modo, com o contrato de trabalho vigente na AS, aprovado de forma democrática, no qual todos os critérios de promoção e avaliação são apresentados, rompe-se com o primeiro álibi do ETV. Quanto ao segundo álibi, a AS entende que o estudante deve trabalhar tanto quanto for possível para aquisição de conhecimento. Assim, a aprovação/reprovação não estaria somente atrelada à competência final atingida, medida pela nota da prova, mas pelo trabalho de cada estudante, desenvolvido para a aprendizagem (BALDINO, 1998).

Capítulo II – Contrato de Trabalho

Todos os princípios da AS e suas normas constam no contrato de trabalho. Este termo foi usado pela primeira vez por Tânia Cabral, enquanto conceito, derivado do contrato didático (CABRAL, 1992 *apud* BALDINO, 1998). O contrato de trabalho tem dois objetivos centrais, o primeiro, conceitualmente, é o meio de negociação da promoção por meio do trabalho produtivo e coletivo dos alunos. Mede, nesse caso, a quantidade de tempo despendida para aprendizagem dos conteúdos, mas sem relação com o produto final como nas avaliações tradicionais. Consequentemente,

Convém repetir que a AS possibilita outros critérios de aprovação, ao se mudar o conceito de mérito, através da instituição de valores que vão além do valor pela competência de conteúdos, isto é, por se instituir, ao lado do prêmio ao saber, o justo prêmio ao trabalho coletivo produzido em sala de aula (SILVA, 1997, p. 20).

Essa Pedagogia faz com que o aluno possa escolher como será avaliado: apenas pela prova escrita, como no ETV, ou pelo efetivo trabalho coletivo em sala. Esse é o princípio básico do contrato, pois garante ao aluno a posição central no processo de escolha, além de permitir que o professor exponha a farsa do atual sistema de ensino (BALDINO, 1998).

O segundo objetivo é que ele tem função estrutural, pois apresenta as formas de avaliar essa promoção pelo trabalho produtivo, sendo que os participantes, por meio de votação, poderão alterar os itens desse contrato, com exceção de alguns princípios que são irrevogáveis. A alteração desses princípios – mostrados na sequência – descaracterizariam a AS, transformando o ETV do quadro para as fichas de trabalho. Caso os estudantes votem para retirá-los, o professor deverá permitir, porém destacando que, com isso, retorna-se ao ETV, sem os prêmios por tempo de trabalho dados pela AS.

O primeiro princípio é a “Promoção por avaliação do processo de trabalho, não do produto final”, esse item corresponde ao propósito conceitual do contrato de trabalho, por isso já foi discutido ao longo da apresentação da AS como proposta. Em suma, o que se espera é que os alunos, em grupo, desenvolvam um trabalho produtivo e coletivo de aprendizagem.

O segundo princípio: “Medida da duração do trabalho produtivo, não da competência atingida” ratifica que a nota da AS será diretamente proporcional ao tempo de trabalho. No contrato de trabalho existem outros termos que determinam como a nota é calculada, mas em resumo, para cada aula da AS é dado um peso para o dia, que é escolhido pelo grupão, levando em conta o trabalho produzido e sua relevância para aprendizagem. O terceiro princípio: “Acompanhamento do raciocínio, não correção do trabalho”, significa que o professor não é detentor do conhecimento, uma vez que ele não classifica as respostas ou resoluções como certas ou erradas, mas indica caminhos e estratégias para auxiliar. Ele é mediador no caminho da aprendizagem de novos conteúdos, fazendo perguntas intrigantes e mostrando se concorda (ou discorda) com o raciocínio do grupo e por quê (BALDINO, 1998; SILVA, 1997).

Para auxiliar nesse processo de construção do conhecimento, é inegociável para a AS o quarto princípio: “Grupos Homogêneos: a sala de aula será dividida em grupos de 3 ou 4 alunos, sem possibilidade de trabalho individual, segundo o critério: paridade em relação ao conhecimento matemático”. Os grupos devem estar em um mesmo nível de conhecimento na disciplina, pois, segundo o pesquisador supracitado, caso existam indivíduos que saibam mais, a farsa do ETV volta para os grupos. Isso acontece, uma vez que alguns ensinam, desenvolvem as atividades no seu ritmo, e os demais fingem que entendem o desenvolvimento. Logo, é importante que os desafios propostos sejam para o grupo, não para um ou alguns indivíduos apenas. Por isso, sobre esse princípio: “Esse ponto é fundamental. A tarefa do grupo de trabalho em Assimilação Solidária é uma tarefa de aprendizagem; ela tem que ser uma tarefa do grupo” (BALDINO, 2001, p.5).

Para os alunos que demonstrem, previamente, nível de conhecimento matemático maior do que a maioria da sala, eles podem auxiliar como monitores, se assim quiserem. Essa é uma das finalidades do quinto princípio: “Aumento da competência média da turma, não da máxima de alguns”. Aqui percebemos que “O interesse da Assimilação Solidária é pelo aluno médio e pelo aluno com dificuldades especiais” (Ibid., p. 4). Os demais devem ser motivados a participarem em grupos que estejam mais avançados ou como monitores, como mencionamos.

O penúltimo princípio diz respeito ao papel do professor e dos grupos perante a sala toda (grupão): “Exposições após o trabalho dos alunos sobre conteúdos da ementa”. A respeito disso, Baldino (2001) diz que é importante o professor resolver exercícios, explicar definições se for uma dúvida do aluno: “Ele repousa na constatação de que não

adianta dar ao aluno a solução de um problema que não seja um problema dele, não adianta responder a uma pergunta que ele não tenha feito” (Ibid., p. 4). Assim, não há sentido em resolver exercícios no quadro e pedir que o aluno repita, a isso já nomeamos de ETV e mostramos os problemas. Na AS o professor só vai ao quadro e fala ao grupão quando todos tiverem trabalhado, ou seja, no momento final da aula. Nesse momento, além do professor, os grupos podem falar e expor suas dúvidas ou constatações (Ibid.).

Desse modo, na AS o papel do professor é de orientar o trabalho dos grupos. Ele faz a intervenção quando os estudantes o chamam ou quando constata alguma situação que seja relevante a sua participação. Porém, o professor não diz sim ou não, certo ou errado, mas tenta, com base nas fichas de trabalho e diálogo, entender o raciocínio do grupo – ou aluno, para então fazer colocações que auxiliarão no desenvolvimento do problema. Durante toda a aula o professor vai atendendo os grupos, como vemos: “Eu vou de grupo em grupo, atendendo aos chamados e fornecendo a cada um a explicação adequada no momento em que surge a dúvida” (BALDINO, 2012, p. 404).

Além disso, é no final da aula que acontece a plenária, isto é, um momento de discussão do trabalho do dia, no qual é votado o peso que a aula deve ter na AS. Nela, cada aluno tem direito a opinar, mas deixando claro que o princípio que rege é a: “Supremacia do Grupão (sala toda) em relação aos grupos e, destes, em relação aos indivíduos”. Nesse caso,

Na Assimilação Solidária só são toleradas as individualidades capazes de se colocarem e se exporem frente aos grupos. O indivíduo socialmente útil é o *indivíduo no grupo*. O vantagista tem sua ação bloqueada. O que se espera é o cumprimento de compromissos publicamente assumidos (Ibid., p. 5).

É importante entender que não existirão acordos implícitos, que todas as formas de aprovação – e reprovação – são esclarecidas, os alunos tem conhecimento delas e podem democraticamente modificá-las.

➔ *Como implementar o contrato de trabalho em sala?*

Professor, você deverá iniciar a aula explicando sua escolha, no caso a AS. Nesta primeira aula terá que argumentar e falar mais, pois os estudantes, em princípio, não terão

conhecimento da AS. Uma forma de fazer isso é utilizando o próprio guia, destacando e lendo algumas partes mais importantes.

No primeiro momento o professor leva o contrato pronto, deixando um tempo para os alunos pensarem se desejam alterar algum tópico apresentado – tempo de uma semana, por exemplo. As alterações devem ser propostas na plenária e votadas por todos os estudantes, o professor não vota, pois assume a postura de mediador.

A seguir apresentamos uma sugestão de contrato de trabalho. **Lembre-se:**

- ☑ Os princípios básicos não podem ser alterados, caso sejam, retornaremos ao ETV, sem os benefícios da AS;
- ☑ O aluno poderá optar por não participar, realizando as atividades de forma individual, mas sem os benefícios da AS;
- ☑ Em alguns momentos colocamos informações adicionais, elas são mostradas ao longo do texto com o ícone  e em fonte diferente do contrato.

→ *Sugestão de contrato de trabalho*

Assimilação Solidária: Contrato de Trabalho

O presente contrato² compõe um instrumento de ensino e aprendizagem com o objetivo principal de romper com o ensino tradicional vigente (ETV) que possui um contrato didático implícito. No ETV tem-se (a falsa) impressão que os alunos são aprovados apenas pelo conhecimento matemático adquirido, porém sabemos que muitos dos aprovados o foram por motivos subsidiários, não pelo conhecimento. Existem várias formas de conseguir esta aprovação subsidiária, talvez o exemplo mais claro seja do aluno que memoriza como resolver as questões, sem ter o trabalho de entender o conteúdo necessário. Outros exemplos não faltam, como estudar por provas antigas, para saber o que o professor vai “cobrar”. Na postura do professor também existem exemplos, como colocar questões fáceis na prova para o aluno atingir a pontuação mínima, já nas instituições de ensino a comprovação está presente quando exigem provas de recuperação, segunda chamada, etc. Isso mostra que o conhecimento matemático não é a

² Baseado nos Trabalhos de BALDINO (1993,1998).

única forma de obter aprovação. É aprovado o aluno que sabe “jogar” com as regras desse contrato implícito.

A Assimilação Solidária (AS) surge em oposição a farsa do ETV, baseada em um contrato de trabalho que permite ao estudante a promoção pelo efetivo trabalho coletivo desenvolvido, aprovado e exposto de forma democrática, não implícita. Todos saberão os critérios e formas de avaliação.

Na AS não se mede o conhecimento matemático adquirido, mas o tempo que foi despendido para alcançá-lo. Não se trata de avaliar quem levou mais tempo estudando determinado conteúdo, mas de quem efetivamente, em coletividade, desenvolveu algum estudo, aprimorou e desenvolveu conhecimentos na área do CDI. Nesse sentido, o processo de ensino e aprendizagem é centrado no aluno e não no professor e no conteúdo como no ETV. Além disso, a AS é uma intervenção democrática, pois não é imposta. Não retira o direito adquirido no ETV, quem desejar poderá ser avaliado apenas pelo seu desempenho nas provas escritas. Entretanto, aos que participarem, as horas dedicadas ao trabalho, principalmente em grupo, serão revertidas em bônus.

A criação de um ambiente de trabalho baseado na AS exige acordos, que são apresentados abaixo. Ressaltamos que eles podem ser discutidos, retirados e modificados, porém os princípios gerais são os pilares da AS e, por isso, não podem ser retirados (quem o fizer está voltando para o ETV).



O professor pode discutir mais a contraposição do ETV com a AS. Essa parte inicial apenas sugere formas de fazer isso.

Princípios Gerais:

- 1º Promoção por avaliação do processo de trabalho, não do produto final;
- 2º Medida da duração do trabalho produtivo, não da competência atingida;
- 3º Aumento da competência média da turma, não da máxima de alguns;
- 4º Acompanhamento do raciocínio, não correção do trabalho;
- 5º Exposições após o trabalho dos alunos sobre conteúdos da ementa;
- 6º Grupos Homogêneos: a sala de aula será dividida em grupos de 3 ou 4 alunos, sem possibilidade de trabalho individual, segundo o critério de aproveitamento na primeira avaliação realizada na disciplina;
- 7º Supremacia do Grupão (sala toda) em relação aos grupos e, destes, em relação aos indivíduos;
- 8º Qualquer alteração nas regras deverá ser proposta para o Grupão – sala toda – e votada por ele.



Em relação ao segundo item, a nota do dia de trabalho é proporcional ao tempo que os grupos permaneceram trabalhando, cumprindo as regras do contrato. Já os grupos homogêneos são necessários para a farsa do ETV não ser transferida aos grupos, onde um faz e os demais copiam. O conhecimento deve ser construído pelo grupo. Sugere-se que o professor divida a sala em dois ou três subgrupos de acordo com as notas/desenvolvimento matemático e os alunos possam escolher suas equipes no subgrupo que estiverem. Os grupos devem ser formados por três ou quatro integrantes, as duplas ou equipes maiores não são aconselhadas. Caso existam equipes que não tenham estabelecido boas relações interpessoais, os integrantes podem ser readequados a outros grupos, para melhorar este aspecto.

Da Forma de Trabalho:

9º O trabalho ocorrerá sempre nos grupos, com o uso de fichas disponibilizadas pelo professor no início de cada aula e material de consulta providenciado por cada aluno (livros, cópias, apostilas, material em meio eletrônico, softwares, etc.);

10º Cada indivíduo do grupo receberá sua ficha;

11º Cada grupo, além da ficha de trabalho, terá acesso a ficha de sugestões, que será utilizada para auxiliar na resolução dos problemas;

12º Haverá na mesa do professor uma ficha solução, com as respostas dos problemas da ficha de trabalho, que deverá ser consultada somente quando o grupo terminar a ficha de trabalho;

13º As fichas são formadas por problemas relacionados ao conteúdo que estudaremos, bem como, por instruções ou sugestões;

14º O objetivo é que o grupo trabalhe de forma homogênea, ou seja, que todos do grupo acompanhem o raciocínio e as discussões;

15º É proibido que o indivíduo tome decisões sem consultar o grupo;

16º O professor poderá ser chamado a qualquer momento, por decisão do grupo, sendo que ele escolhe quem do grupo lhe fará a pergunta;

17º O professor pode pedir que qualquer componente do grupo explique alguma situação da ficha de trabalho;

18º Ao final de cada aula o professor recolherá a ficha, antes da plenária, podendo, em determinadas situações, ser finalizada na aula seguinte ou em horário extraclasse;

19º Todo o material da aula (ficha de trabalho, de encaminhamentos e de solução) será disponibilizado aos alunos, de modo que deverão sempre trazer o material na aula seguinte.



O professor disponibiliza as fichas de trabalho – um por integrante – e as fichas de sugestões – uma por grupo – no início da aula. Ao final todos devem devolver as fichas de trabalho. É importante destacar que o objetivo não é finalizar os

problemas, mas discuti-los nos grupos, assim, as soluções devem ser entendidas por todos. Nas mediações nos grupos, o professor escolhe quem fará a pergunta, garantindo que todos discutiram o problema em questão, caso alguém não saiba explicar o que fizeram, o grupo é penalizado. A ficha de sugestões não é suficiente para resolver os problemas, o grupo deverá trazer materiais de consulta (livro, computador, etc.), caso não tragam, estão descumprindo uma regra do contrato.

Da Plenária:

- 20° Ocorrerá em todo encerramento de aula;
- 21° Terá duração de aproximadamente 15 minutos;
- 22° Neste momento os grupos poderão propor modificações aos itens deste contrato e justificar perda de pontos, caso julguem necessário;
- 23° Além disso, neste momento o professor poderá fazer retrospecto do conteúdo estudado durante a aula, com a contribuição dos grupos;
- 24° Faltar a plenária faz com que o aluno perca um ponto do dia;
- 25° A plenária pode votar o que deseja estudar nas próximas aulas;
- 26° A plenária decide o percentual que o trabalho do dia terá na nota da AS, limitando-o em até 50%.



Na plenária o professor pode inclusive resolver alguns itens. Mas lembre-se: o objetivo é resolver se perceber uma dúvida ou dificuldade da maioria dos grupos. A plenária é utilizada para discutir o trabalho do dia. Além disso, os grupos votam o peso do dia – não a nota. Esse peso é relacionado a importância que o trabalho teve para a construção de algum conceito. Ele deve ser pensando da seguinte forma: qual a importância do trabalho de hoje em relação ao estudo de limites? Cada dia terá um peso, sendo que ao final da intervenção calcula-se o peso médio. Limitamos em 50% esse peso, pois, caso contrário, a prova poderia ter peso zero e assim correríamos o risco de torna-la uma aprovação automática.

Das Faltas, Entradas Tardias ou Saídas Antecipadas:

- 27° O aluno que se ausentar durante a aula, perderá os pontos deste dia (As fichas de trabalho têm um campo que identifica se o aluno chegou tarde, saiu mais cedo ou faltou);
- 28° Trabalho perdido só poderá ser refeito caso o grupão concorde com o argumento do estudante. Caso ocorra, realizará o trabalho no Ensino Remedial;
- 29° O professor poderá recusar a justificativa aceita pelo grupão, cabendo recurso apenas perante todo o grupão.

Da Perda de Pontos:

- 30° O aluno **perderá um ponto** em cada uma das situações:

- Chamar o professor ou consultar integrantes de outro grupo, sem o consentimento do seu grupo;
- Não trazer seu material de pesquisa;
- Não aguardar a sua vez de atendimento;
- Desconhecer as regras deste contrato;
- Chegar atrasado ou sair mais cedo (perda de pontos proporcional ao tempo de aula que deixou de participar).

31º Todo **grupo perderá um ponto** em cada uma das situações:

- Chamar o professor e algum integrante não souber o que perguntar, ou explicar o que já fizeram até o momento;
- Não aguardar a sua vez de atendimento;
- Desconhecer as regras deste contrato;
- Realizar trabalho individual;

32º Realizar outras atividades durante a aula, manter conversas irrelevantes para o momento ou atrapalhar outro grupo são faltas graves, que refletem diretamente no desenvolvimento da AS, por isso, nestes casos, a perda de pontos será decidida pelo professor ou em plenária.



Cada item mostrado anteriormente faz com que o grupo ou integrante perca um ponto do dia. Alguns desses aspectos são percebidos pelo professor durante a mediação, sendo que devem ser anotados na ficha do estudante. Outros podem ser percebidos apenas no momento em que o professor analisa as fichas, mas também devem ser marcados, por exemplo, trabalho feito de forma individual. Caso não existam ocorrências e o grupo tenha trabalhado durante todo o tempo da aula a nota é dez. Lembre-se a AS não considera erro/acerto para pontuação do grupo.

Da Avaliação:

- 33º A avaliação será pelo tempo de trabalho, não pelo resultado final;
- 34º O tempo de trabalho de cada aula será proporcional a nota do dia. Por exemplo, se a aula tem duas horas/aula e o grupo não descumpriu nenhuma regra e realizou um trabalho colaborativo, então a nota será dez;
- 35º A AS não substitui a avaliação escrita (PE);
- 36º A avaliação será composta pelo aproveitamento e trabalho de cada aula;
- 37º O dia da PE será discutido na plenária;
- 38º A PE será individual e sem consulta.

Do Ensino Remedial:

- 39º Será oferecido extraclasse, em horários específicos;
- 40º O Ensino Remedial (ER) será parte da nota da AS;
- 41º Os grupos com aproveitamento superior a nota sete, tem sua participação facultativa;
- 42º Aos demais grupos (notas abaixo de sete), a não participação só poderá ser justificada por comprovação de incompatibilidade de horários;
- 43º No ER serão discutidos os temas da(s) última(s) aula(s);
- 44º Os alunos deverão resolver exercícios propostos pelo professor, discutindo-os com todos os presentes;

45° Para o cálculo da nota do ER, em relação à aula de AS, será usado um coeficiente de participação (CP) que será zero para quem não precisar participar e 1 (um) para quem participar.



O Ensino Remedial é parte fundamental da AS. É importante que o professor combine um horário semanal para esse momento, com média de quatro horas. Inicialmente, todos os alunos com rendimento inferior a média deveriam participar, porém percebemos que muitos não puderam por diversas questões. Desse modo, sugerimos que o professor discuta isso com a turma, a fim de chegar em um consenso. Cada encontro do Remedial também tem uma nota de acordo com o tempo de permanência.

Da Nota:

46° Todas as notas serão dadas em uma escala de zero a dez, com os pesos descritos nos próximos itens;

47° A nota final do período em que se trabalhar com a AS é a máxima entre a PE e a média ponderada entre a nota da AS (NAS) com peso P e a nota da PE: **MÉDIA = MAX(PE; P.(NAS) + (1 – P).(PE))**. Onde o peso P será feito pela média dos pesos atribuídos a cada aula pelos alunos;

48° A nota da AS (NAS) é calculada da seguinte forma:

- A nota da AS (NAS) será composta pela média entre as notas de cada aula (A1, A2, ...Ai) de i aulas de AS e as notas individuais (R1, R2, ...Rj) de cada encontro j do ER;
- Assim:

$$NAS = \frac{\frac{A1 + A2 + A3 + \dots + Ai}{i} + CP \cdot \frac{R1 + R2 + R3 + \dots + Rj}{j}}{1 + CP}$$



O cálculo da nota é apresentado adiante com auxílio de uma planilha. Contudo, o professor pode mudar a fórmula de cálculo, desde que considere para isso as notas de cada aula, o peso da AS, as notas do Ensino Remedial e a nota da prova escrita.

Disposições Finais:

49° Este contrato não poderá ser modificado por nenhuma das partes, senão por decisão do grupão, por meio de votação;

50° Todos os materiais serão divulgados pelo professor, é responsabilidade dos alunos trazê-los para a aula;

51° Confirmamos que concordamos e entendemos os termos aqui descritos.



Sugerimos que as fichas de sugestões sejam disponibilizadas antes da aula, os alunos solicitaram isso para poderem consulta-las e organizar outros materiais de

consulta. A ficha de trabalho e de respostas só é disponibilizada após ser feita em sala. Por fim, a cada aula o professor recolhe a ficha de trabalho, faz considerações ou indica o que pode ser feito, itens que devem ser melhor estudados, atribuiu uma nota pelo tempo de trabalho e devolve ao aluno na aula seguinte.

Capítulo III – Fichas de Trabalho

Neste item apresentaremos sete fichas de trabalho para o estudo do conteúdo de limites e continuidade de funções com uma variável real. Esse material foi confeccionado de acordo com os conteúdos mais relevantes para o entendimento do conceito e aplicação de limites para um período de aplicação de, aproximadamente, 10 encontros com duração de 2 horas/aula – desde a apresentação do contrato até a avaliação escrita. Contudo, dependendo da carga horária que o professor tenha disponível para abordar esses conteúdos, as fichas podem ser utilizadas por mais tempo.

Cada aula, com exceção da primeira em que é discutido o contrato de trabalho e da última na qual é feita a avaliação escrita, inicia com a entrega das fichas de trabalho e de sugestões aos grupos de trabalho previamente organizados. Nesse momento, os grupos iniciam estudando os conceitos necessários para resolução dos problemas, sendo que o professor atua como mediador do trabalho das equipes. Caso, após um determinado tempo de tolerância, todos os membros de uma equipe faltem e algum integrante fique sem grupo, ele pode optar por fazer os problemas com outro grupo. No momento das solicitações feitas ao professor, qualquer infringência de regras deve ser anotada na ficha do estudante, no campo específico, conforme o quadro abaixo. Além disso, lembre-se, o professor escolhe quem do grupo fará a pergunta, deve ser uma dúvida de todos, de acordo com as discussões mantidas. Não é permitido na AS atendimentos individuais.

Ademais, sugerimos para cada ficha o tempo de duas horas/aula, no mínimo, contando com o tempo da plenária, realizada nos últimos 10 a 15 minutos de cada aula. Esse tempo vai sendo calibrado pelo professor de acordo com as solicitações do dia. Caso necessite, uma mesma ficha pode ser retomada na aula seguinte. Em cada ficha o integrante preenche com os dados do grupo e o peso escolhido na plenária, os demais itens são para preenchimento do professor, conforme o quadro a seguir.

Itens presentes no início das fichas de trabalho

Equipe:

Estudante avaliado: _____; Estudante 2: _____;

Estudante 3: _____; Estudante 4: _____.

Peso do dia: _____ (de zero a 50%)

NOTA: _____ (de zero a dez)

• **Itens individuais** (X para sim): () Faltou; () Chegou atrasado; () Saiu mais cedo; () Não trouxe o material de consulta; () Chamou o professor sem consentimento do grupo; () Atrapalhou o rendimento do grupo; () Não conhecia ou desrespeitou o contrato de trabalho; () Falta de comprometimento com a aprendizagem.

• **Itens do grupo:** (marcar a quantidade de ocorrências ou X para sim): () Nem todos os membros sabiam perguntar ou explicar o que já haviam feito; () Não aguardaram a sua vez de atendimento; () Trabalho feito de forma individual; () Algum componente está atrasado ou adiantado em relação ao grupo; () Consultaram a ficha resposta antes de finalizar a atividade; () **Tempo de efetivo trabalho (medido em horas).**

Esse quadro, presente no início de cada ficha mostra as possíveis ocorrências. O item “tempo de efetivo trabalho em grupo” é correspondente ao período que o grupo trabalhou, medido do momento em que iniciaram o desenvolvimento da ficha até o final da plenária. Nesse caso, por exemplo, integrantes que saem mais cedo ou chegam atrasados são penalizados. Só será considerado trabalho de grupo quando ao menos dois integrantes da equipe estiverem presentes. O campo “nota” é preenchido de acordo com o tempo de trabalho e ocorrências registradas. Por exemplo, se a aula tiver 2 horas/aula e o grupo trabalhar durante esse tempo sem descumprir nenhuma regra, sua nota será dez. Caso ocorra alguma infringência o grupo perde um ponto – ocorrência do grupo – ou o indivíduo – ocorrência individual. Caso o grupo não trabalhe durante o tempo total da aula, sua nota será diretamente proporcional ao tempo de trabalho.

A seguir elencamos cada uma das fichas, com as respectivas fichas de sugestões e respostas, destacando os objetivos, conteúdos estudados e informações gerais, quando necessário. Além disso, em algumas fichas sugerimos, para estudos extraclasse, alguns problemas de um livro didático. Eles podem ser alterados, de acordo com o critério do professor.

Lembre-se: nem todos os grupos conseguirão finalizar a ficha de trabalho durante a aula. O professor deve evidenciar que os problemas deixados em branco ou feitos de forma errada, precisam ser finalizados em momentos extraclasse. Na AS o aprendizado é de responsabilidade do estudante!

→ *Ficha de Trabalho 1*

Conteúdos abordados: Conceito intuitivo de limites.

Objetivos: Resolver dois problemas sobre a ideia intuitiva de limites, conceituar alguns termos utilizados na notação de limites.

FT1 – Introdução ao Estudo de Limites

Equipe:

Estudante avaliado: _____; Estudante 2: _____;

Estudante 3: _____; Estudante 4: _____.

Peso do dia: _____ (de zero a 50%)

NOTA: _____ (de zero a dez)

• **Itens individuais** (X para sim): () Faltou; () Chegou atrasado; () Saiu mais cedo; () Não trouxe o material de consulta; () Chamou o professor sem consentimento do grupo; () Atrapalhou o rendimento do grupo; () Não conhecia ou desrespeitou o contrato de trabalho; () Falta de comprometimento com a aprendizagem.

• **Itens do grupo:** (marcar a quantidade de ocorrências ou X para sim): () Nem todos os membros sabiam perguntar ou explicar o que já haviam feito; () Não aguardaram a sua vez de atendimento; () Trabalho feito de forma individual; () Algum componente está atrasado ou adiantado em relação ao grupo; () Consultaram a ficha resposta antes de finalizar a atividade;

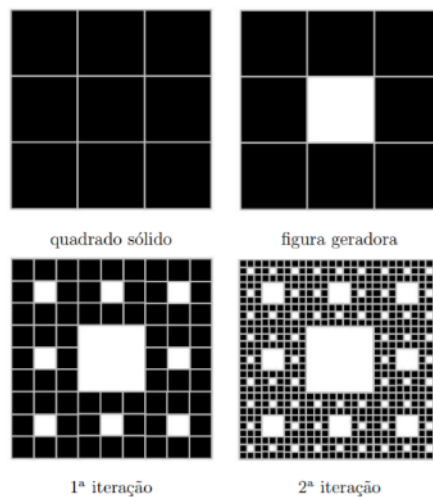
() **Tempo de efetivo trabalho (medido em horas).**

A. Fractais

Na matemática existem figuras geométricas (ou objetos) criadas a partir de infinitas iterações, a elas damos o nome de fractais. Segundo Nunes: “Fractais são objetos que podem ser obtidos ou aleatoriamente, por meio de processos recursivos apresentando determinadas características que por vezes são encontradas em formas da natureza. Essas características são: auto semelhança, escala, complexidade e dimensão” (NUNES, 2006, p. 29). Um dos fractais mais conhecidos é o Tapete de Sierpinski, estudado pelo matemático Waclav Sierpinski (1882 – 1969). Nunes explica o processo de criação:

Partimos de um quadrado preenchido que é dividido em 9 quadrados iguais e retiramos o quadrado do meio. Ficamos, portanto, com a figura geradora. A 1ª iteração é obtida através de uma aplicação da figura geradora a cada um dos quadrados preenchidos que a constituem. A figura final deste passo de construção é o elemento de construção da figura seguinte (2ª iteração), por aplicação da figura geradora (NUNES, 2006, p.30).

Figura 1: Sequência do processo iterativo de construção do Tapete de Sierpinski.



Fonte: NUNES, 2006, p. 30

A figura 1 representa o processo, que é infinito, ou seja, a cada quadrado é realizado o processo da figura geradora.

Com base no processo de criação do Tapete de Sierpinski, considerando que em cada iteração o quadrado central (branco) é retirado, qual será a área do tapete em cada uma das iterações, considerando o quadrado inicial com lado l ?

1. Área do quadrado inicial:
2. Figura geradora:
3. 1ª iteração:
4. 2ª iteração:
5. 3ª iteração:
6. 10ª iteração:
7. Refaça o processo anterior considerando o lado do quadrado inicial como 1 u.c. Expresse o resultado com números decimais.

8. Com base nisso, o que aconteceria após um número muito grande de iterações? Qual seria a sua área depois de infinitas iterações? Em algum momento a área do tapete será nula? Explique.

B. O Agiota de Roma³

Um agiota empresta 1 dinar⁴ a juros de 100% ao ano a uma pessoa. Ao final de um ano, a pessoa encontra o agiota, devolvendo $1 + 1 = 2$ dinares. O agiota, achando injusta tal situação, argumenta que tal valor é incorreto, afirmando que: Se dividirmos o ano em dois semestres, deveria pagar, depois de seis meses, a quantia de 1 dinar + 50% de 1 dinar = 1,5 dinares. Em mais um semestre, o montante devido se comporia em: 1,5 dinar + 50% de 1,5 dinar = 2,25 dinares.

O agiota continua argumentando que, se o ano fosse subdividido em 4 trimestres, o valor devido ao final de cada trimestre, seria outro.

1. Com base nisso, façam um quadro com o montante devido a cada trimestre (correção trimestral de juros) e argumentem como seria o montante a cada mês (correção mensal de juros).
2. O que ocorre com o montante devido quando o período de correção diminui?
3. O valor do montante aumentará sempre ou existirá um limite?

³ Adaptado de POMMER (2006).

⁴ A palavra 'dinar' deriva de denário, uma moeda romana. Atualmente, é a moeda nacional de vários países pertencentes ao extinto Império Otomano (POMMER, 2010, p. 5).

FICHA DE SUGESTÕES 1 – Introdução ao Estudo de Limites

O tema inicial da ficha de trabalho 1 é o processo de criação do Tapete de Sierpinski. Ele nos dá subsídio para entender a ideia intuitiva de infinito. Nesse sentido, Nunes diz que “A percepção de infinito está subjacente aos objetos fractais, pois estes são obtidos no limite de um processo de construção que se repete indefinidamente [...]” (NUNES, 2006, p. 12).

No estudo dos limites (e de todo o CDI) é imprescindível a compreensão do infinito - o infinitamente grande e as quantidades infinitesimais. Uma das formas de entender esses termos é pensar numa sequência infinita de números, como, por exemplo, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Percebemos que, como n é um número natural, a sequência é infinita, ou seja, todo termo terá um sucessor. Mas para qual valor a sequência tende? Essa pergunta será muito utilizada no estudo de limites. É fácil de perceber, intuitivamente, que a sequência se aproxima cada vez mais de zero, ou seja, quanto maior for n , menor será o valor correspondente na sequência. Porém, nunca existirá um termo igual a zero. Dizemos que a sequência tende a zero, o que significa dizer que quando n tende ao infinito (aumenta incessantemente) o limite da sequência é zero. Podemos dizer isso, pois sabemos que existem infinitos números naturais o que faz com que os termos da sequência se aproximem de zero o tanto quanto quisermos, porém nunca um termo é o próprio zero, senão no limite.

A segunda atividade – Agiota de Roma – diz respeito a capitalização de juros em um determinado tempo. É bem sabido que se a capitalização ocorrer a 100% por ano, no sistema composto, é um equívoco dizer que a taxa semestral será 50%, na verdade, deveríamos calcular a taxa equivalente. Porém, mesmo assim, o exercício é válido para percebermos algumas questões sobre limites. Inicialmente para saber o valor do montante devido a cada trimestre e depois mês, basta lembrar que na capitalização composta, os juros incidem no montante anterior, não no capital inicial (no caso 1 dinar). Desse modo, podemos diminuir o período de capitalização (ano, semestre, trimestre,

mês, dia, hora...) cada vez mais, fazendo, na lógica do agiota: $\frac{100\%}{n}$ que representa o percentual

de juros no tempo n . Assim, se quisermos a taxa de juros ao dia, basta fazer $\frac{100\%}{360}$, já que o ano comercial tem 360 dias.

Para responder ao demais perguntas basta calcular o montante utilizando a fórmula da capitalização composta $M = C(1 + i)^n$, na qual $C = 1$, $i = \frac{100\%}{n} = \frac{1}{n}$ e n o período considerado.

Lembre-se: a resposta fará mais ‘sentido’ quando forem calculados montantes para períodos de capitalização (n) pequenos. Aproveite para analisar o que ocorre com a taxa i nesses casos.

FICHA DE RESPOSTAS 1 – Introdução ao Estudo de Limites**Item A:**

1. Como o lado do quadrado é l , sua área é $A = l^2 = 1$ u.a.
2. Retirando-se o quadrado central, ou seja, um quadrado de lado $l/3$, temos que descontar da área total: $A_r = \frac{l^2}{9}$, assim ficamos com um tapete de área: $A = \frac{8}{9}l^2$ u.a.
3. Nessa iteração são retirados 8 quadrados de lado $l/9$, assim, da área restante é descontando: $A_r = \frac{8}{81}l^2$, sobrando no tapete: $A = \frac{64}{81}l^2$ u.a.
4. Nesse momento, devemos já ter percebido que em cada iteração o lado do quadrado é dividido em mais 3 partes, assim, agora, foram retirados 64 quadrados de lado $l/27$, ou seja, retirou-se uma área de: $A_r = \frac{64}{729}l^2$, assim a área do tapete é: $A = \frac{512}{729}l^2$ u.a.
5. Nesse passo, o grupo já deve ter percebido que a área do tapete tem como resultado uma potência na forma: $A = \left(\frac{8}{9}\right)^n l^2$ u.a, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Assim, na 3ª iteração teremos a área do tapete: $A = \left(\frac{8}{9}\right)^4 l^2 = \frac{4096}{6561}l^2$ u.a.
6. Na décima: $A = \left(\frac{8}{9}\right)^{11} l^2$ u.a.
7. Para isso, basta substituir nos cálculos acima $l = 1$ e expressar as frações em números decimais.
8. O que se espera é que o grupo perceba que independentemente do número de iterações que se faça, a área do tapete nunca será nula, na verdade, ela está diminuindo, visto que a área é descrita por uma progressão geométrica decrescente (razão $8/9$). Porém, não existe um momento no qual a área será nula, mas ela pode ser tão próxima de zero quanto se queira, visto que, teoricamente, os fractais, são compostos por infinitas iterações. Assim, dizemos que a área está tendendo a zero, e no limite (com infinitas iterações) será nula.
Nesta questão, percebemos dois fatos importantes: podemos fazer centenas de bilhões de iterações e sempre será possível chegar a uma área mais próxima de zero, basta fazer mais uma, e mais uma... ou seja, sempre existe um número mais próximo do zero do que o calculado, na verdade existem infinitos 'mais próximos'. Isso vale para quaisquer números, em qualquer intervalo, por menor que seja. O segundo fato percebido é que no limite dizemos que a área do tapete é nula, vejam, no limite.

ITEM B:

1. Seguem os quadros com os dados pedidos:

Período	Montante
1º trimestre	1 dinar + 25% de dinar = 1,25 dinares.
2º trimestre	1,25 dinares + 25% de 1,25 dinares = $1,25 \cdot 1,25 = 1,25^2 = 1,5625$ dinares.
3º trimestre	1,5625 dinares + 25% de 1,5625 dinares = $1,5625 \cdot 1,25 = 1,25^3 = 1,953125$ dinares.
4º trimestre	1,953125 dinares + 25% de 1,953125 dinares = $1,25^4 = 2,4414063$ dinares.

*Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% ao ano, supondo a correção trimestral dos juros.

Continuando, supondo agora a correção mensal, teríamos:

Período	Montante
1º mês	1 dinar + 8,33% de dinar = 1,083 dinares.
2º mês	1,083 dinares + 8,33% de 1,083 dinares = $1,083 \cdot 1,083 = 1,17289$ dinares.
3º mês	1,17289 dinares + 8,33% de 1,17289 dinares = $1,083^2 \cdot 1,083 = 1,083^3 = 1,27024$ dinares.
⋮	⋮
12º mês	$1,083^{12} = 2,6034$ dinares.

* Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% ao ano, supondo a correção mensal dos juros.

2. Para verificar o que ocorre quando o período de capitalização diminui, podemos recorrer aos cálculos, lembrando que o montante será $M = C(1+i)^n$, teremos nesse caso:

$$M = 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \text{ Assim, para uma taxa em dias } n=360:$$

$$M = \left(1 + \frac{1}{360}\right)^{360} = 2,714516 \text{ dinares de dívida.}$$

Para uma taxa em horas $n=360 \cdot 24 = 8640$: $M = \left(1 + \frac{1}{8640}\right)^{8640} = 2,718124$ dinares de dívida.

Para uma taxa em minutos $n = 8640 \cdot 60 = 518400$: $M = \left(1 + \frac{1}{518400}\right)^{518400} = 2,718279$ dinares.

3. Na segunda questão já podemos, ao menos de forma intuitiva, perceber que quando o período n diminui, o valor do montante se aproxima de 2,71. O que devemos observar é que podemos diminuir n o quanto quisermos e mesmo assim o valor do montante se aproxima de um valor. Agora, a pergunta é: o montante está tendendo para qual valor? Para responder isso precisamos lembrar que temos uma função de M em n , ou seja:

$$M(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ e buscamos saber o que acontece quando } n \text{ aumenta infinitamente. No}$$

estudo dos limites escrevemos $n \rightarrow \infty$ (que se lê n tendendo ao infinito) e queremos

saber $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (lê-se: limite da função quando n tende ao infinito positivo). Esse é

o tema das próximas aulas, retomaremos esta questão.

→ Ficha de Trabalho 2

Conteúdos abordados: Cálculo de limites de funções por aproximação numérica. Aplicação de limites na interpretação gráfica e no cálculo da velocidade instantânea.

Objetivos: Entender o que significa uma sequência numérica tender a um determinado número; Relacionar a velocidade média com a instantânea quando aproximarmos os intervalos; Compreender que entre dois pontos existe uma infinidade de outros pontos.

FT2 – Limite de Funções

Equipe:

Estudante avaliado: _____; Estudante 2: _____;

Estudante 3: _____; Estudante 4: _____.

Peso do dia: _____ (de zero a 50%)

NOTA: _____ (de zero a dez)

• **Itens individuais** (X para sim): () Faltou; () Chegou atrasado; () Saiu mais cedo; () Não trouxe o material de consulta; () Chamou o professor sem consentimento do grupo; () Atrapalhou o rendimento do grupo; () Não conhecia ou desrespeitou o contrato de trabalho; () Falta de comprometimento com a aprendizagem.

• **Itens do grupo:** (marcar a quantidade de ocorrências ou X para sim): () Nem todos os membros sabiam perguntar ou explicar o que já haviam feito; () Não aguardaram a sua vez de atendimento; () Trabalho feito de forma individual; () Algum componente está atrasado ou adiantado em relação ao grupo; () Consultaram a ficha resposta antes de finalizar a atividade;

() **Tempo de efetivo trabalho (medido em horas).**

A. Seja uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 1$

- Esboce o gráfico dessa função.
- Qual a imagem de f quando $x = 2$?
- Sabemos que qualquer intervalo real é infinito, nesse sentido analise o que acontece na vizinhança do ponto $x = 2$, com auxílio do quadro abaixo (inicie preenchendo os valores mais distantes de $x=2$):

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$											

O que acontece com $f(x)$ quando x se aproxima de 2? Poderíamos aproximar x ainda mais de 2? É correto afirmar que o limite de $f(x)$, quando x tende a 2, é 7? Justifique e escreva esse limite com a simbologia adequada.

- B.** Considere a função $g(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$, $x \neq 2$. Determine a imagem de cada valor de x , conforme o quadro:

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$g(x)$											

- O que acontece com $g(x)$ quando x se aproxima de 2? Qual o limite de $g(x)$ quando x tende a 2? Escreva esse limite com a simbologia adequada.
- O limite neste ponto é igual a imagem da função? Justifique.
- Com base nessa questão e na anterior, qual a diferença entre elas?

- C.** Considere a função:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ x-1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Determine a imagem de cada valor de x , conforme o quadro:

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$h(x)$											

- Para que valor tende $h(x)$ quando x se aproxima de 2? A aproximação pela esquerda (valores menores que 2) é igual a aproximação pela direita (valores maiores que 2)? Qual o limite de $h(x)$ quando x tende a 2?
- O limite neste ponto é igual a imagem da função nesse ponto? Justifique.

- D.** Considere a seguinte situação: Um objeto se move em linha reta segundo a função posição $S(t) = 2t^2 + 1$ em metros, t em segundos. Responda:

- Qual a velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[0,10]$?
- Qual a velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[0,5]$?
- Qual a velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[0,1]$?
- Utilize a ficha de sugestões e calcule uma estimativa, por meio da ideia intuitiva de limite, para a velocidade instantânea do objeto no instante $t = 1$ segundo.
- Por que podemos dizer que essa é estimativa da velocidade instantânea em $t = 1$ segundo?
- Escreva formalmente o limite dessa função.

FICHA DE SUGESTÕES 2 – Limites de Funções

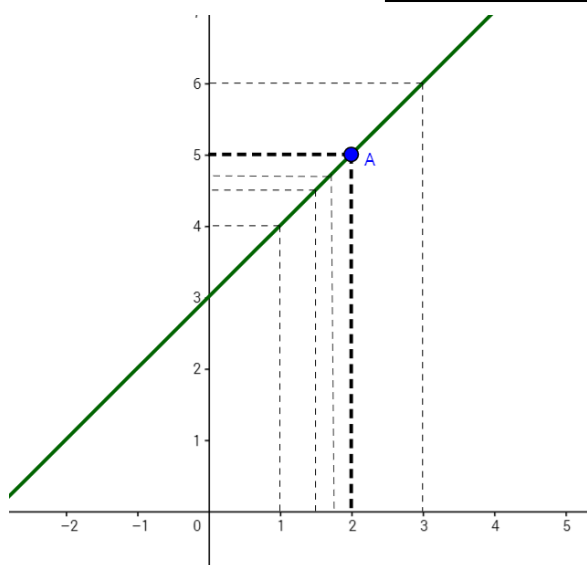
A. Exemplos de questões sobre limite de funções de forma intuitiva

Use como material de pesquisa os livros do grupo (esse tipo de problema está, geralmente, no início do capítulo sobre limites).

Observe o comportamento da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$

Se atribuirmos valores para x que tendem para 2 por **valores menores** do que 2 e calcularmos os valores de $f(x)$ correspondentes, obteremos o quadro abaixo:

x	1,0	1,5	1,6	1,7	1,9	1,999
$f(x)$	4,0	4,5	4,6	4,7	4,9	4,999



Observe que os valores de $f(x)$ aproximam-se de 5, ou seja, quanto mais próximo de 2 estiver o valor de x , mais próximo $f(x)$ estará de 5. Assim, o limite da função f quando x tende a 2 por **valores menores** do que 2, ou **pela esquerda**, é 5. Simbolicamente: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ (o sinal de $-$ acima do 2 indica que é pela esquerda).

Se atribuirmos valores para x que tendem para 2 por **valores maiores** do que 2 e calcularmos os valores de $f(x)$ correspondentes, obteremos o quadro abaixo:

x	3,0	2,7	2,5	2,2	2,01	2,001
$f(x)$	6,0	5,7	5,5	5,2	5,01	5,001

Observe que os valores de $f(x)$ tendem para 5. Assim, o limite da função f quando x tende a 2 por **valores maiores** do que 2, ou **pela direita**, é 5. Simbolicamente: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$ (o sinal de $+$ acima do 2 indica que é pela direita).

Neste exemplo, observamos que quando x tende para 2, os limites laterais são iguais (tanto pela direita e esquerda). Por isso – quando os limites laterais são iguais – podemos dizer que **existe o limite da função neste ponto**, escrevendo: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. Lê-se: o limite de $f(x)$ quando x tende a 2 é igual a 5.

Observações: Para o limite em um ponto existir, os limites laterais devem ser iguais, caso contrário o limite não existe.

Não importa o que acontece com o ponto em questão, ou seja, o valor de x para o qual se calcula o limite pode nem estar definido no domínio da função, mas mesmo assim o limite pode existir. Temos três casos que exemplificam esse fato:

Caso 1: $f(a) = L$ – a imagem do ponto a é igual ao limite, o exemplo acima é desse tipo, pois $f(2) = 2+3=5$ que é igual a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

Caso 2: $f(a) \neq L$ – a imagem do ponto a é diferente do limite neste ponto. Olhar item B da ficha de trabalho.

Caso 3: f não está definida em a – a função não está definida no ponto a , ou seja, a não pertence ao domínio de f .

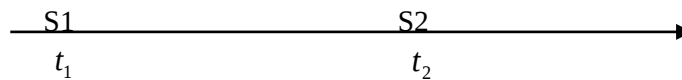
Conceito intuitivo de limite⁵: considere uma função f e número a , que pode ou não pertencer ao domínio de f . Suponha que $f(x)$ tende a um número L se x tende a a (com x pertencente ao domínio de f e $x \neq a$). Para exprimir esta circunstância, indica-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (Lê-se: o limite de $f(x)$,

quando x está tendendo para a , é igual a L).

B. Cinemática

A necessidade do desenvolvimento do CDI se deu por alguns problemas clássicos, como: determinação da área de figuras planas, determinação da reta tangente a uma curva e cálculo da velocidade instantânea. Nesse momento abordaremos um pouco da cinemática que é a parte da física que estuda o movimento dos objetos (corpos).

Sabemos que a velocidade média é a variação do espaço percorrido dentro de um intervalo de tempo. Observe o esquema abaixo, no qual um objeto se move na linha reta, de S_1 até S_2 :



Assim, a velocidade média (V_m) nesse intervalo será a variação do espaço percorrido (posição final – posição inicial) dividido pelo tempo em que realizou esse percurso:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

Agora, imagine que quiséssemos determinar a velocidade instantânea desse objeto em um ponto t qualquer. Para isso, calculamos sua velocidade média em intervalos de tempo (Δt) cada vez menores, o que permite uma estimativa da velocidade instantânea no ponto t em questão.

Nesse problema, o conceito de limite é muito útil, pois permite escrever: $V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, que

significa que se Δt tender para zero (os dois tempos, t_1 e t_2 , estarão cada vez mais próximos um

do outro) o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tenderá para a velocidade instantânea. No estudo do CDI, mais adiante,

será visto que a velocidade instantânea é calculada por meio do conceito de derivada.

Na questão da ficha de trabalho que solicita que o grupo calcule uma estimativa, com base na ideia intuitiva de limite, para a velocidade instantânea do objeto no instante $t = 1$ segundo, pode-se partir da mesma ideia das questões anteriores. Nesse sentido, uma boa aproximação ocorre quando analisamos a velocidade média em intervalos próximos de $t = 1$.

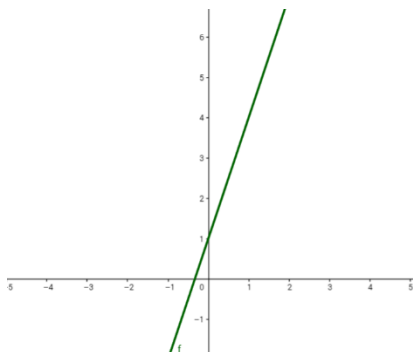
Sugestão: usem os intervalos do tipo $[t, 1]$ (com $t < 1$) e $[1, t]$ (com $t > 1$), sendo t cada vez mais próximo de 1.

⁵ Definição de BOULOS, 1999, p. 162.

FICHA DE RESPOSTAS 2 – Limites

Item A:

1. Segue:



2. $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

3. Nesta questão, mais do que o cálculo, queremos que o grupo perceba que podemos aproximar o valor de x de 2 o tanto quanto quisermos.

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$	4	5,5	6,7	6,97	6,997	7	7,003	7,03	7,3	8,5	10

3.1. O que acontece com $f(x)$ quando x se aproxima de 2?Espera-se que o grupo perceba que quanto mais próximo x está de 2, mais próximo $f(x)$ estará de 7, por ambos os lados.3.2. Poderíamos aproximar x ainda mais de 2?Como trata-se de números reais, podemos aproximar o valor de x o quanto quisermos de 2. É importante perceber que entre o valor 1,999 e o 2, por exemplo, ainda há uma infinidade de outros números e que podemos aproximar indefinidamente dois números.3.3. É correto afirmar que o limite de $f(x)$, quando x tende a 2, é 7? Justifique e escreva esse limite com a simbologia adequada.Sim, pois como vimos na ficha de sugestões, o limite de uma função existe quando os limites laterais são iguais, o que ocorre neste caso. Simbolicamente: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$ ou $\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 1 = 7$.

Além disso, percebemos que o limite é igual a imagem da função nesse ponto.

Item B:

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$g(x)$	4	5,5	6,7	6,97	6,997	ind.	7,003	7,03	7,3	8,5	10

1.

1.1. O que acontece com $g(x)$ quando x se aproxima de 2?Nessa questão, da mesma forma que a anterior, quando x se aproxima a 2, ou seja, tende a 2, o valor de $g(x)$ se aproxima de 7. Porém, nesse caso nunca atinge, pois $x=2$ não pertence ao domínio da função, não existe uma imagem para este valor.1.2. Qual o limite de $g(x)$ quando x tende a 2? Escreva esse limite com a simbologia adequada. Mesmo com $x=2$ não pertencendo ao domínio da função, o limite pode existir, esse é o terceiro caso da ficha de sugestões. Como em ambos os lados $g(x)$ se aproxima cada vez mais de 7,podemos dizer que: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 7$ ou $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7$

2. O limite neste ponto é igual a imagem da função? Justifique.

Não, a imagem neste ponto sequer existe. Mas o limite sim, como já justificado no item 1.2.

3. Com base nessa questão e na anterior, qual a diferença entre elas?

Os limites das questões são iguais, a diferença é que na primeira o limite é igual a imagem da função naquele ponto. Na segunda o ponto não pertence ao domínio de g , mas o limite existe.

Item C:

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$h(x)$	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	1,001	1,01	1,1	1,5	2

1.

1.1. O que acontece com $h(x)$ quando x se aproxima de 2?

Para responder, precisamos perguntar: por qual lado? Nesse caso, percebam que a resposta é diferente para cada caso.

1.2. A aproximação pela esquerda (valores menores que 2) é igual a aproximação pela direita (valores maiores que 2)?

Não, pela esquerda $h(x)$ tende a 2, logo o limite é: $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 2$, pela direita $h(x)$ tende para 1,

logo o limite é: $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 1$.

1.3. Qual o limite de $h(x)$ quando x tende a 2?

Não existe, pois os limites laterais são diferentes.

2. O limite neste ponto é igual a imagem da função? Justifique.

Não, pois o limite não existe, a imagem no ponto $x=2$ é igual ao limite lateral (pela esquerda).

Item D:

1. Qual a velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[0,10]$?

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(10) - S(0)}{t_2 - t_1} = \frac{201 - 1}{10 - 0} = 20 \text{ m/s}$$

2. Qual a velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[0,5]$? 10 m/s

3. Qual a velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[0,1]$? 2 m/s

4. Utilize a ficha de sugestões e calcule uma estimativa, com base na ideia intuitiva de limite, para a velocidade instantânea do objeto no instante $t = 1$ segundo.

Podemos usar intervalos cada vez menores em volta de $t=1$, assim, considere os intervalos e as velocidades médias:

$[0,1] \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2 \text{ m/s}$	$[1,2] \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 6 \text{ m/s}$
$[0.9,1] \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3,8 \text{ m/s}$	$[1.1,1] \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4,2 \text{ m/s}$
$[0.99,1] \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3,98 \text{ m/s}$	$[1.01,1] \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4,2 \text{ m/s}$
$[0.999, 1] \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3,998 \text{ m/s}$	$[1.001,1] \rightarrow V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4,002 \text{ m/s}$

Percebemos com isso, que quanto menor a variação do tempo, ou seja, $\Delta t \rightarrow 0$, a velocidade instantânea em $t=1$ se aproxima de 4m/s.

5. Por que podemos dizer que essa é estimativa da velocidade instantânea em $t = 1$ segundo?

Pois podemos aproximar o intervalo de tempo o tanto quanto quisermos. Fazendo-o tender a zero.

6. Escreva simbolicamente o limite dessa função.

A velocidade no instante $t = 1$, será v_1 , dada por: $v_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4m/s$

→ *Ficha de Trabalho 3*

Conteúdos abordados: cálculo de limites laterais, cálculo do limite por meio da interpretação gráfica, conceito de infinito, limite infinito e no infinito, interpretações gráficas desses limites e apresentação de algumas técnicas de cálculo.

Objetivos: Calcular limites por interpretação gráfica; Saber o que são e como se calcula limites laterais; Saber calcular limites infinitos e no infinito mais elementares.

FT3 – Limites

Equipe:

Estudante avaliado: _____; Estudante 2: _____;

Estudante 3: _____; Estudante 4: _____.

Peso do dia: _____ (de zero a 50%)

NOTA: _____ (de zero a dez)

• **Itens individuais** (X para sim): () Faltou; () Chegou atrasado; () Saiu mais cedo; () Não trouxe o material de consulta; () Chamou o professor sem consentimento do grupo; () Atrapalhou o rendimento do grupo; () Não conhecia ou desrespeitou o contrato de trabalho; () Falta de comprometimento com a aprendizagem.

• **Itens do grupo:** (marcar a quantidade de ocorrências ou X para sim): () Nem todos os membros sabiam perguntar ou explicar o que já haviam feito; () Não aguardaram a sua vez de atendimento; () Trabalho feito de forma individual; () Algum componente está atrasado ou adiantado em relação ao grupo; () Consultaram a ficha resposta antes de finalizar a atividade;

() **Tempo de efetivo trabalho (medido em horas).**

A. Limites Laterais

1. Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$. Faça o gráfico e

calcule os seguintes limites, caso existam:

1.1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

1.2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

1.3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

1.4. Explique o que significa $x \rightarrow 1^-$

1.5. Qual a diferença entre $x \rightarrow 1^-$ e $x \rightarrow 1$?

1.6. O limite é igual a imagem da função nesse ponto?

2. Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x-3}, x \neq 3$. Calcule os seguintes limites por meio de substituição de variável, caso existam:

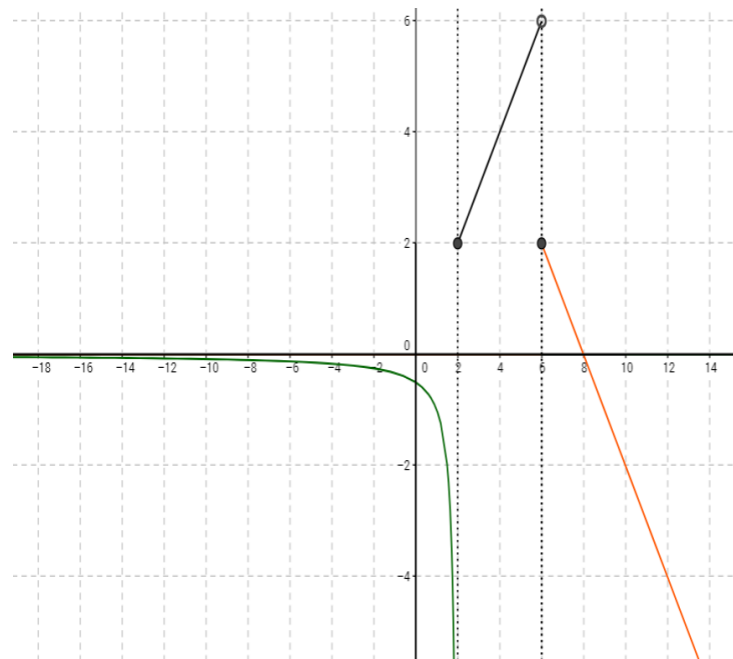
2.1. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

2.2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

2.3. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

2.4. Explique a mudança da variável x por h .

3. Dado o gráfico da função f , encontre os limites que se pede, caso existam:



3.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3.3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

3.4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

3.5. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3.6. $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

3.7. $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

3.8. $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

3.9. $\lim_{x \rightarrow 10} f(x)$

B. Limites Infinitos e no Infinito

1. Seja a função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Faça o gráfico e calcule os seguintes

limites, caso existam:

1.1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

1.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

1.3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1.5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1.6. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

1.7. O que significa $x \rightarrow +\infty$?

1.8. Explique a diferença entre $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$?

1.9. Existe valor de x tal que $f(x) = 0$?

C. Como atividade para a próxima aula, faça os exercícios 1 a 10 e 23 a 30, página 101 a 104 do livro **Cálculo**, volume 1 (STEWART, 2006).

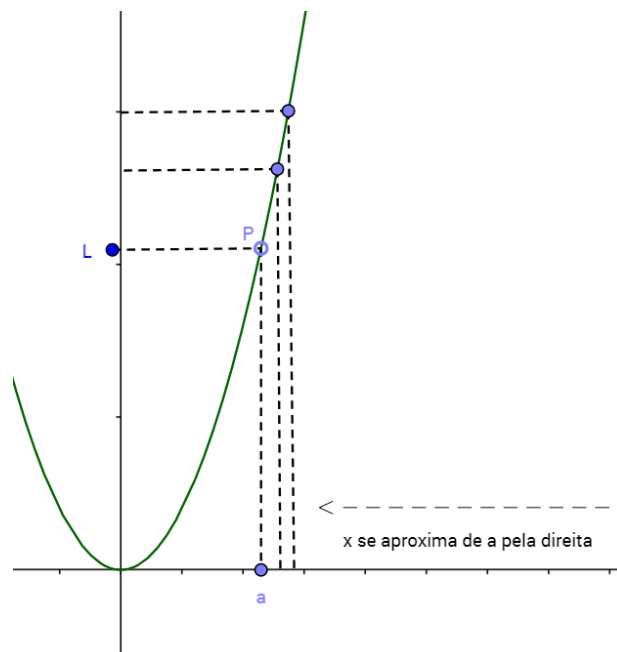
FICHA DE SUGESTÕES 3 – Limites

Na última ficha de trabalho foi necessário falar sobre limite lateral, nesta ficha estudaremos mais alguns aspectos sobre estes limites. **Limites Laterais** são úteis para verificar a existência do limite em um ponto e também para auxiliar na construção do gráfico e comportamento de funções.

Definição⁶: Escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ e dizemos que o **limite esquerdo** de $f(x)$ quando x tende a a (ou o limite de $f(x)$ quando x tende a a **pela esquerda**) é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , tomando-se x suficientemente próximo de a e x menor que a .

Analogamente escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ para indicar o **limite direito (ou limite pela direita)** de $f(x)$ quando x tende a a e x maior que a .

Abaixo apresentamos um gráfico que explica a ideia do limite pela direita (analogamente seria pela esquerda), considere $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$. O limite está representado pelo ponto $P(a, L)$, e percebemos que x pode se aproximar o tanto quanto quiser de a por valores maiores do que a .



Dessa forma, podemos calcular os limites laterais analisando o comportamento da função de três formas: **numericamente** (tomando pontos próximos ao valor que x está tendendo), **graficamente** e **algebricamente**. A última forma é apresentada abaixo:

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ para $x < -2$ ou $x > 2$. Calcule

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$. Como podemos perceber essa função não tem um gráfico conhecido, o que demandaria mais tempo e cuidado para definir esse limite. Assim, o que podemos fazer é calculá-lo de forma algébrica, considerando uma nova **variável h** sendo a distância entre x e -2 . Por exemplo, para o limite a esquerda (no qual só nos interessam os valores próximos a -2 , porém menores que -2), faríamos numericamente:

Se $h = 0,1$ então $x = -2,1$

Se $h = 0,001$ então $x = -2,001$

⁶ Definição apresentada por STEWART, 2006, p. 97.

E assim sucessivamente, com h cada vez menor, ou seja, fazendo $h \rightarrow 0$ (h tender a zero). Como o limite é pela esquerda, consideramos somente os valores próximos a -2 menores do que -2 .

Assim escrevemos, substituindo x por $(-2-h)$: $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{(-2-h)^2-4}}$,

desenvolvendo o denominador $(-2-h)^2-4 = 4+4h+h^2-4 = h^2+4h$, assim o limite fica:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{h^2+4h}}$. Não podemos esquecer que h está tendendo a zero o que significa que o

denominador está cada vez mais próximo de zero, pois: $h \rightarrow 0$, então $h^2+4h = 0^2+4 \cdot 0 = 0$. Mas o que significa isso?

Devemos entender essa expressão dentro do contexto do limite, pois, caso contrário, diremos que não existe divisão por zero não chegando a conclusão alguma. É importante lembrar que quando substituímos h , estávamos falando de uma distância entre x e -2 , mas sabemos h tende a zero (não é igual zero), é tão próximo quanto se queira, mas nunca igual, senão no limite. Assim, o quociente desse limite quer aumenta indefinidamente. Faça o teste substituindo o valor de h por um número muito próximo de zero.

Assim, quanto **menor for o denominador o quociente será cada vez maior**, ou seja, tenderá

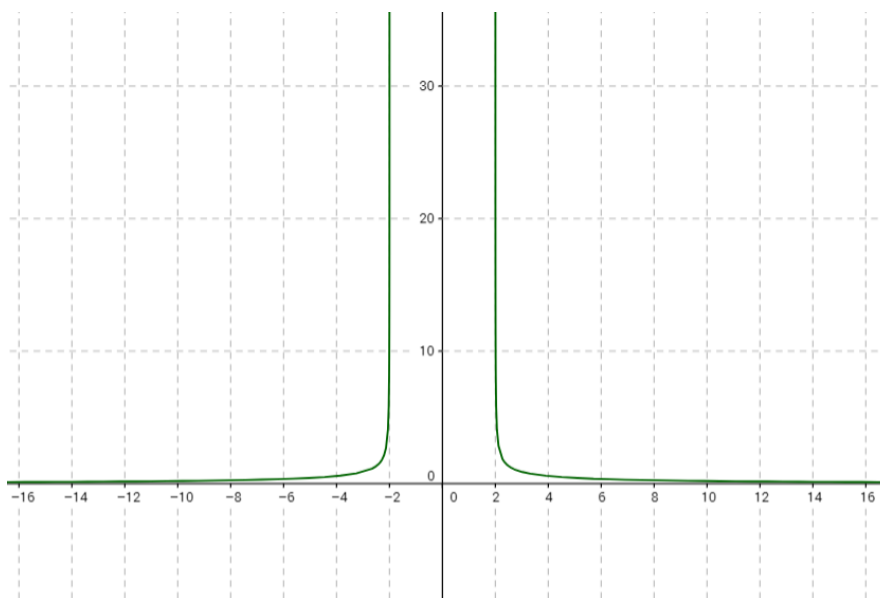
ao infinito (testem isso com a calculadora). Assim, no limite escrevemos: $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{\sqrt{x^2-4}} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{(-2-h)^2-4}} = +\infty$$

Observações: $+\infty$ é o símbolo usado para o infinito positivo, ou seja, quer dizer que o quociente está aumentando indefinidamente quando h se aproxima de zero. Analogamente temos o $-\infty$.

Essa função não tem limite em $x = -2$, pois o $+\infty$ **não é um número**.

Abaixo o gráfico da função f . Perceba que quando mais próximo de -2 (ou 2) x está, maior é o valor de $f(x)$ correspondente. Por exemplo, se tornarmos $x = -2,0001$ teremos $f(-2,0001) = 99,998$. O mesmo ocorre com o limite de $f(x)$ a direita de $+2$. Devemos entender ainda que os limites em -2 e $+2$, a direita e a esquerda, respectivamente, não existem, pois, a função é definida somente para $x < -2$ e $x > 2$.



Limites Infinitos: Chamamos de limites infinitos os casos como o acima exposto, ou seja, quando o limite não existe: é igual a $+\infty$ ou $-\infty$. Consideremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, que pode ser lido como: o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é infinito, ou $f(x)$ torna-se infinita quando x tende a a , ou $f(x)$ cresce sem limitação quando x tende a a . Analogamente quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Limites no Infinito: São os limites quando a variável independente x tende ao infinito ($+\infty$ ou $-\infty$). Dessa forma, x tender a $+\infty$ significa que aumenta indefinidamente e, analogamente, x tender a $-\infty$ significa que diminui indefinidamente (é um número cada vez maior, em módulo).

Exemplo 1: Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$.

Para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ basta analisarmos o comportamento de x quando tende ao infinito positivo, assim: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 - 2x + 5$. Agora é importante perceber que o termo de maior grau definirá o limite: se $x \rightarrow +\infty$, então $4x^3 \rightarrow +\infty$; se $x \rightarrow +\infty$, então $-2x \rightarrow -\infty$; e 5 é a constante. Porém, $4x^3 > 2x$ logo teremos que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 - 2x + 5 = +\infty$

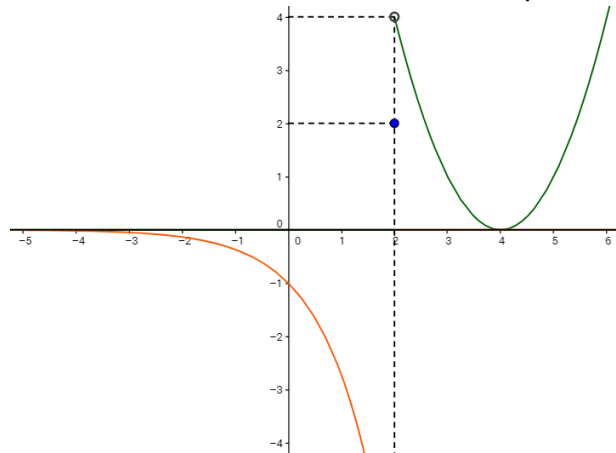
Analogamente, quando tivermos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, o valor do maior termo ficará negativo e assim:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 - 2x + 5 = -\infty.$$

Exemplo 2: Qual o limite da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2$, quando x tende $+\infty$?

Escrevemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$, visto que é uma função constante.

Exemplo 3: Limites pelo gráfico: Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo:



Para calcularmos os limites a partir do gráfico, devemos analisar o comportamento da função quando x se aproxima do valor em questão, ou seja, procuramos no eixo dos x os valores próximos para o qual está tendendo, e na curva observamos qual o limite do $f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ pois $f(x)$ está se aproximando cada vez mais do eixo dos x para valores de x cada vez menores.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ pois $f(x)$ está aumentando indefinidamente quando x aumenta.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ pois $f(x)$ está diminuindo indefinidamente quando x se aproxima de 2 pela esquerda.

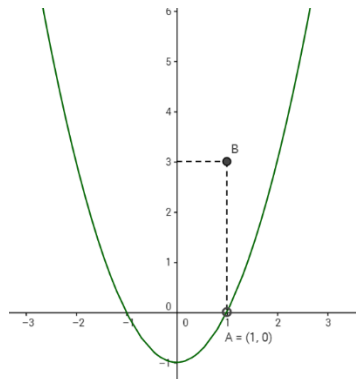
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ pois $f(x)$ está se aproximando cada vez mais de 4 quando x se aproxima de 2 pela direita.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe, pois, os limites laterais são distintos.

FICHA DE RESPOSTAS 3 – Limites

Item A:

4. Gráfico da função f é uma parábola, observe que quando $x=1$ temos que $f(1)=3$, diferente do limite neste ponto.



$$4.1. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 1 = \lim_{h \rightarrow 0} (1 - h)^2 - 1 = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 - 2h + 1 - 1 = 0 \quad (\text{Pode usar a}$$

solução gráfica ou numérica)

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^2 - 1 = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 2h + 1 - 1 = 0$$

- 4.3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, como os limites laterais são iguais, o limite quando x tende a 1 existe. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

- 4.4. Explique o que significa $x \rightarrow 1^-$

Significa que x tende a 1 por valores menores do que 1 (a esquerda). Nesse caso é importante compreender que não estamos interessados em saber o que ocorre a direita do ponto.

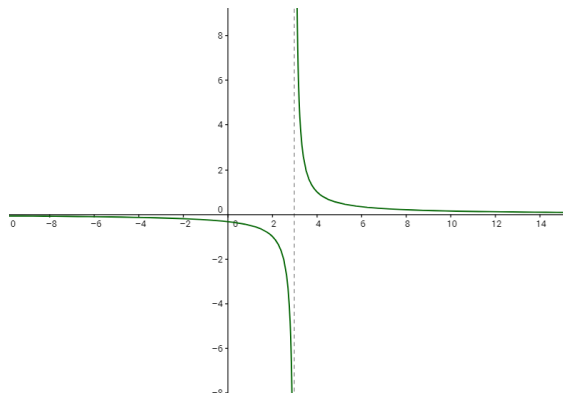
- 4.5. Qual a diferença entre $x \rightarrow 1^-$ e $x \rightarrow 1$?

No primeiro caso só queremos saber o comportamento de $f(x)$ a esquerda do ponto (se fosse + seria a direita), enquanto que, quando escrevemos $x \rightarrow 1$, estamos preocupados em analisar o que ocorre na vizinhança de $x=1$, tanto pela direita como pela esquerda.

- 4.6. O limite é igual a imagem da função nesse ponto?

Não, a imagem no ponto $x=1$ é 3, ou seja $f(1)=3$. O que nada tem a ver com o limite, pois o limite se preocupa com a vizinhança do ponto, não especificamente o ponto.

5. Gráfico da função



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(3-h)-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-h} = -\infty$$

5.1.

(nessa questão é importante perceber que ficamos com $1/-h$, esse quociente quando h tende a zero tende ao infinito negativo. Faça o teste substituindo h por um número cada vez mais próximo de zero).

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(3+h)-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty$$

(análoga à questão anterior, perceba que o limite não existe, estamos apenas indicando que quando h tende a zero o quociente cresce indefinidamente).

5.3. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, como os limites laterais são diferentes, não existe limite quando x tende a 3.

5.4. Explique a mudança da variável x por h . Significa que estamos considerando o h como a distância entre o x e o valor que ele está tendendo. Seria a mesma ideia da aproximação numérica, ou seja, h representa uma distância que tende a zero, diminui cada vez mais. Quando fazemos $x+h$ e $x-h$ estamos calculando, respectivamente, o limite pela direita e pela esquerda.

6. Nessa questão o grupo deverá perceber que para determinar os limites de funções dadas na forma gráfica, basta olhar o comportamento da f , sem fazer cálculos.

$$3.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

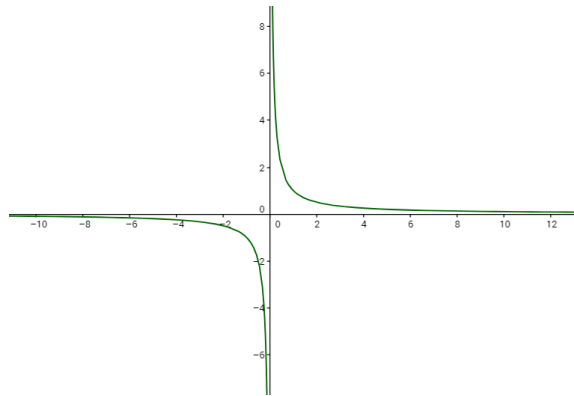
$$3.5. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ n. existe}$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 6$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 2$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 6} f(x) \text{ n. existe}$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 10} f(x) = -2$$

Item B:**1. Gráfico**

1.1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Percebemos que quando mais próximo x está de zero (por valores

menores que zero), mais a função decresce. Assim: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Novamente, a expressão fica negativa, pois dividindo 1 por x , quando x é muito próximo de zero pela esquerda, resulta em um número muito grande (em módulo) negativo.

1.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Agora, quando mais próximo de zero se encontra o x (por valores maiores

que zero), mais a função cresce. Assim: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

1.3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe, pois os limites laterais são diferentes.

1.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Precisamos analisar o que ocorre com $f(x)$ quando x aumenta

indefinidamente. Então a pergunta é o que acontece quando dividimos 1 por um número positivo cada vez mais (faça o teste). A resposta é que se aproxima de zero.

Assim: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

1.5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Agora temos o mesmo raciocínio, mas para um valor negativo muito

grande. Então, novamente: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

1.6. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ O valor $x=1$ está definido no domínio da função, então:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

1.7. O que significa $x \rightarrow +\infty$? Que x aumenta indefinidamente. Cuidado $+\infty$ não é um número!

1.8. Qual a diferença entre $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$?

O primeiro limite significa que estamos preocupados com o que ocorre com $f(x)$ para valores de x próximos de zero, porém menores do que zero. O segundo significa o mesmo, mas para valores maiores do que zero.

1.9. Existe valor de x tal que $f(x) = 0$? Não, como a função é $f(x) = 1/x$ não existe valor de x que resulte em $f(x) = 0$.

C. Respostas no próprio livro.

→ Ficha de Trabalho 4

Conteúdos abordados: Definição de limite, de limites infinitos e no infinito, demonstração de limites por meio da definição, interpretação gráfica das definições.

Objetivos: Saber calcular limites pela definição; Interpretar algébrica e graficamente a definição de limites.

Considerações gerais: Essa ficha aborda os temas relacionados a definição de limites, por isso, de acordo com a aplicação em sala, foi a que exigiu mais tempo de discussão dos grupos. Deverá, preferencialmente, ser aplicada durante no mínimo quatro horas/aula. De acordo com o tempo e critérios do professor, ela poderá ser aplicada no final do capítulo ou na disciplina de análise real – dependendo do curso. Ademais, nesta aula, disponibilizamos os gráficos de forma dinâmica, no GeoGebra®, haja visto as interpretações das definições, o professor poderá fazer o mesmo. Os alunos devem consultá-los de forma independente no momento da aula ou extraclasse.

FT4 – Definição de Limite

Equipe:

Estudante avaliado: _____; Estudante 2: _____;

Estudante 3: _____; Estudante 4: _____.

Peso do dia: _____ (de zero a 50%)

NOTA: _____ (de zero a dez)

• **Itens individuais** (X para sim): () Faltou; () Chegou atrasado; () Saiu mais cedo; () Não trouxe o material de consulta; () Chamou o professor sem consentimento do grupo; () Atrapalhou o rendimento do grupo; () Não conhecia ou desrespeitou o contrato de trabalho; () Falta de comprometimento com a aprendizagem.

• **Itens do grupo:** (marcar a quantidade de ocorrências ou X para sim): () Nem todos os membros sabiam perguntar ou explicar o que já haviam feito; () Não aguardaram a sua vez de atendimento; () Trabalho feito de forma individual; () Algum componente está atrasado ou adiantado em relação ao grupo; () Consultaram a ficha resposta antes de finalizar a atividade;

() **Tempo de efetivo trabalho (medido em horas).**

A. Considere a definição de limite: Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se para todo número $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ (STEWART, 2006, p. 115).

Com base nisso, na ficha de sugestões e no material de consulta do grupo, responda o que se pede:

1. Interprete geometricamente essa definição, detalhando todas as informações do gráfico e significado dos termos.

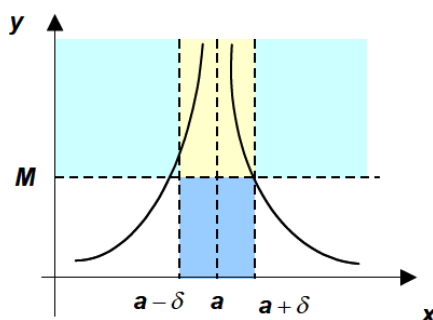
2. A partir da definição, prove a existência dos seguintes limites:

a. $\lim_{x \rightarrow -2} -4x + 2 = 10$

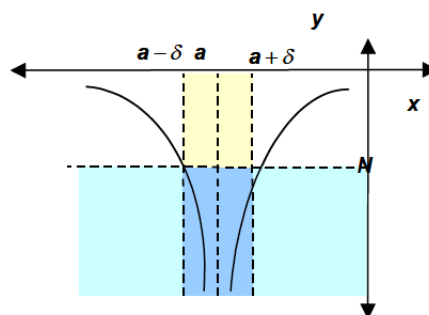
b. $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 = -1$

B. Dadas as representações abaixo, determine uma definição correta para cada uma, interpretando-as⁷:

1.



2.



C. Explique a definição de limites no infinito de forma algébrica e gráfica.

D. Prove os limites propostos por Stewart (2006) nas questões 19 até 32, da página 123.⁸

⁷ As figuras foram produzidas pela professora Eliane. Disponíveis na Apostila de CDI I.

⁸ Nesta questão existem limites que demandarão técnicas mais elaboradas para serem provados, por isso, utilize material de consulta.

FICHA DE SUGESTÕES 4 – Definição de Limite

Nas últimas aulas, usamos a ideia intuitiva de limites para analisar o comportamento de funções e perceber o que acontece com f quando x tende para algum valor ou até mesmo para o infinito. Porém, até o momento não nos atentamos para uma definição formal de limites. Para isso, vejamos alguns exemplos provando que um limite existe pela definição.

A.

Exemplo 1: Na *ficha 2* tínhamos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$ para a qual calculamos o limite $\lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 5$ de forma intuitiva. Nesse sentido, entendemos a situação como: quando x está próximo de 2 (pela esquerda e direita), $f(x)$ se aproxima de 5 cada vez mais. Porém, o que nos perguntamos é: Quão próximo deve ser x de 2 para que seja o suficiente? Uma das formas de pensar nessa situação é conforme abaixo (adaptada de Stewart, 2006, p. 114):

Considere que a distância máxima entre $f(x)$ e 5 deva ser 0,01, ou seja, a distância é $|f(x) - 5| < 0,01$. Logo, para o limite existir, devemos achar um valor positivo δ (delta⁹), tal que a distância entre x e 2 seja menor do que δ :

$$|f(x) - 5| < 0,01 \quad \text{se} \quad |x - 2| < \delta \quad \text{com} \quad x \neq 2$$

Como devemos ter $x \neq 2$, basta considerar $|x - 2| > 0$, logo:

$$|f(x) - 5| < 0,01 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

Como $f(x) = x + 3$, temos:

$$|x - 2| < 0,01 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

O que nos fornece duas interpretações importantes. A primeira é que quando queremos $|f(x) - 5| < 0,01$, basta tomar $|x - 2| < 0,01$, ou seja, $\delta < 0,01$. A segunda questão é que a partir de $|x - 2| < 0,01$, encontramos que $1,99 < x < 2,01$, o que significa que a imagem de qualquer valor x desse intervalo se aproximará de 5 por menos de 0,01 de distância, ou seja, $4,99 < f(x) < 5,01$, para qualquer $1,99 < x < 2,01$.

Entretanto, para que o limite exista, devemos tornar a distância entre $f(x)$ e 5 menor que qualquer número positivo, o que é possível, pois como vimos, podemos diminuir a distância tanto quanto quisermos. Para isso chamamos de ε (épsilon) a distância entre $f(x)$ e 5:

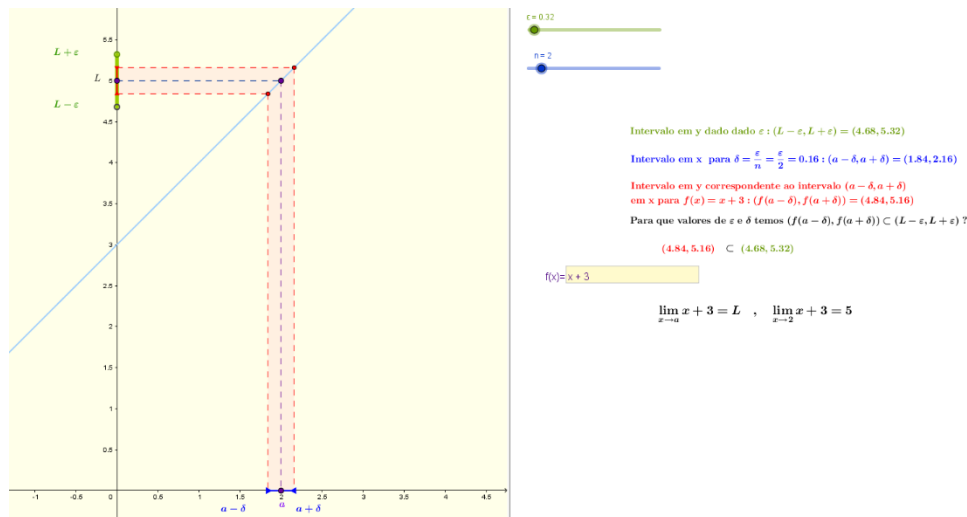
$$|f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

O que significa que $f(x)$ estará próximo de 5 quando x estiver próximo de 2. Podemos escrever as sentenças acima como:

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 2 - \delta < x < 2 + \delta \quad (x \neq 2)$$

Logo, escolhendo o valor de x dentro do intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$, $x \neq 2$, teremos o valor de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

⁹ Por convenção, quando falamos da distância entre x e o valor que ele tende, usamos a letra grega delta.



Para melhor visualização, abre o gráfico no GeoGebra aqui: [gráfico exemplo](#)

Exemplo 2: Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 7$, prove que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 9$.

Para isso devemos mostrar que dado um valor $\epsilon > 0$, existe um valor $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - 9| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 1| < \delta$$

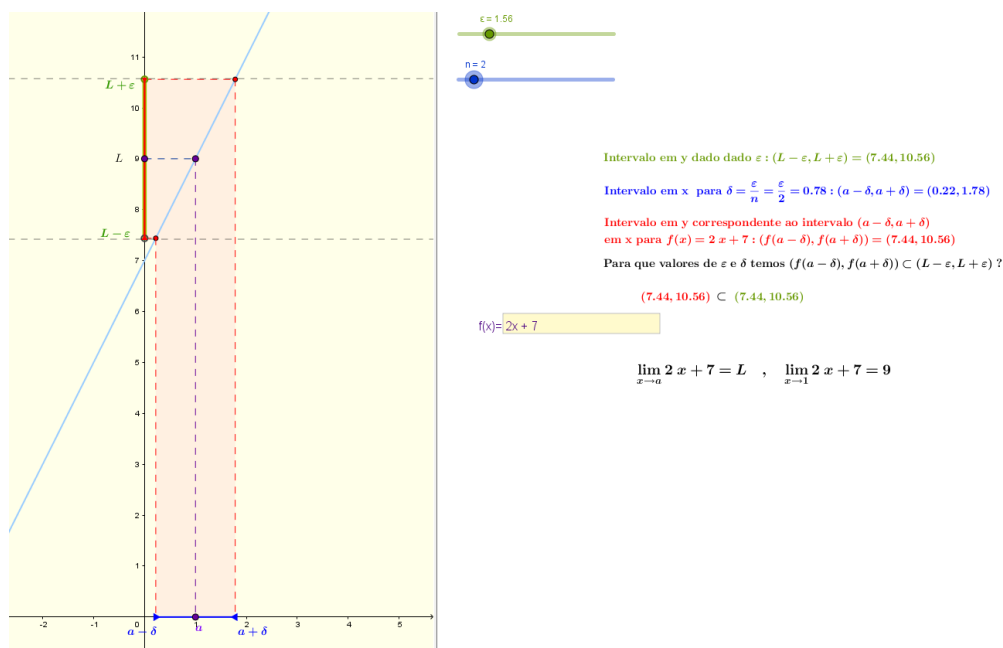
Como $f(x) = 2x + 7$, temos: $|2x - 2| < \epsilon$, colocando o 2 em evidência, ficamos com:

$$2|x - 1| < \epsilon \rightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ o que significa:}$$

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 1| < \delta$$

O que prova que existe $\delta > 0$, ou seja, podemos escolher qualquer valor $\epsilon > 0$ que teremos

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}.$$



Observação: sempre que provamos que um limite existe, estamos buscando uma relação entre os valores de ε e δ . Além disso, perceba que, quando o limite existe, conseguimos encontrar um valor $\delta > 0$, para o qual que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. [Gráfico dinâmico.](#)

B. Limites Laterais

Exemplo 1: Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > 2 \\ 2 & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$, representada

abaixo. Prove que $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$.

Como no limite bilateral (provado no caso A), devemos encontrar um valor de $\delta > 0$ para um valor $\varepsilon > 0$ dado:

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \quad \text{sempre que } 2 < x < 2 + \delta$$

A notação acima significa que o valor de x deve estar no intervalo $(2, 2 + \delta)$.

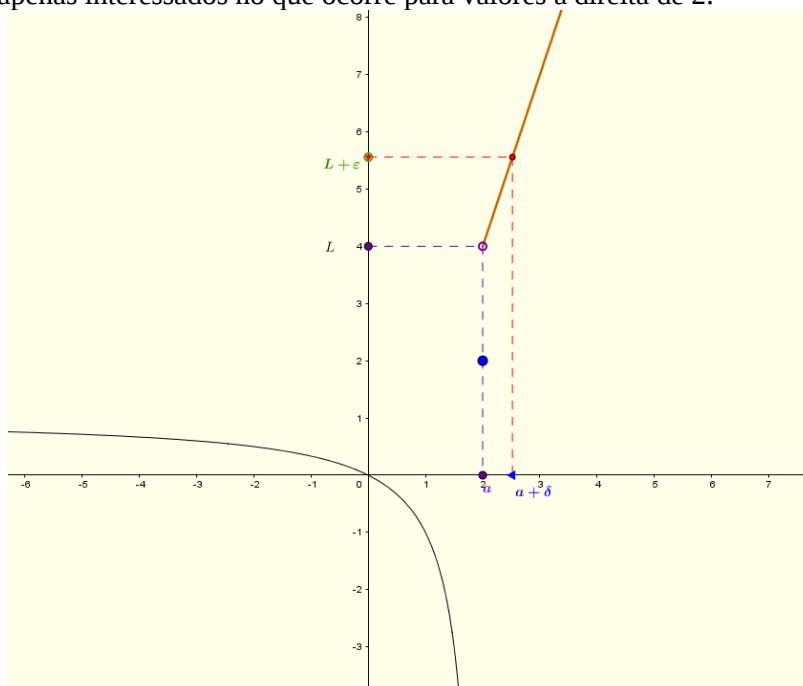
Como o limite é a direita de 2, temos que $f(x) = 3x - 2$ e podemos reescrever:

$$|f(x) - 4| = |3x - 2 - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon, \text{ o mostra que: } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
 Assim, obtemos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

O caso para limites a esquerda é análogo, considerando o intervalo de x como: $a - \delta < x < a$

Observação: Considere abaixo, no mesmo gráfico, a explicação do limite, e a função f . Perceba que estamos apenas interessados no que ocorre para valores a direita de 2.



C. Limites Infinitos

Exemplo 1: Considere a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ e prove que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Nesse caso, precisamos utilizar a definição de limites infinitos. Lembrando que infinito não é um número, então provaremos que a função não tem limite, mas que suas imagens aumentam indefinidamente quando x se aproxima de 0.

Assim, temos que mostrar que para todo número positivo M (por maior que seja) existe $\delta > 0$ para o qual $f(x) > M$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Vamos considerar um exemplo numérico, seja $M=100$, assim teremos que mostrar que existe um valor $\delta > 0$ que seja correspondente ao valor

de M e que $0 < |x - 0| < \delta$. Assim: $f(x) > 100 \rightarrow \frac{1}{x^2} > 100 \rightarrow \frac{1}{100} > x^2$, extraindo a raiz

quadrada, obtemos: $|x| < 0,1$.

Isso nos mostra que $0 < |x - 0| < 0,1$, ou seja, $\delta = 0,1$, o que prova que existe $\delta > 0$ correspondente a M .

O [gráfico](#) abaixo mostra que se restringirmos o valor de x ao intervalo $(0 - \delta, 0 + \delta)$, $x \neq 0$, então a curva $y=f(x)$ ficará acima da reta $y = 100$. Podemos perceber que quanto maior for o valor de M , menor será o intervalo de x , ou seja δ será menor.

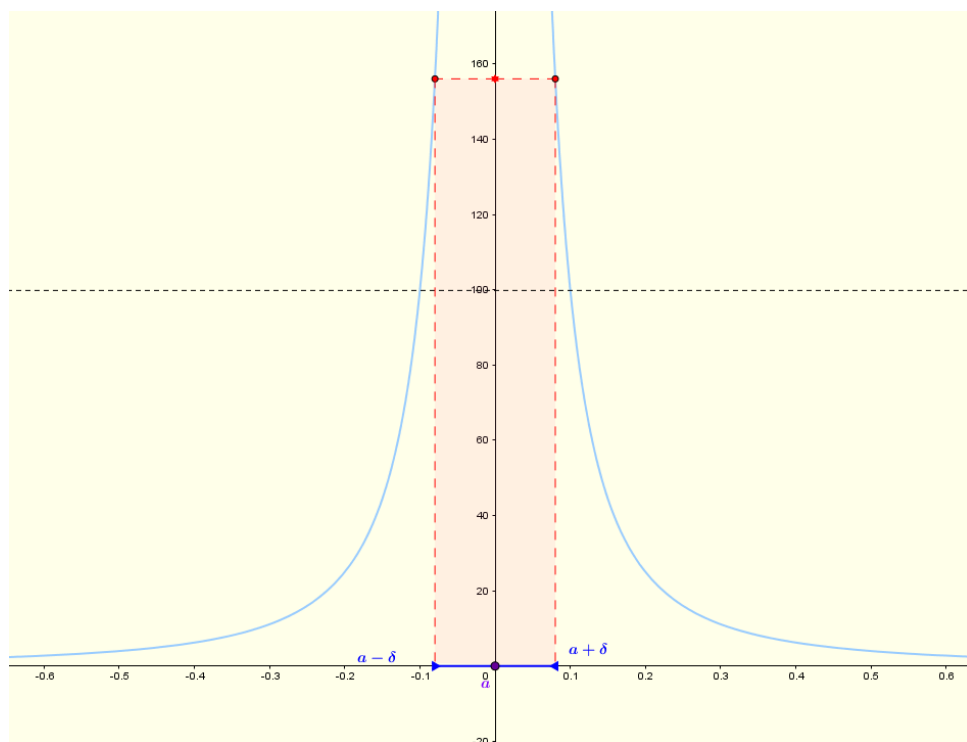
Entretanto, para provar que o limite existe devemos considerar um valor de M de tal modo que $f(x)$ seja maior que qualquer número, o que é possível seguindo-se o raciocínio acima, conforme segue-se:

Considere um valor dado $M > 0$, queremos $\delta > 0$ tal que:

$$f(x) > M \text{ sempre que } 0 < |x - 0| < \delta$$

$$\text{isto é, } \frac{1}{x^2} > M \rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \text{ sempre que } 0 < |x| < \delta$$

Assim, encontramos $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.



Exemplo 2: Considere a função $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ e prove que $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$.

Neste caso, temos que mostrar que para todo número negativo N (por maior negativamente que seja) existe $\delta > 0$ para o qual $f(x) < N$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

O gráfico abaixo mostra que se restringirmos o valor de x ao intervalo $(0 - \delta, 0 + \delta)$, $x \neq 0$, então a curva $y = f(x)$ ficará abaixo da reta $y = N$. Podemos perceber que quanto maior (negativamente) for o valor de N , menor será o intervalo de x , ou seja δ será menor. Para provar que o limite existe faremos:

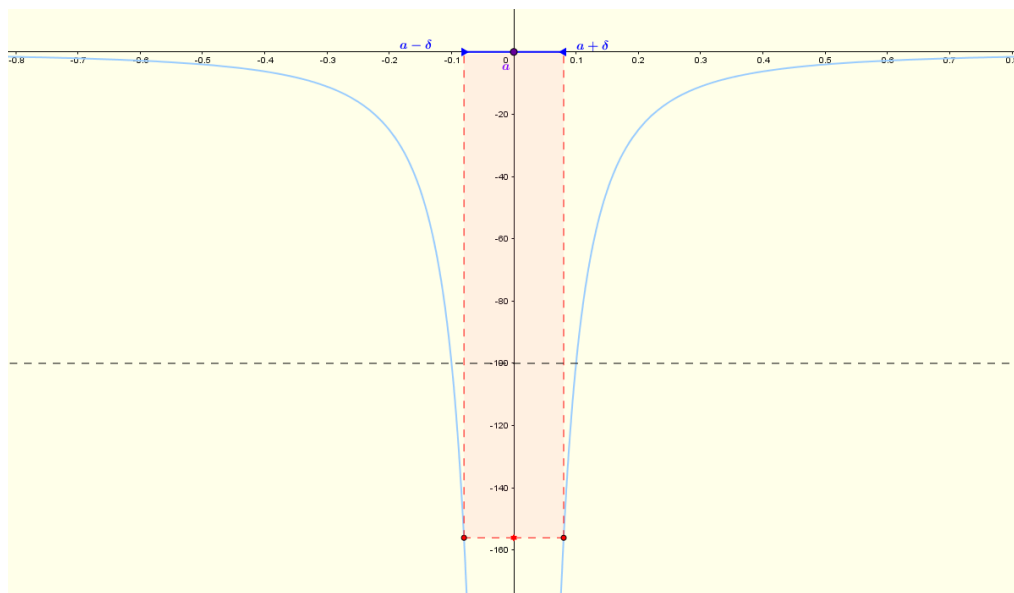
Considere um valor dado $N < 0$, queremos $\delta > 0$ tal que:

$$f(x) < N \text{ sempre que } 0 < |x - 0| < \delta$$

$$\text{isto é, } -\frac{1}{x^2} < N \rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{-N}} \text{ sempre que } 0 < |x| < \delta$$

Assim, encontramos $\delta = \frac{1}{\sqrt{-N}}$. Se tomarmos $N = -100$, teremos $\delta = 0,1$, o que significa que a

função f estará abaixo da reta $y = -100$, para valores de x dentro do intervalo $(0 - \delta, 0 + \delta)$, $x \neq 0$



D. Limites no Infinito

Exemplo 1: Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ e prove que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

A partir da definição de limite no infinito, devemos encontrar um valor positivo M (nesse caso, pois x tende ao infinito positivo) para o qual $x > M$, dado qualquer valor $\varepsilon > 0$ (menor que seja) tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Acompanhe o seguinte exemplo, considerando $\varepsilon = 0,02$, teremos que provar que existe algum valor M , tal que $x > M$. Assim:

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < 0,02 \rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < 0,02 \rightarrow \frac{1}{|x|} < 0,02 \text{ O que significa que: } x > 50 \text{ ou } x < -50.$$

Mas como $x > M$ e $x > 50$, concluímos que $M = 50$ (como $M > 0$ consideramos apenas a parte positiva).

O que significa esse resultado? Para qualquer valor de x maior do que 50, a imagem da função f estará no intervalo aberto $(0, 0.02)$. Agora precisamos provar que o valor de $\varepsilon > 0$ possa ser menor que qualquer número positivo. Assim:

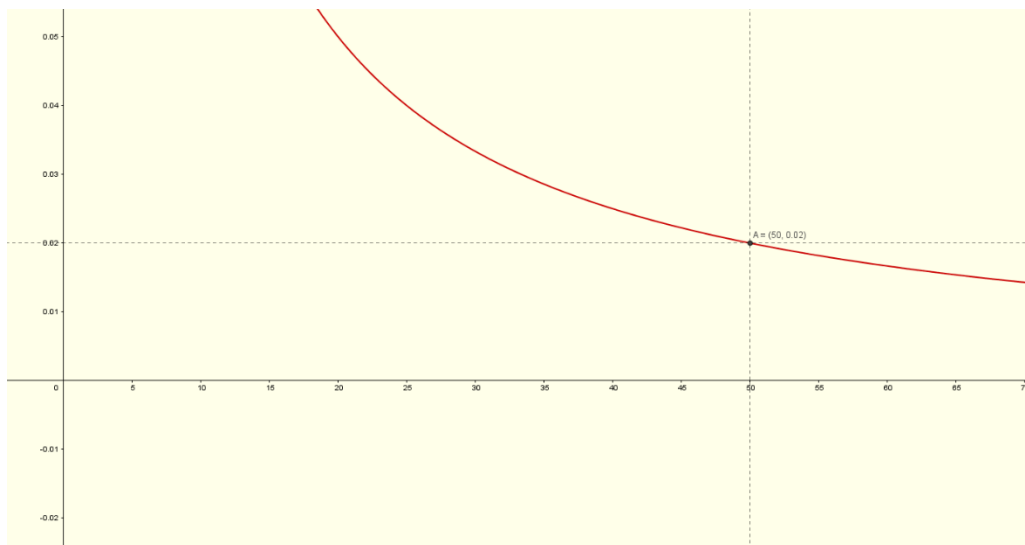
$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x > M$$

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x > M$$

Como fizemos anteriormente, chegaremos em:

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{sempre que } x > M$$

O que mostra que $M = \frac{1}{\varepsilon}$. O que prova o limite. O gráfico segue abaixo, observe que para valores de x maiores do que 50, a função encontra-se abaixo da reta $y=0,02$. Use o [gráfico dinâmico](#) para analisar o que acontece quando atribuímos valor menores para ε



Exemplo 2: Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ e prove que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

De modo análogo ao anterior, devemos encontrar um valor negativo N (pois x tende ao infinito negativo), tal que $x < N$, para qualquer valor $\varepsilon > 0$ (menor que seja) tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Assim:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x < N$$

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } x < N$$

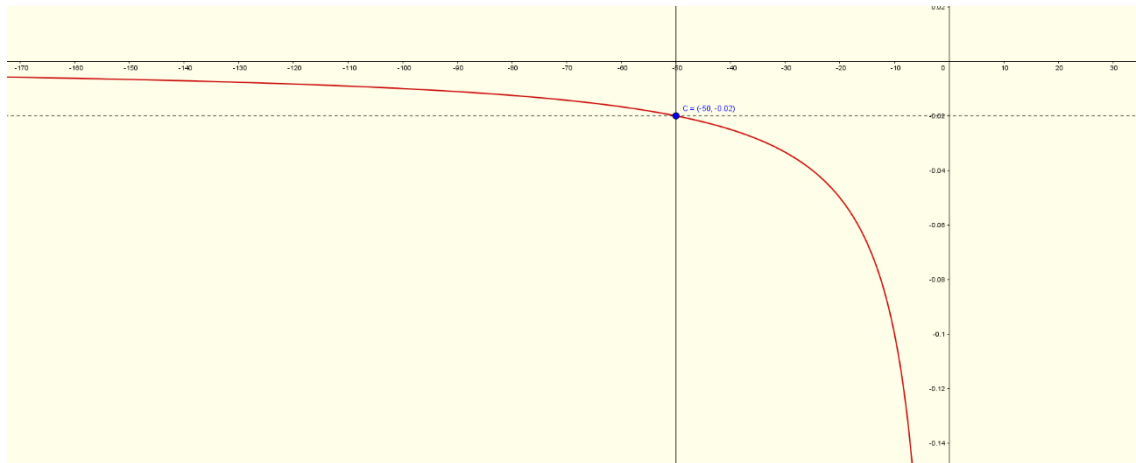
Chegaremos novamente em:

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{sempre que } x < N$$

A partir do módulo de x temos: $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ou $x < -\frac{1}{\varepsilon}$, como x tende ao $-\infty$, consideramos

$$x < -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ logo encontramos } N = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

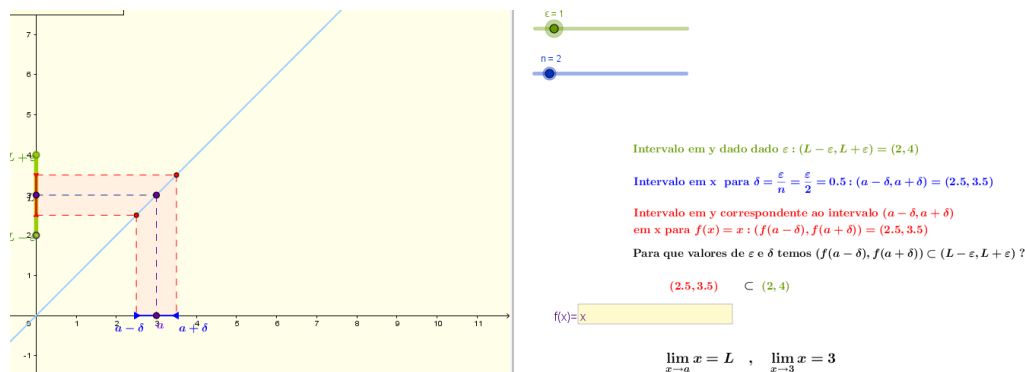
Isso significa que quando menor for $\varepsilon > 0$, maior (negativamente) será o valor de N e consequentemente, existirá um valor de x , para o qual $x < N$, com N sendo o menor número negativo.



Veja que o comportamento [gráfico](#) é o mesmo, mas com valores cada vez menores. **Cuidado:** não confunde menor, com cada vez mais próximo de zero! Quando falamos em valores de x cada vez menores estamos falando em números negativos muito grandes.

FICHA DE RESPOSTAS 4 – Definição de Limite

Item A:

1. Gráfico dinâmico

Com base no gráfico, espera-se que o grupo entenda que o ponto a (para o qual x está tendendo) não precisa estar definido, pois busca-se o que ocorre na vizinhança dele. Na verdade, para o limite existir, para qualquer número positivo ε , por menor que seja, deverá haver um número positivo δ , para o qual conseguimos, abrir ao redor de L , um intervalo de tamanho ε no qual $f(x)$ esteja contido, assim: $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ sempre que tivermos um intervalo de tamanho δ no qual x esteja contido, assim: $x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow -2} -4x + 2 = 10$

Considere $\varepsilon > 0$ dado, então teremos $|f(x) - 10| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - (-2)| < \delta$

Isto é, $|-4x - 8| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x + 2| < \delta$

Mas, $|-4x - 8| = 4|x + 2| < \varepsilon \rightarrow |x + 2| < \frac{\varepsilon}{4}$

O que mostra que $0 < |x + 2| < \frac{\varepsilon}{4}$, assim $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 = -1$

Considere $\varepsilon > 0$ dado, então teremos $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$

Isto é, $|x^2 - 1| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$

O que resulta em: $|x^2 - 1| = |x + 1||x - 1| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$

Se pudermos achar uma constante positiva C , tal que $|x + 1| < C$, então podemos multiplicar ambos os lados dessa desigualdade por $|x - 1|$ e ficaremos com:

$|x + 1||x - 1| < C|x - 1|$, mas sabemos que $|x + 1||x - 1| < \varepsilon$, logo podemos dizer que

$$C|x - 1| < \varepsilon \rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

O que precisamos é encontrar o valor de C . Para isso, podemos restringir o valor de x a um intervalo centrado em 1, já que estamos preocupados em analisar o que ocorre próximo ao valor

1. Assim, considere que x esteja entre 0 e 2, ou seja, $0 < x < 2$, isto é a distância entre x e 1 é menor do que 1: $|x - 1| < 1$. Com isso ($0 < x < 2$), podemos escrever, somando 1 na desigualdade, que $1 < x + 1 < 3$. Assim, $|x + 1| < 3$, como $|x + 1| < C$, então $C = 3$.

O que faz com que tenhamos duas restrições para $|x - 1|$ que são: $|x - 1| < 1$ e $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{3}$

Para garantir que ambas as desigualdades sejam satisfeitas, tomemos δ como o menor número entre 1 e $\frac{\varepsilon}{3}$, o que escrevemos como: $\delta = \min\{1, \varepsilon / 3\}$

Assim, temos $|f(x) - (-1)| < 3|x - 1|$, mas $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$, logo: $|f(x) - (-1)| < 3 \frac{\varepsilon}{3}$

O que nos permite concluir, pois $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$.

Item B:

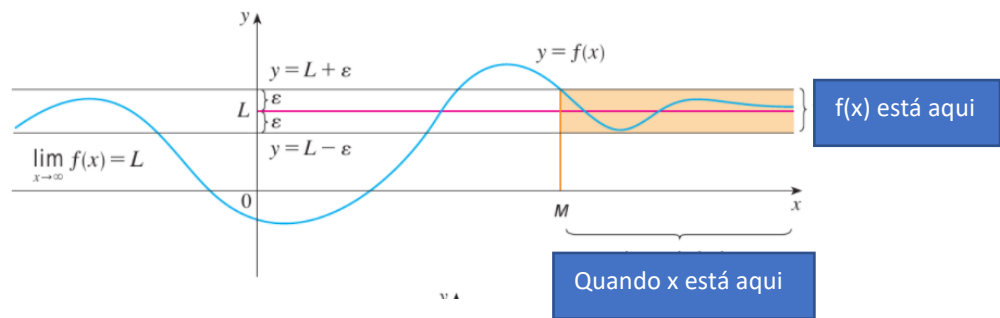
1. Corresponde a definição de limite infinito positivo. Definição: Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é $+\infty$ e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ se para qualquer número positivo M , por maior que seja, existir $\delta > 0$ correspondente, tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > M$. Isso significa que as imagens dos pontos da função dentro do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ estarão acima da reta $y = M$. Isso quer dizer que o valor de $f(x)$ será maior que qualquer número positivo M devidamente escolhido.

2. De forma análoga, essa representação corresponde a definição de limite infinito negativo. Definição: Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é $-\infty$ e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ se para qualquer número negativo N , por menor que seja (negativamente maior), existir $\delta > 0$ correspondente, tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) < N$. Isso significa que as imagens dos pontos da função dentro do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ estarão abaixo da reta $y = N$. Isso quer dizer que o valor de $f(x)$ será menor (negativamente maior) que qualquer número negativo N devidamente escolhido.

Item C: Explique a definição de limites no infinito de forma algébrica e gráfica.

Caso 1: Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ e escrevemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ se existir $\varepsilon > 0$, por menor que seja, para o qual seja possível indicar um valor $M > 0$, tal que, para todo x que satisfaz $x > M$ se verifica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

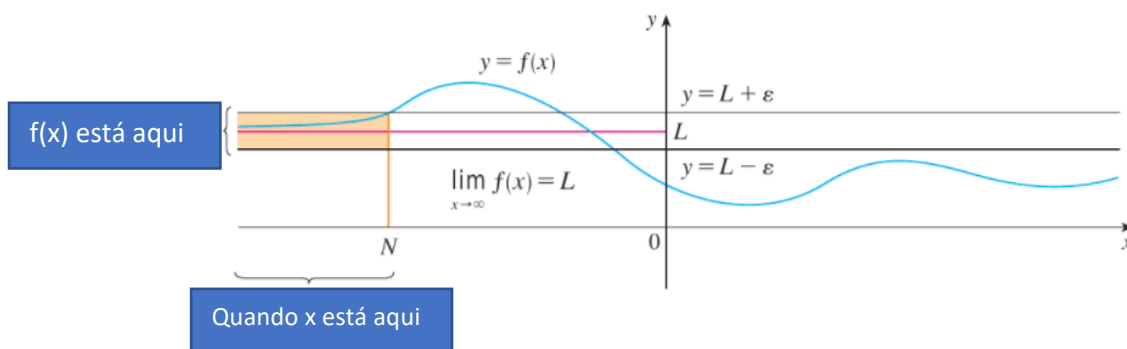
Isso significa que, para o limite existir, devemos ter um valor $\varepsilon > 0$, que determinará um intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ no qual estarão contidos os valores $f(x)$ para os quais $x > M$, com M sendo um número positivo. Em outras palavras, nesse intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ - deveremos ter as imagens $f(x)$ - dos valores de x que são maiores do que qualquer número positivo M . Abaixo a representação gráfica



Fonte: adaptado de <http://www.pbx-brasil.com/calculo01/Notas/Area01/dia08/limnoInfty.html>

Caso 2: Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$ e escrevemos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ se existir $\varepsilon > 0$, por menor que seja, para o qual seja possível indicar um valor $N < 0$, tal que, para todo x que satisfaz $x < N$ se verifica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Isso significa que, para o limite existir, devemos ter um valor $\varepsilon > 0$, que determinará um intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ no qual estarão contidos os valores $f(x)$ para os quais $x < N$, com N sendo um número negativo. Em outras palavras, nesse intervalo $-(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ - deveremos ter as imagens $f(x)$ - dos valores de x que são menores do que qualquer número negativo N . Abaixo a representação gráfica.



Fonte: adaptado de <http://www.pbx-brasil.com/calculo01/Notas/Area01/dia08/limnoInfty.html>

Existem outros casos, mas os apresentados são os fundamentais, os demais podem ser consultados em livros de CDI.

Item D: Respostas no próprio livro.

→ Ficha de Trabalho 5

Conteúdos abordados: Cálculo de limites com indeterminações

Objetivos: Entender as indeterminações no cálculo de limites; Calcular limites eliminando as indeterminações.

FT5 – Técnicas de Cálculo

Equipe:

Estudante avaliado: _____; Estudante 2: _____;

Estudante 3: _____; Estudante 4: _____.

Peso do dia: _____ (de zero a 50%)

NOTA: _____ (de zero a dez)

• **Itens individuais** (X para sim): () Faltou; () Chegou atrasado; () Saiu mais cedo; () Não trouxe o material de consulta; () Chamou o professor sem consentimento do grupo; () Atrapalhou o rendimento do grupo; () Não conhecia ou desrespeitou o contrato de trabalho; () Falta de comprometimento com a aprendizagem.

• **Itens do grupo:** (marcar a quantidade de ocorrências ou X para sim): () Nem todos os membros sabiam perguntar ou explicar o que já haviam feito; () Não aguardaram a sua vez de atendimento; () Trabalho feito de forma individual; () Algum componente está atrasado ou adiantado em relação ao grupo; () Consultaram a ficha resposta antes de finalizar a atividade;

() **Tempo de efetivo trabalho (medido em horas).**

A. Cite as indeterminações que podem aparecer no cálculo de limites.

B. Resolva os seguintes limites, destacando as técnicas utilizados em cada etapa:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x + 7}{6}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 2}{x + 1}$

3. $\lim_{h \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2(h^2 - 8)} + h}{h + 4}$

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{|x - 4|}$

C. Façam os exercícios 10 a 30 da página 112 e exercícios 13 a 34 da página 147 do livro

Cálculo, volume 1 (STEWART, 2006).

FICHA DE SUGESTÕES 5 – Técnicas de Cálculo

Na última ficha percebemos que não é fácil determinar alguns limites pela definição ou até mesmo de forma intuitiva. Por isso, estudaremos algumas técnicas de cálculo que facilitam a determinação do limite.

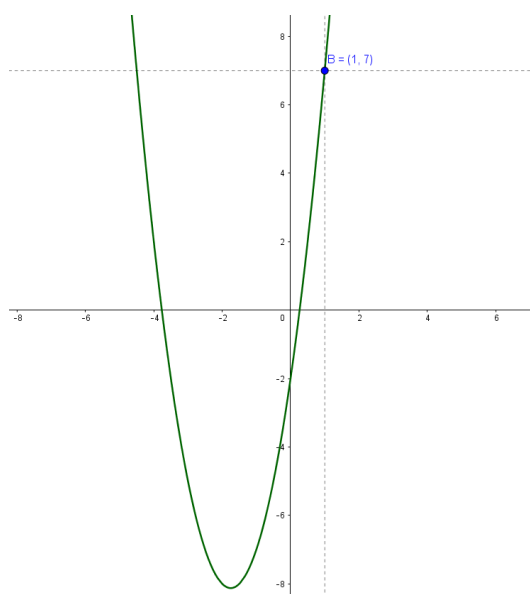
Vejamos dois casos:

Exemplo 1: Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 + 7x - 2$, determine $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Nesse caso, conseguimos calcular o limite de forma direta, basta aplicar a **Propriedade de Substituição Direta**: Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f , então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Assim, fazemos: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + 7x - 2 = 2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 2 + 7 - 2 = 7$

O gráfico abaixo mostra a função, veja que aproximando x de 1, tanto pela esquerda como pela direita, é possível pois a função é definida em todos estes pontos.



Exemplo 2: Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x + 1}$, $x \neq -1$, determine

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Iniciamos analisando se a **Propriedade de Substituição Direta** pode ser usada:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 2}{x + 1} = \frac{(-1)^3 - (-1)^2 + 2}{-1 + 1} = \frac{-1 - 1 + 2}{0} = \frac{0}{0}$$

Mas $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, ou seja, nada se pode concluir desse limite antes de um estudo

mais aprofundado. Na verdade, quando isso acontece, basicamente utilizamos as propriedades dos limites e manipulações algébricas para eliminar essa indeterminação. Assim, vejamos:

Técnicas de Cálculo de Limites

Dependendo o tipo de indeterminação que aparecer no cálculo dos limites, algumas técnicas podem facilitar.

1º passo: analise se o limite não é encontrado por substituição imediata. Lembre-se que expressões como $\frac{a}{0}, a \neq 0; \frac{a}{\infty}$ **não** são indeterminações;

2º passo: Aplique os limites notáveis, se for possível;

3º passo: Aplique as propriedades dos limites;

4º passo: utilize as simplificações algébricas abaixo:

• **Fatoração:** uma das técnicas mais comuns é fatorar o numerador e o denominador para conseguir simplifica-lo.

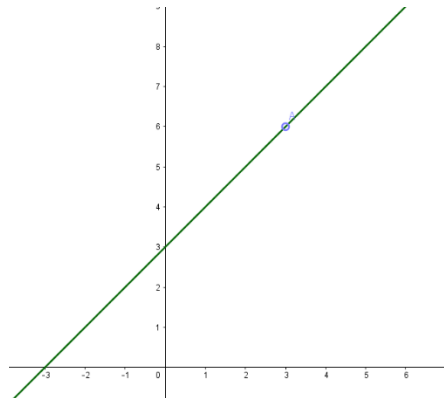
Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} \text{ é uma indeterminação, assim, fazemos:}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3}$, agora considerando $x - 3$ diferente de zero, podemos simplificar numerador com denominador. Isso é possível pois x se aproxima muito de 3, mas nunca será igual, então:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 3 + 3 = 6$$

Isso é possível pois a função $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ é igual a função $g(x) = x + 3$ para todos os valores de $x \neq 3$, ou seja, a diferença é que a função f não está definida em $x=3$. O gráfico segue abaixo, grafique você mesmo, para entender melhor.



• **Divisão de polinômios:** quando tivermos um limite que envolva a divisão de duas funções polinomiais e o grau do numerador for **maior** do que o grau do denominador, poderemos efetuar a divisão.

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2} = \frac{-1 + 2 + 5 - 6}{1 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$ é uma indeterminação, assim,

podemos dividir os polinômios, considerando $x \neq -1$, o que resulta em (olhar divisão de polinômios):

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2} = x + 3. \text{ Assim, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} x + 3 = -1 + 3 = 2$$

• **Termo de maior grau:** Quando tivermos funções racionais que tendem para o infinito positivo (ou negativo), podemos dividir numerador e denominador pelo termo de maior grau.

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^3 - 4x^2 - 31x + 15}{4x^3 + 5x^2 - 3} = \frac{\infty + 15}{\infty - 3} = \frac{\infty}{\infty}$ é uma indeterminação. Para eliminá-la, podemos dividir numerador e denominador por x^3 , termo de maior grau:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12x^3 - 4x^2 - 31x + 15}{x^3}}{\frac{4x^3 + 5x^2 - 3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12x^3}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} - \frac{31x}{x^3} + \frac{15}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{5x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3}}$$

Simplificando cada um dos termos, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{4}{x} - \frac{31}{x^2} + \frac{15}{x^3}}{4 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}, \text{ pela propriedade da soma e quociente de limites, podemos calcular o}$$

limite separadamente de cada termo, então os termos $\frac{4}{x}, \frac{31}{x^2}, \frac{15}{x^3}, \frac{5}{x}, \frac{3}{x^3}$, sabendo que x está tendendo ao infinito, serão iguais a zero, no limite (lembrar do resultado de um número dividido por um número muito grande). Assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{4}{x} - \frac{31}{x^2} + \frac{15}{x^3}}{4 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{12 - 0 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{12}{4} = 3$$

• **Multiplicar pelo conjugado:** o conjugado de uma expressão $(a + b)$ é a expressão $(a - b)$. Essa técnica é utilizada para eliminar raízes quadradas.

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ é uma indeterminação, assim, podemos multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}, \text{ efetuando a multiplicação:}$$

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1} = \frac{x - 1}{\sqrt{x}(x - 1) + x - 1} = \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 1)}, \text{ substituindo}$$

no limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 1)}, \text{ podemos simplificar numerador e}$$

denominador, assim:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

• **Mudança de variável:** utilizado geralmente quando temos raízes de índice não quadrado. Escolhe-se uma variável que ‘elimine’ a raiz.

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \frac{8 - 8}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ é indeterminação.

Podemos substituir a variável x por uma variável conveniente que elimine a raiz cúbica. Num primeiro momento poder-se-ia pensar em usar t^3 , mas ela vai manter a indeterminação, assim, podemos pensar em t^6 , que simplifica ambas as raízes. Precisamos reescrever o limite, então

$x = t^6$, como $x \rightarrow 64$, teremos $64 = t^6 \rightarrow t = \sqrt[6]{64} = 2$, assim $t \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{t^6} - 8}{\sqrt[3]{t^6} - 4}, \text{ simplificando os expoentes, teremos:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{t^6} - 8}{\sqrt[3]{t^6} - 4} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3 - 8}{t^2 - 4} = \frac{8 - 8}{4 - 4} = \frac{0}{0}, \text{ o que mantém a indeterminação.}$$

Esse fato pode ocorrer no cálculo de limites, então teremos que aplicar mais de uma técnica. Nesse caso, como ficamos com uma divisão de polinômios, podemos aplicar uma técnica ainda não vista, que é dividir numerador e denominador pelo termo $(t - 2)$ valor de tendência de t , considerando $t \neq 2$, podemos fazer:

$$\frac{t^3 - 8}{t - 2} = t^2 + 2t + 4 \quad e \quad \frac{t^2 - 4}{t - 2} = t + 2, \text{ podemos reescrever e calcular o limite:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3 - 8}{t^2 - 4} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 2t + 4}{t + 2} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3$$

Observe e faça exemplos dos livros, assim, com o tempo, você conseguirá determinar qual técnica é melhor em cada caso.

FICHA DE RESPOSTAS 5 – Técnicas de Cálculo

Item A: Cite as indeterminações que podem aparecer no cálculo de limites.

São elas $\frac{0}{0}, 0^0, 1^{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, (\pm\infty)^0, 0 \cdot (\pm\infty)$ e $+\infty - \infty$

Item B: Resolva os seguintes limites, destacando as propriedades ou limites notáveis utilizados em cada etapa:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x + 7}{6}$ pela propriedade da substituição direta podemos calculá-lo direto. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x + 7}{6} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 4x + \lim_{x \rightarrow 0} 7}{\lim_{x \rightarrow 0} 6} = \frac{0 + 0 + 7}{6} = \frac{7}{6}$$

Além disso, no denominador usamos o limite de uma constante.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 2}{x + 1}$ como resulta em $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 2}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$. Podemos dividir numerador e denominador pelo termo de maior expoente (escolhemos essa técnica, pois se trata de um limite no qual $x \rightarrow \infty$), nesse caso, é x^3 , assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^3}}{\frac{x + 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

Pelos exemplos anteriores, sabemos que todo termo na forma $\frac{1}{x^n}$ quando $x \rightarrow \infty$ é zero. Assim, aplicando a propriedade da soma de

limites, teremos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 2}{x + 1} = +\infty$.

3. $\lim_{h \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2(h^2 - 8)} + h}{h + 4}$, resulta numa indeterminação: $\lim_{h \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2(h^2 - 8)} + h}{h + 4} = \frac{0}{0}$. Como se temos uma raiz de índice quadrado, podemos multiplicar a função pelo conjugado do numerador. Assim:

$$\frac{\sqrt{2(h^2 - 8)} + h}{h + 4} \cdot \frac{\sqrt{2(h^2 - 8)} - h}{\sqrt{2(h^2 - 8)} - h} = \frac{2(h^2 - 8) - h^2}{(h + 4)(\sqrt{2(h^2 - 8)} - h)} = \frac{h^2 - 16}{(h + 4)(\sqrt{2(h^2 - 8)} - h)} = \frac{(h + 4)(h - 4)}{(h + 4)(\sqrt{2(h^2 - 8)} - h)}$$

Como consideramos $(h+4)$ diferente de zero, podemos simplificar, assim:

$$\frac{(h + 4)(h - 4)}{(h + 4)(\sqrt{2(h^2 - 8)} - h)} = \frac{h - 4}{\sqrt{2(h^2 - 8)} - h}, \text{ substituindo no limite:}$$

$$\lim_{h \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2(h^2 - 8)} + h}{h + 4} = \lim_{h \rightarrow -4} \frac{h - 4}{\sqrt{2(h^2 - 8)} - h} = \frac{-4 - 4}{\sqrt{2((-4)^2 - 8)} - (-4)} = \frac{-8}{8} = -1$$

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2} = \frac{0}{0}$. Podemos fatorar o numerador, fazendo:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x^2 - a^2}, \text{ como } x \text{ é diferente de } a, \text{ podemos simplificar:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + a^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{|x-4|} = \frac{0}{0}$ Nesse caso, por ser uma função modular, teremos que analisar por meio dos

limites laterais, pois pela definição de módulo temos: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Logo, podemos escrever:

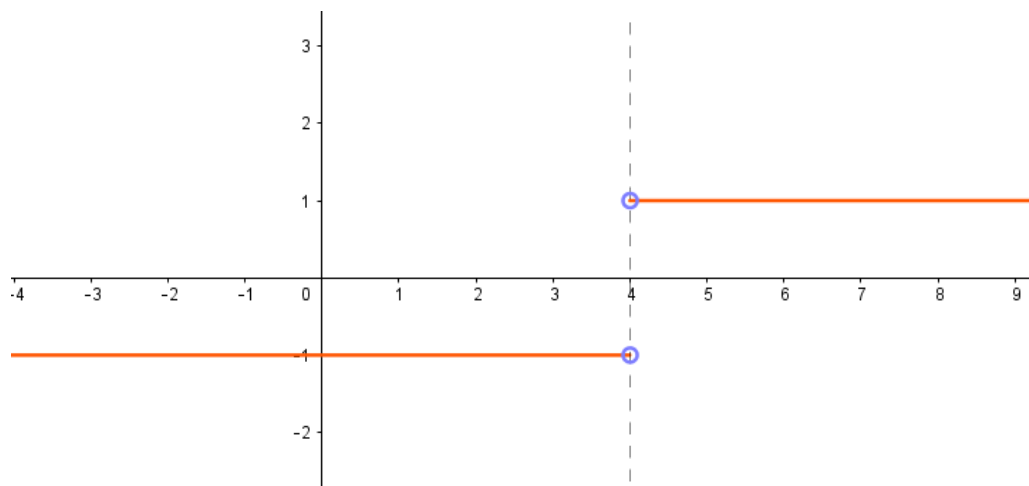
$f(x) = x - 4 \geq 0$ o que resulta em $x \geq 4$, logo utilizamos o limite a direita:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x-4|} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} 1 = 1$$

– $f(x) = -(x-4) > 0$ o que resulta em $x < 4$, logo utilizamos o limite a esquerda:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{|x-4|} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{-(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} -1 = -1$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe o limite em $x = 4$. Veja o gráfico da função.



Item C: Respostas no próprio livro, com exemplos resolvidos.

→ Ficha de Trabalho 6

Conteúdos abordados: Principais limites notáveis, propriedades operatórias dos limites, cálculo de limites com uso das propriedades e limites notáveis.

Objetivos: Saber demonstrar e aplicar os limites notáveis em problemas; Saber quais são as propriedades dos limites e aplica-las em exemplos; Aplicar as técnicas de cálculo de limites em exemplos.

FT6 – Propriedades e Limites Notáveis

Equipe:

Estudante avaliado: _____; Estudante 2: _____;

Estudante 3: _____; Estudante 4: _____.

Peso do dia: _____ (de zero a 50%)

NOTA: _____ (de zero a dez)

• **Itens individuais** (X para sim): () Faltou; () Chegou atrasado; () Saiu mais cedo; () Não trouxe o material de consulta; () Chamou o professor sem consentimento do grupo; () Atrapalhou o rendimento do grupo; () Não conhecia ou desrespeitou o contrato de trabalho; () Falta de comprometimento com a aprendizagem.

• **Itens do grupo:** (marcar a quantidade de ocorrências ou X para sim): () Nem todos os membros sabiam perguntar ou explicar o que já haviam feito; () Não aguardaram a sua vez de atendimento; () Trabalho feito de forma individual; () Algum componente está atrasado ou adiantado em relação ao grupo; () Consultaram a ficha resposta antes de finalizar a atividade;

() **Tempo de efetivo trabalho (medido em horas).**

A. Sabemos que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}$ é um dos limites fundamentais. Abaixo é feita a demonstração

desse limite, porém foi/foram cometido(s) erro(s) na resolução. Identifique-o(s) e resolva corretamente, apresentando uma representação gráfica de acordo com o que é demonstrado.

Primeiro tentamos a substituição direta, mas encontramos uma indeterminação, assim, teremos que resolver considerando um círculo trigonométrico de raio 1, centrado na origem de um sistema de eixos coordenados xy, abaixo representado por AOP.

Com isso sabemos:

$$PQ = \sin x$$

$$OP = \cos x$$

$$AT = \tan x$$

$$OA = 1 = \text{medida do raio}$$

$$\text{Arco AP} = x \text{ (medida do arco em radianos)}$$

Podemos observar que a área do triângulo OAP é maior do que a área do triângulo OAT, que, por sua vez, é maior do que a área do setor circular OAP. Logo:

$$\frac{OAPQ}{2} \geq \frac{OA \cdot AT}{2} \geq \frac{OA \cdot AP}{2}, \text{ multiplicando por 2 e substituindo pelas igualdades destacadas}$$

acima:

$$1 \cdot \sin x \leq 1 \cdot \tan x \leq 1 \cdot x$$

$\sin x \leq \tan x \leq x$, dividindo por $\sin x$ (já que neste intervalo $\sin x$ é diferente de zero)

$$\frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x}$$

$$1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \frac{1}{\sin x}, \text{ tomando o inverso das desigualdades:}$$

$$1 \geq \cos x \geq \frac{x}{\sin x}, \text{ calculando o limite das desigualdades:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \text{ o que mostra que: } 1 \geq \cos 0 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}. \text{ Logo?}$$

B. Resolva os seguintes limites, destacando as propriedades ou limites notáveis utilizados em cada etapa:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + 1}{2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 x}{x^2}$ (usem uma identidade trigonométrica)

C. O Agiota de Roma¹⁰

¹⁰ Adaptado de POMMER (2006).

Um agiota empresta 1 dinar¹¹ a juros de 100% ao ano a uma pessoa. Ao final de um ano, a pessoa encontra o agiota, devolvendo $1 + 1 = 2$ dinares. O agiota, achando injusta tal situação, argumenta que tal valor é incorreto, afirmando que: Se dividirmos o ano em dois semestres, deveria pagar, depois de seis meses, a quantia de 1 dinar + 50% de 1 dinar = 1,5 dinares. Em mais um semestre, o montante devido se comporia em: 1,5 dinar + 50% de 1,5 dinar = 2,25 dinares.

O agiota continua argumentando que, se o ano fosse subdividido em 4 trimestres, o valor devido ao final de cada trimestre, seria outro.

1. Com base nisso, determine uma função que estabeleça uma relação entre o montante final devido e o período de capitalização (mensal, diário, ...).
2. Qual o limite dessa função quando o período de capitalização tende a zero, ou seja, o número de períodos cresce indefinidamente?
3. Faça o gráfico.

¹¹ A palavra ‘dinar’ deriva de denário, uma moeda romana. Atualmente, é a moeda nacional de vários países pertencentes ao extinto Império Otomano. (POMMER, 2010, p. 5).

FICHA DE SUGESTÕES 6 – Propriedades e Limites Notáveis

Propriedades dos limites

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções para as quais $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ e k um número real:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L_1$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L_1^n$, $n \in \mathbb{N}$
6. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$
7. $\lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = \ln L_1$ se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, considerando $\ln$ o logaritmo neperiano.
8. $\lim_{x \rightarrow a} (\cos f(x)) = \cos \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = \cos L_1$ Observação: o mesmo vale o seno.
9. $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = e^{L_1}$
10. O limite de uma função polinomial inteira, $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, quando $x \rightarrow \pm\infty$ é igual ao limite de seu termo de maior grau.

Todas essas propriedades podem ser demonstradas pela definição de limite. Abaixo temos a demonstração da propriedade da soma:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$$

Pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Usando a desigualdade triangular, podemos escrever:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \quad (1)$$

Como por hipótese $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então devemos ter para qualquer $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ (lembre-se pode ser qualquer valor) um $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_1$$

Analogamente, uma vez que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, para qualquer $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, deve existir $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Como obtivemos δ_1 e δ_2 , podemos considerar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então teremos

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Pela desigualdade triangular (1), podemos escrever:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ o que mostra que existe } \varepsilon > 0, \text{ tal que}$$

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Limites Notáveis

Além das propriedades, existem alguns limites que ocorrem com mais frequência e tem resultados que podem ser generalizados, assim, apresentamos alguns abaixo:

1. $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ onde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ onde e é o número irracional de Euler (número neperiano) que vale aproximadamente 2,718. Esse é o limite que foi utilizado na ficha 1, para calcular os juros de forma contínua.

FICHA DE RESPOSTAS 6 – Propriedades e Limites Notáveis

Item A: Devemos provar que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} = 1$.

Primeiro tentamos a substituição direta, mas encontramos uma indeterminação, assim, teremos que resolver considerando um círculo trigonométrico de raio 1, centrado na origem de um sistema de eixos coordenados xy , abaixo representado por AOP.

Com isso sabemos:

$$PQ = \sin x$$

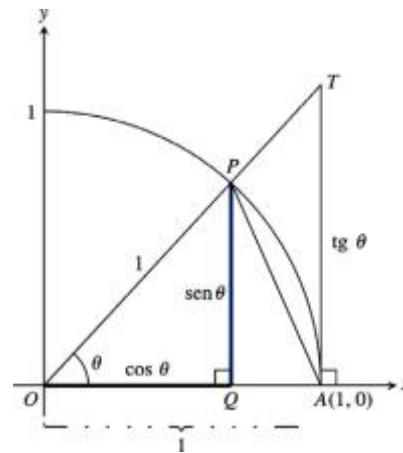
$$OP = \cos x$$

$$AT = \text{tg } x$$

$$OA = 1 = \text{medida do raio}$$

$$\text{Arco AP} = x \text{ (medida do arco em radianos)}$$

Podemos observar, pela figura que a área do triângulo OAP é menor do que a área do setor circular OAP que, por sua vez, é menor do que a área do triângulo OAT.



$\text{área}\Delta OAP \leq \text{área}\widehat{OAP} \leq \text{área}\Delta OAT$, logo:

$\frac{OA \cdot PQ}{2} \leq \frac{OA \cdot \widehat{AP}}{2} \leq \frac{OA \cdot AT}{2}$, multiplicando por 2 e substituindo pelas igualdades destacadas acima:

$$1 \cdot \sin x \leq 1 \cdot x \leq 1 \cdot \tan x$$

$\sin x \leq x \leq \tan x$, dividindo por $\sin x$ (já que neste intervalo $\sin x$ é diferente de zero)

$$\frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \text{ tomando o inverso das desigualdades:}$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x, \text{ calculando o limite das desigualdades:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \text{ o que mostra que: } 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq \cos 0. \text{ Logo:}$$

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1, \text{ assim:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Item B: Resolva os seguintes limites, destacando as propriedades ou limites notáveis utilizados em cada etapa:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$, se substituirmos direto, chegaremos em: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = 1^\infty$ que é uma indeterminação. Para conseguir calcular podemos usar a substituição de variável, assim, $y = \frac{1}{x}$, o que faz com que $y \rightarrow +\infty$. O limite fica: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$.

Aparentemente não facilitou o cálculo, mas se lembrarmos dos limites fundamentais, podemos

aplica-lo, então: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + 1}{2x}$, pela substituição direta chegamos a uma indeterminação, assim, devemos ver

que ele é um limite fundamental, podendo ser reescrito como $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \frac{(e^x - 1)}{x}$, ou seja,

$$-\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x}, \text{ assim: } -\frac{1}{2} \cdot \ln e = -\frac{1}{2}.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 3x}{\text{sen} 5x}$, queremos escrever esse limite de modo que possamos usar $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u}$, assim

vamos multiplicar o numerador por $3/3x$ e o denominador por $5/5x$, o que mantém a

equivalência visto que $\frac{3/3x}{5/5x} = \frac{3}{3x} \cdot \frac{5x}{5} = 1$, assim: $\frac{\text{sen} 3x}{\text{sen} 5x} = \frac{3 \left(\frac{\text{sen} 3x}{3x} \right)}{5 \left(\frac{\text{sen} 5x}{5x} \right)}$, agora quando x

tende a zero, $3x$ e $5x$ também tenderão, logo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 3x}{\text{sen} 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \left(\frac{\text{sen} 3x}{3x} \right)}{5 \left(\frac{\text{sen} 5x}{5x} \right)} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\text{sen} x}$, aplicando a substituição direta chegamos a uma indeterminação, assim,

podemos dividir numerador e denominador por x , obtendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\text{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x}}{\frac{\text{sen} x}{x}}, \text{ assim, podemos aplicar dois limites fundamentais, fazendo:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\text{sen} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

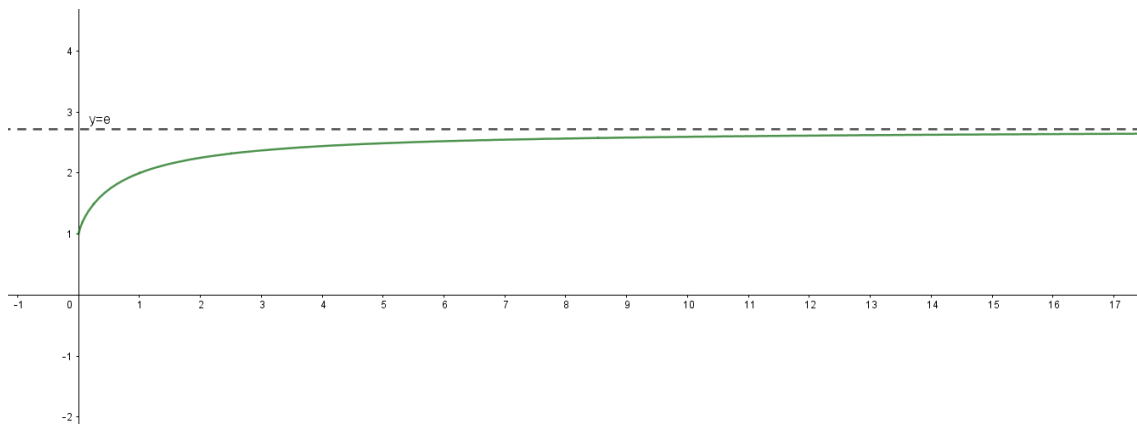
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 x}{x^2}$, usando a identidade trigonométrica $\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$, teremos:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cos^2 x}$, podemos reescrever em partes:

$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x}$, assim:

$$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Item C: igual a *ficha 1*. A função é $M(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$. O limite dessa função é o limite fundamental da questão anterior (item B, questão 1). Assim: $\lim_{n \rightarrow +\infty} M(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Graficamente, apenas a parte positiva ($n > 0$).



→ Ficha de Trabalho 7

Conteúdos abordados: Continuidade de funções de uma variável, definição de continuidade, propriedades das funções contínuas, tipos de descontinuidade, continuidade em intervalos, teorema do Valor Intermediário.

Objetivos: Entender a continuidade de funções; Definir se funções são contínuas em um ponto; Classificar a descontinuidade das funções; Definir e aplicar a continuidade em intervalos; Aplicar as propriedades das funções contínuas em exemplos; Entender o Teorema do Valor Intermediário.

FT7 – Continuidade

Equipe:

Estudante avaliado: _____; Estudante 2: _____;

Estudante 3: _____; Estudante 4: _____.

Peso do dia: _____ (de zero a 50%)

NOTA: _____ (de zero a dez)

• **Itens individuais** (X para sim): () Faltou; () Chegou atrasado; () Saiu mais cedo; () Não trouxe o material de consulta; () Chamou o professor sem consentimento do grupo; () Atrapalhou o rendimento do grupo; () Não conhecia ou desrespeitou o contrato de trabalho; () Falta de comprometimento com a aprendizagem.

• **Itens do grupo:** (marcar a quantidade de ocorrências ou X para sim): () Nem todos os membros sabiam perguntar ou explicar o que já haviam feito; () Não aguardaram a sua vez de atendimento; () Trabalho feito de forma individual; () Algum componente está atrasado ou adiantado em relação ao grupo; () Consultaram a ficha resposta antes de finalizar a atividade;

() **Tempo de efetivo trabalho (medido em horas).**

Nas fichas anteriores vimos que para calcular o limite de algumas funções bastava calcular a imagem ($f(a)$) de a , ou seja, mantinham a propriedade $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Quando isso ocorre dizemos que a função é contínua no ponto a . Segundo Stewart (2006), o termo continuidade de funções quer dizer que não sofrem interrupções, é um processo contínuo. A definição é: Uma função f é contínua em um ponto a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Quando não ocorre isso, dizemos que a função é descontínua no ponto a .

Com base nisso e na ficha de sugestões, determine o que se pede:

A. Considere as funções abaixo, dadas nas formas algébrica ou gráfica. Determine, caso existam, os pontos de descontinuidade, classificando-os conforme os tipos. Grafique de 1 a 5.

1. $f(x) = x^2 + 9$

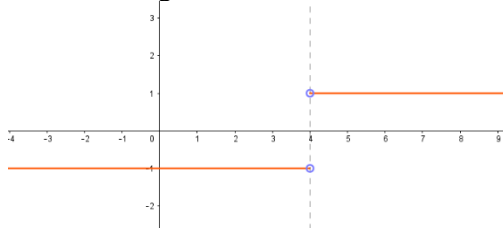
2. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

3. $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$

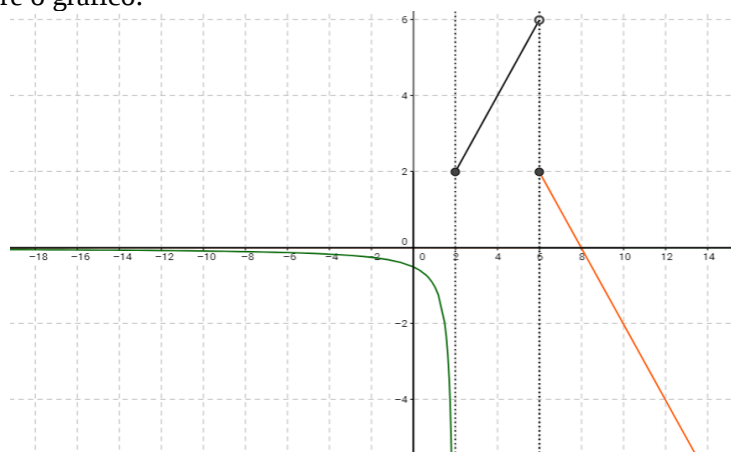
4. $f(x) = |x|$

5. $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x < 1 \\ 4-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

6. Considere o gráfico abaixo:

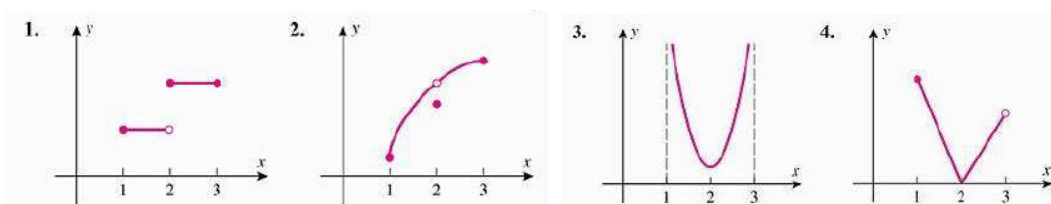


7. Considere o gráfico:



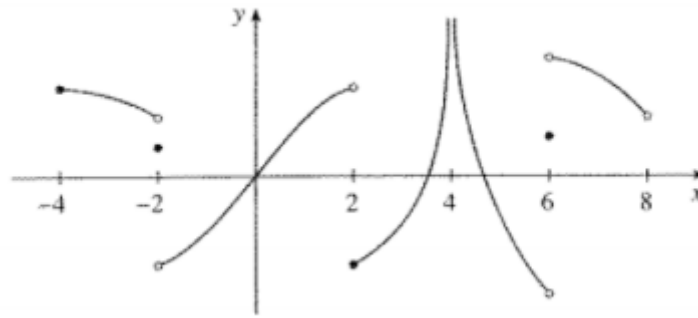
B.

1. Considere os gráficos abaixo, determine o intervalo que as funções estão definidas, e se são contínuas nesse intervalo. Caso não sejam contínuas, determine quais as condições que não são satisfeitas.



Fonte: ANTON, 2005, p. 144.

2. Estabeleça em quais intervalos f é contínua.



C. Aplicando as propriedades das funções contínuas, determine o que se pede.

1. Suponha que f e g sejam funções contínuas, tais que $f(2)=1$ e $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 4g(x)] = 13$.

Determine $g(2)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

2. Suponha que f e g sejam funções contínuas, tais que $f(3)=-2$ e $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$. Encontre

$\lim_{x \rightarrow 3} [f(x)/g(x)]$

D. Diversos autores de livros de CDI apontam um importante teorema como consequência direta da existência de funções contínuas em um intervalo fechado $[a,b]$. Qual é esse teorema? Qual a importância dele? Exemplifique.

FICHA DE SUGESTÕES 7 – Continuidade

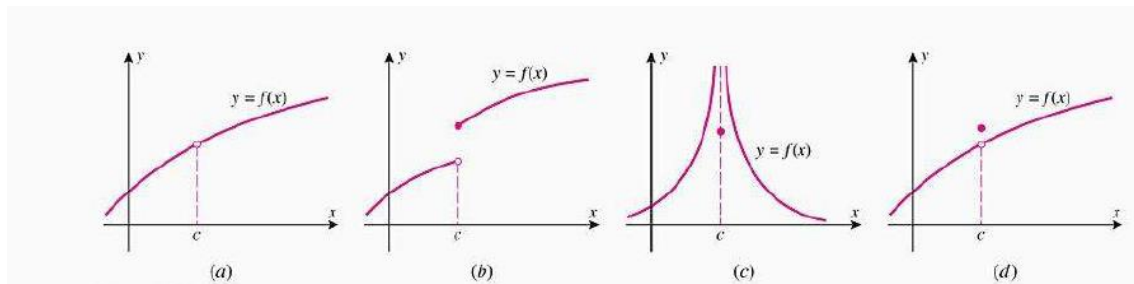
A. Existem três condições que devem ser satisfeitas para a função ser contínua em um ponto c :

1ª: a função deve ser definida em $f(c)$, isto é, c deve pertencer ao domínio de f .

2ª: $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ deve existir, ou seja, os limites laterais quando x tende a c devem ser iguais.

3ª: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, o limite de f , quando x tende a c , deve ser igual ao valor $f(c)$.

Abaixo temos alguns exemplos de funções que tem algum ponto de descontinuidade:



Fonte: ANTON, 2005, p. 144.

A função representada no gráfico (a) é descontinua no ponto c pois não satisfaz a condição 1ª, ou seja, a função não é definida em c . O item (b) representa uma função descontinua em c pois os limites laterais são diferentes, ou seja, o limite quando x tende a c não existe (condição 2ª). Os itens (c) e (d) violam a 3ª condição, pois o limite quando x tende a c é diferente do valor $f(c)$.

B. Tipos de Descontinuidade: considere que estejamos analisando a continuidade da função f no ponto c .

Removível: é assim chamada quando o limite de f , quando x tende a c , existe, mas é diferente de $f(c)$. Assim: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, com $L \neq f(c)$. Um exemplo desse tipo de descontinuidade é apresentado nos itens (a) e (d) acima.

De salto (ou de primeira espécie): é assim chamada quando os limites laterais de f , quando x tende a c , existem, mas são diferentes, ou seja, o limite não existe. Assim: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_2$, com $L_1 \neq L_2$. O item (b) acima é desse tipo.

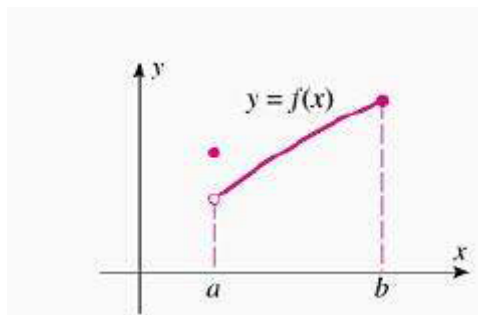
Infinita (ou de segunda espécie): é assim chamada quando o limite de f , quando x tende a c , é $\pm \infty$. O item (c) acima é desse tipo.

C. Continuidade em Intervalos

Se uma função f for contínua em cada ponto do intervalo aberto (a,b) , então dizemos que f é contínua em (a,b) . Essa definição se aplica para intervalos abertos da forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e $(-\infty, +\infty)$. No último caso, dizemos que f é contínua em toda parte (ANTON, 2005, p. 144).

Em relação aos intervalos fechados $[a,b]$, devemos tomar cuidado na análise da continuidade nos extremos desse intervalo. Assim, analisamos a continuidade à esquerda e à direita. Logo uma função f definida em $[a,b]$ é contínua no seu extremo esquerdo (no ponto a) se o limite à direita

de a existir e for igual a $f(a)$: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. De modo análogo, a função é contínua no seu extremo direito (no ponto b) se o limite à esquerda de b existir e for igual a $f(b)$: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$. O gráfico abaixo mostra uma função f definida em um intervalo fechado $[a, b]$, perceba que é contínua no ponto b (extremo à direita), pois $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$. Porém, não é contínua no ponto a (extremo à esquerda), pois $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$.



Fonte: ANTON, 2005, p. 146.

Assim, uma função é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, se:

1. For contínua no intervalo aberto (a, b) ;
2. For contínua a direita de a ;
3. For contínua a esquerda de b .

D. Propriedades das funções contínuas

Considere que a função $f(x)$ e a função $g(x)$ sejam contínuas em um ponto c , então:

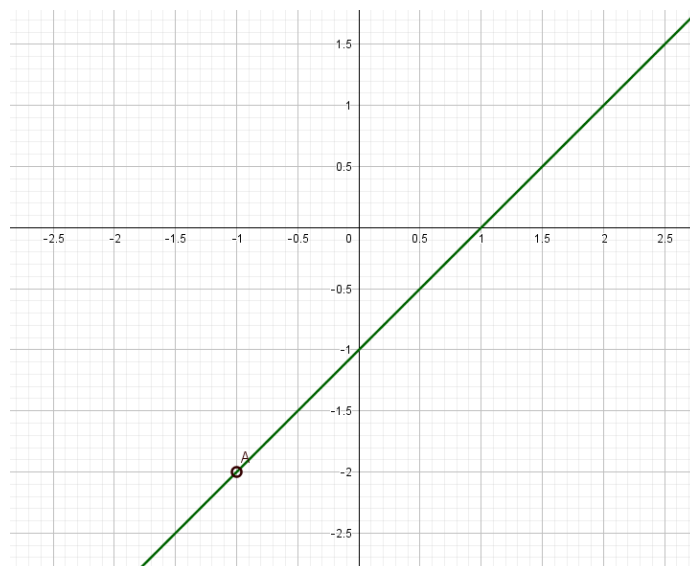
1. $f(x) + g(x)$ (ou $f(x) - g(x)$) é contínua em c .
2. $f(x) \cdot g(x)$ é contínua em c .
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em c se $g(c) \neq 0$ e tem uma descontinuidade em c se $g(c) = 0$.
4. Se a função g for contínua no ponto c e a função f for contínua no ponto $g(c)$, então a composição $f \circ g$ é contínua em c .
5. Se a função g for contínua em toda parte e a função f for contínua em toda parte, então a composição $f \circ g$ é contínua em toda parte.

Observações: Toda função polinomial é contínua e toda função racional é contínua no seu domínio e descontínua nos pontos que anulam o denominador. Teoremas provam isto.

Exemplo 1: Perceba o limite $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, $x \neq -1$. Para resolvê-lo

podemos fatorar o numerador e assim: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2$.

A função é contínua em todo o domínio real, menos no ponto $x = -1$, pois a função não está definida para $f(-1)$. Nesse caso o tipo de descontinuidade é removível. Veja o gráfico abaixo, o ponto A é o ponto de descontinuidade.



Exemplo 2: Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $x \neq 3$ e considere $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

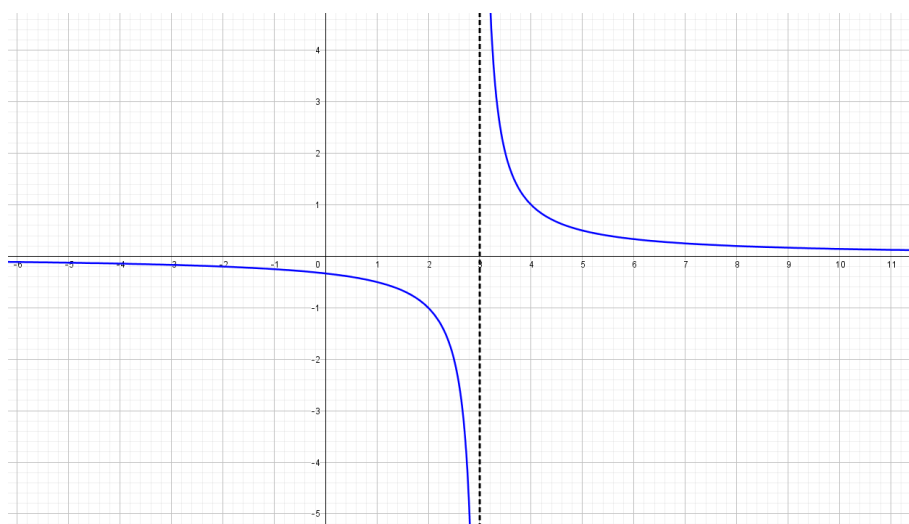
Para essa função, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(3-h)-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(3+h)-3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty$$

Logo $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe.

A descontinuidade é do tipo infinita.



FICHA DE RESPOSTAS 7 – Continuidade

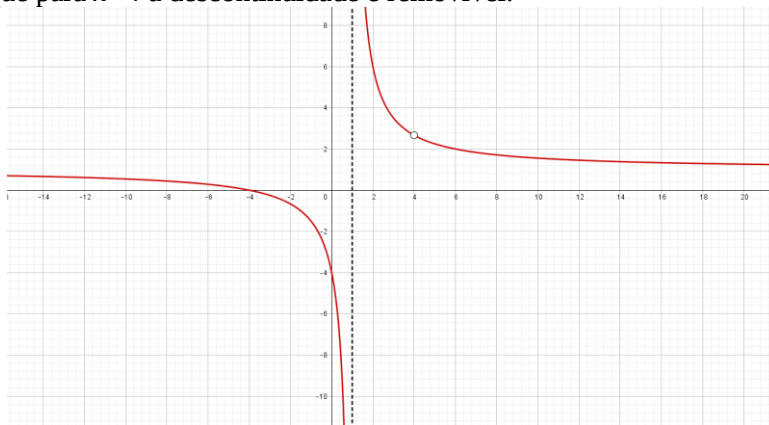
A. Seguem:

1. $f(x) = x^2 + 9$, é contínua para todo o conjunto Real, pois é uma função polinomial. Gráfico a cargo do leitor.

2. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

Nesse caso, como se trata de uma função racional, devemos buscar os valores que zeram o denominador, com isso encontramos $x=1$ e $x=4$. Logo a função é contínua para $\mathbb{R} - \{1, 4\}$. Para classificar cada um dos tipos de descontinuidade, deveremos considerar o gráfico da função, ou calcular o limite quando x tende a 1 e depois 4, assim: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x-1} = \frac{5}{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)}$, o que dependerá se o limite é a esquerda ou a direita de 1, assim concluímos que $\frac{5}{\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)} = -\infty$ e $\frac{5}{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)} = +\infty$. Logo em $x=1$ a descontinuidade é infinita.

Agora calculando o limite quando x tende para 4: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-1} = \frac{8}{3}$, o que mostra que para $x=4$ a descontinuidade é removível.



3. $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$

Como é uma função racional, sabemos que é descontínua em $x=2$, porém por conta do módulo deveremos olhar com mais atenção o que acontece com o limite de f quando x tende a 2.

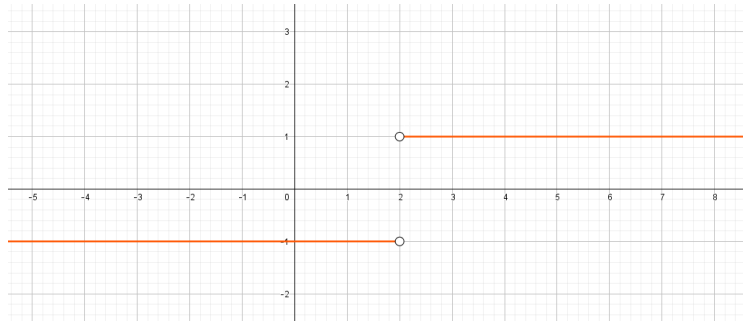
Assim, com auxílio do limite lateral, para valores maiores do que 2, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1$$

Já para valores menores do que 2, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -1 = -1$$

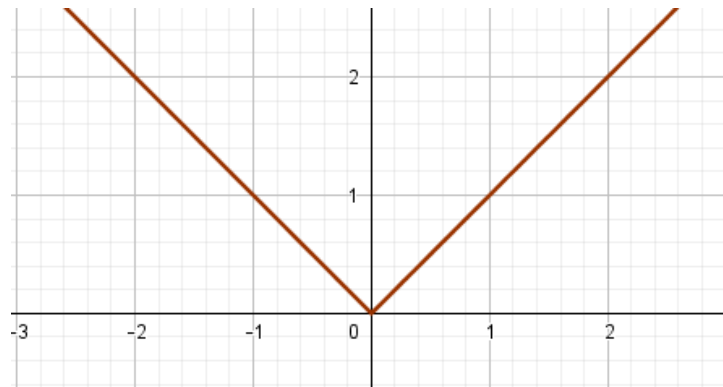
Como os limites laterais são diferentes temos uma descontinuidade do tipo em salto em $x=2$.



4. $f(x) = |x|$

Aparentemente não existem valores para os quais a função modular não esteja definida, porém devemos nos atentar ao o que ocorre quando x se aproxima de zero pela esquerda e pela direita. Assim:

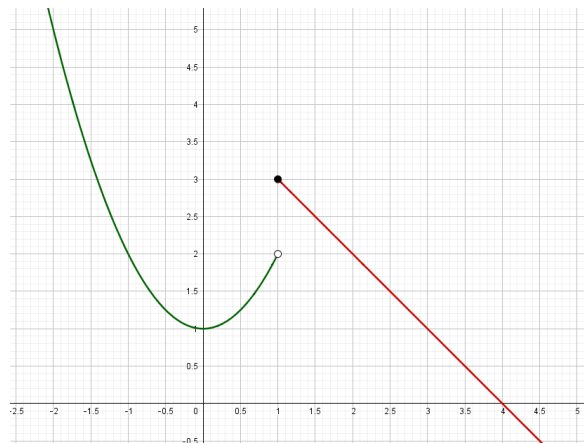
$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$, como os limites laterais são iguais o limite existe e, além disso, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = f(0) = 0$. A função é contínua em todo intervalo real.



5. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x < 1 \\ 4 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Devemos calcular o limite quando x tende a 1. Assim:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4 - x = 4 - 1 = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + x^2 = 1 + 1^2 = 2$, o limite no ponto não existe, pois os limites laterais são distintos. Assim, temos uma descontinuidade em salto no ponto $x=1$.



6. A função é descontínua em $x=4$, o tipo da descontinuidade é em salto, pois os limites laterais existem, porém são distintos.
7. Nesse caso, temos que analisar dois pontos, $x=2$ e $x=6$. Em $x=2$ temos uma descontinuidade do tipo infinita, já em $x=6$ a descontinuidade é de salto. A função é contínua em $\mathbb{R} - \{2,6\}$.

B. Seguem as questões com base nos gráficos.

1.

1.1 A função está definida no intervalo $[1,3]$, porém apresenta uma descontinuidade em salto para $x=2$, pois os limites laterais existem, mas são diferentes. A função é contínua nos extremos do intervalo. Assim f é contínua em $[1,3]$ para $x \neq 2$.

1.2. A função está definida no intervalo $[1,3]$, porém apresenta uma descontinuidade removível para $x=2$, pois o limite existe, mas é diferente de $f(2)$. A função é contínua nos extremos do intervalo. Assim f é contínua em $[1,3]$ para $x \neq 2$.

1.3. A função está definida no intervalo $(1,3)$ e é contínua no intervalo aberto. Apresentando uma descontinuidade infinita nos extremos, pois o limite quando x tende para 1 (pela direita) é infinito e quando x tende a 3 (pela esquerda) o limite também é infinito.

1.4. A função está definida no intervalo $[1,3)$. Analisando por partes concluímos que é contínua em $x=1$ (no intervalo), pois o limite a direita existe, bem como em todos os pontos do intervalo aberto $(1,3)$. Assim é contínua em $[1,3)$. Cuidado no intervalo fechado $[1,3]$ não é contínua em $x=3$ pois o limite lateral esquerdo é diferente de $f(3)$.

2. Estabeleça em quais intervalos f é contínua.

No intervalo $[-4,-2)$ é contínua

No intervalo $(-2, 2)$ é contínua.

No intervalo $[2, 6)$ é descontínua em $x=4$, do tipo infinita.

No intervalo $(6,8)$ é contínua.

Porém, quando consideramos os valores $x=-2$, $x=2$ e $x=6$, todos estes pontos apresentam descontinuidades do tipo removível, dentro dos intervalos.

C. Aplicando as propriedades das funções contínuas, determine o que se pede.

1. Suponha que f e g sejam funções contínuas, tais que $f(2)=1$ e $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 4g(x)] = 13$. Determine $g(2)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

Inicialmente pela propriedade dos limites, podemos escrever:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} 4g(x) = 13$$

Como as funções são contínuas, temos que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1$, assim:

$$1 + \lim_{x \rightarrow 2} 4g(x) = 13 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} 4g(x) = 12$$

Pela propriedade dos limites temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 4g(x) = 12 \rightarrow 4 \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 12 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$$

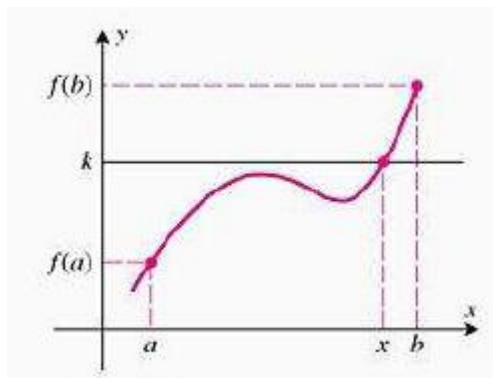
Novamente pela definição de funções contínuas temos que $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 3$.

2. Suponha que f e g sejam funções contínuas, tais que $f(3)=-2$ e $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$. Encontre

$$\lim_{x \rightarrow 3} [f(x)/g(x)].$$

Conforme acima, temos que $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x)/g(x)] = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3} g(x)} = \frac{-2}{5}$

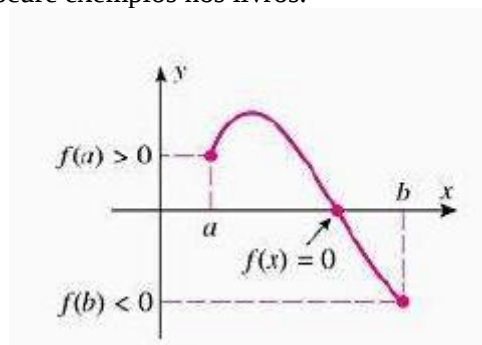
D. Espera-se que o grupo perceba, com consultas aos livros-texto de CDI, que nos referimos ao Teorema do Valor Intermediário. Esse teorema é assim enunciado: Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e k um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$ (inclusive os próprios extremos), então existe no mínimo um número x no intervalo $[a,b]$, tal que $f(x)=k$. Isso quer dizer que, numericamente, a função contínua no intervalo $[a,b]$ assume todos os valores k entre $f(a)$ e $f(b)$, pelo menos uma vez, a medida que x percorre o intervalo $[a,b]$. O gráfico segue abaixo:



Fonte: ANTON, 2005, p. 149.

Observe que isso só é garantido se a função for contínua. Uma importância consequência desse Teorema é o Teorema de Bolzano (ou do Anulamento), ele é assim enunciado: se f for uma função contínua em $[a,b]$, e se $f(a)$ e $f(b)$ forem diferentes de zero com sinais opostos, então existe, no mínimo, uma solução para a equação $f(x)=0$ no intervalo (a,b) .

Esse fato que é ilustrado na figura abaixo, serve para determinar se uma função possui zeros dentro de um intervalo. Procure exemplos nos livros.



Fonte: ANTON, 2005, p. 149.

Capítulo IV – Avaliação na Proposta da AS

Após a aplicação de todas as fichas de trabalho, é momento de realizar a avaliação escrita, com critérios próprios a AS. A avaliação que propusemos é composta por 8 questões, sendo seis questões individuais com peso de 75% e duas questões no grupo de trabalho valendo 25%. As questões/problemas devem ser relacionadas aos conteúdos abordados durante o período de estudos, com consulta ao material do aluno – FT, ficha de sugestões e de respostas. Para cada duas questões é disponibilizado o tempo de uma hora/aula, sendo que ao final desse tempo, os alunos devem entrega-las. Na última hora são feitas as duas questões nos grupos de trabalho. No total, a prova tem duração de quatro horas/aula (BALDINO, 2001).

Após a aplicação e correção, a média e o desvio-padrão das notas é divulgado para a turma, explicando o critério de correção de cada questão – o que se considerou correto, por exemplo. Neste momento, sem a divulgação das notas individuais, a turma, em plenária, discute a avaliação, podendo alterar o que foi considerado – certo ou errado – na correção do professor, como explica Baldino “Se necessário, o critério pode ser alterado, alguma questão pode ser anulada ou, mesmo, a própria prova pode ser anulada” (BALDINO, 2001, p. 14). Em seguida, de forma democrática, é votada se a prova ou suas alterações serão aceitas.

Além disso, cada estudante tem a oportunidade de decisão individual, no que tange a anulação da prova. Sobre isso, é importante ressaltar: após a votação do grupão, a única decisão individual possível é a anulação da prova, caso tenha sido aceita pela maioria. Esse direito é estendido aos alunos que não fizeram a avaliação. Apenas após esse momento a avaliação é entregue aos alunos. Como recomendação de Baldino, caso a maioria tenha votado pela anulação da prova, o professor deve pensar em estratégias para realização de uma nova avaliação. Porém, caso apenas alguns alunos a tenham recusado, a próxima avaliação da disciplina pode ter sua nota destinada a substituição da prova recusada, haja vista a dependência dos conteúdos do CDI (cf. BALDINO, 2001). Entretanto, acreditamos que essa decisão também possa ser discutida em plenária, de acordo com a disponibilidade do professor.

A seguir apresentamos uma proposta de avaliação com o gabarito. Caso o professor julgue necessário, pode alterar as questões/problemas, desde que preservados os critérios da AS.

AVALIAÇÃO SOBRE LIMITES E CONTINUIDADE

Estudante: _____ **Data:** _____

Instruções e informações:

Cada questão tem peso de 12,5%. As seis questões iniciais são individuais, com consulta ao material do aluno – fichas de trabalho, de sugestões e de respostas – e uso de calculadora, não será permitido o uso de outros materiais, nem aparelhos eletrônicos. As duas últimas questões são feitas no grupo de trabalho, também com consulta.

O tempo de prova é de 4 horas/aula, sendo que as questões serão entregues de duas em duas, com o tempo máximo de 1 hora/aula. Após o tempo de 1 hora/aula o aluno deverá entregar as duas questões ao professor. Caso finalize antes do tempo máximo, poderá entrega-las e iniciar a etapa seguinte da prova, não podendo voltar nas questões já entregues. O grupo de trabalho só poderá iniciar as questões quando todos integrantes finalizarem a parte individual.

O critério de correção de cada questão será explicado a turma na devolução da avaliação.

Etapa 1

1ª Questão. Represente o gráfico de uma função f que satisfaça simultaneamente todas as condições abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

E ainda, caso exista(m) ponto(s) de descontinuidade no gráfico de f , identifique e classifique-os.

Gabarito: Um dos possíveis gráfico é este:



Nesse caso, apresenta descontinuidade infinita em $x=0$ e de salto em $x=2$.

2ª Questão. Use a definição formal de limites para encontrar uma relação entre ε e δ , provando que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$

Gabarito: Usando inequações, temos por definição que: $|x^2 - 3 - 1| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 2| < \delta$, o que resulta em:

$|x^2 - 4| < \varepsilon \rightarrow x^2 - 4 < \varepsilon$ ou $x^2 - 4 > -\varepsilon$. Resolvendo as duas inequações quadráticas, teremos como resultados:

1º caso: $x \in (-\sqrt{4 + \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}), \varepsilon > 0$

2º caso: $x \in (-\infty, -\sqrt{4 - \varepsilon}) \cup (\sqrt{4 - \varepsilon}, +\infty), / 0 < \varepsilon < 4$

Verificando a interseção entre as respostas, chegamos em:

$x \in (\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon})$, visto que pertence a esse intervalo.

Assim, podemos escrever que

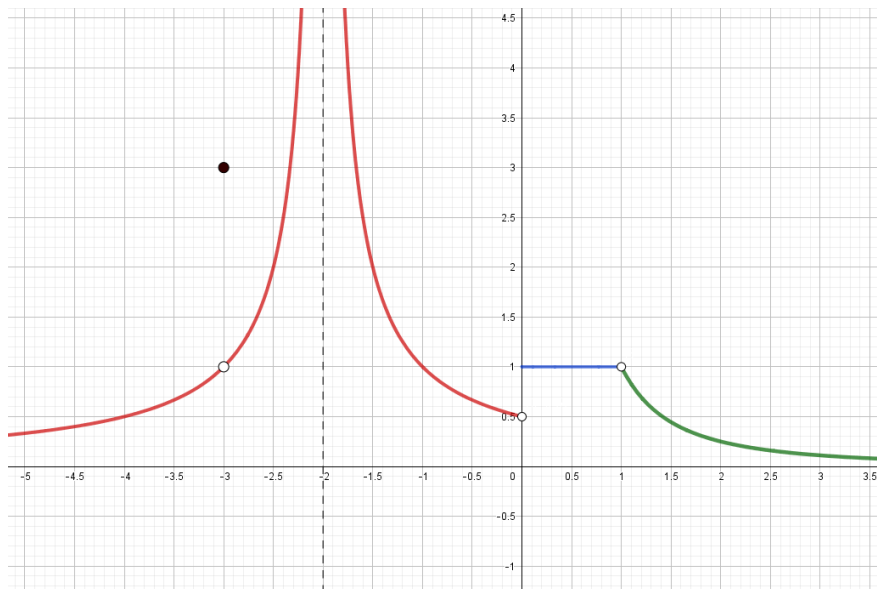
$\sqrt{4 - \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon}$, subtraindo 2 na desigualdade:

$\sqrt{4 - \varepsilon} - 2 < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$, concluímos que:

$\delta = \min\{|\sqrt{4 - \varepsilon} - 2|, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\}$, c.q.d.

Etapa 2. Estudante: _____

3ª Questão. Abaixo é apresentado o gráfico da função g . Caso existam, determine os pontos de descontinuidade, classificando-os. Justifique sua resposta, em cada caso, com base na definição de continuidade.



Gabarito:

$x = -2$ descontinuidade do tipo infinita (limite de g quando x tende a -2 é infinito)
 $x = 0$ descontinuidade do tipo salto (limites laterais existem, porém, são distintos)
 $x = -3$ e $x = 1$ descontinuidades do tipo removível (limite no ponto existe, mas é diferente da imagem).

4ª Questão. Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar os cristais utilizados em componentes eletrônicos para veículos espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura deve ser controlada precisamente, ajustando-se a entrada da potência. Suponha que a relação seja dada por $T(\varpi) = 0,1\varpi^2 + 2,155\varpi + 20$, onde T é a temperatura em graus Celsius e ϖ é a potência de entrada em watts.

- Qual a potência necessária para manter a temperatura a 200°C ?
- Se for permitida uma variação de $\pm 1^\circ\text{C}$ a partir dos 200°C , qual será a imagem da potência permitida para a entrada?
- Em termos da definição ε, δ de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, o que é x ? O que é $f(x)$? O que é a ? O que é L ? Qual o valor de ε dado? Qual o valor correspondente de δ ?

(STEWART, 2006, p. 123).

Gabarito:

- $\varpi = 33$ watts, aproximadamente.
- A imagem da potência em watts estará no intervalo $[32.88, 33.11]$, enquanto que a temperatura em graus Celsius estará no intervalo $[199, 201]$.
- x representa a potência em watts, $f(x)$ representa a temperatura em $^{\circ}\text{C}$ em função da potência, a representa o valor “ideal” da potência para manter a temperatura em 200°C , ou seja, vale, aproximadamente 33watts, L representa o valor “ideal” da temperatura que nesse caso seria 200°C , o valor de ϵ é 1°C , para mais ou para menos, o valor de δ correspondente é de, aproximadamente 0,12watts.

Etapa 3. Estudante: _____

5ª Questão. Calcule os limites, usando limite notável, quando possível.

OBS.: Não será considerada resolução se a regra de L'Hopital for utilizada, resolva passo a passo.

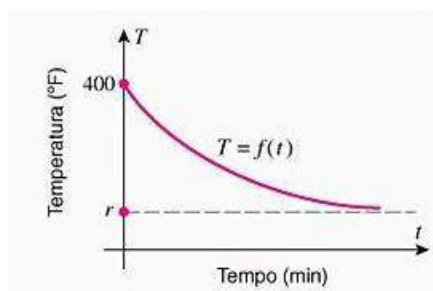
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - e^{-x}}$

Gabarito:

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(x^2+9)}{(2x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x^2+9)}{2x+1} = \frac{108}{7}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin(2x)}{2x}}{\frac{e^x - e^{-x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{2x}}{\frac{e^x(e^{2x} - 1)}{2x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)}{2x}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$

6ª Questão. Seja $T = f(t)$ a temperatura de uma batata cozida t minutos depois de retirada de um forno quente. A figura abaixo mostra a curva da temperatura em função do tempo, onde r denota a temperatura ambiente.

- Qual é o significado físico de $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$?
- Qual é o significado físico de $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$?



(ANTON, 2005, p. 132).

Gabarito:

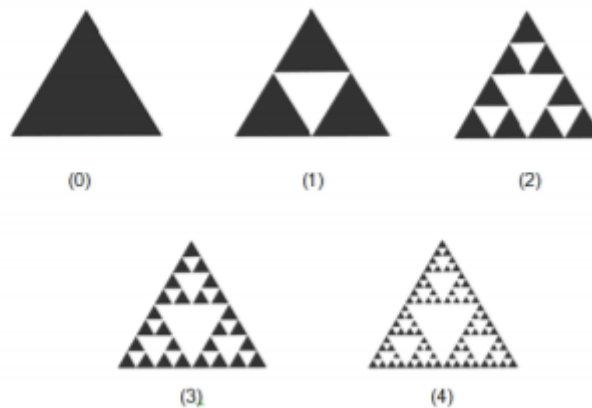
- Esse limite significa que no momento em que a batata é retirada do forno ela está com a temperatura de 400°F.
- Significa, de acordo com a Lei de Resfriamento de Newton, que a batata atingirá a temperatura ambiente – não ultrapassando este valor.

Etapa 4. Integrantes do Grupo: _____

7ª Questão. Na FT1 havia um problema sobre o Tapete de Sierpinski. Assim, considerando a ideia de fractais, abaixo encontra-se o modelo de determinação do Triângulo de Sierpinski. Ele é formado a partir de um triângulo equilátero de lado l , cada triângulo retirado (parte branca) também é equilátero. Sabendo que a área de um triângulo equilátero é $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, determine o que se pede.

- Qual a área do triângulo nas iterações (0), (1), (2), (3), ... (10)?

- b. O que acontece com a área do Triângulo de Sierpinski quando o número de iterações aumenta indefinidamente? E com o perímetro? Justifique suas respostas.
- c. Encontre uma função relacionando a quantidade de iterações com a área do Triângulo de Sierpinski, considerando o lado constante.
- d. Calcule algebricamente o limite da área quando o número de iterações tende ao infinito.



Gabarito:

a. Área (zero iteração) = $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Área (1ª iteração) = $3 \frac{l^2\sqrt{3}}{16}$

Área (2ª iteração) = $9 \frac{l^2\sqrt{3}}{64}$

Área (3ª iteração) = $27 \frac{l^2\sqrt{3}}{256}$... encontramos um termo geral: $A = 3^n \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}$, onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Área (10ª iteração) = $59049 \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{11}}$

- b. Com o número de iterações tendendo ao infinito, percebemos que a área tende a zero. Porém, o perímetro do triângulo continua igual, ou seja, é constante.

c. A função é a encontrada no item “a”, assim: $A(n) = 3^n \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 0$

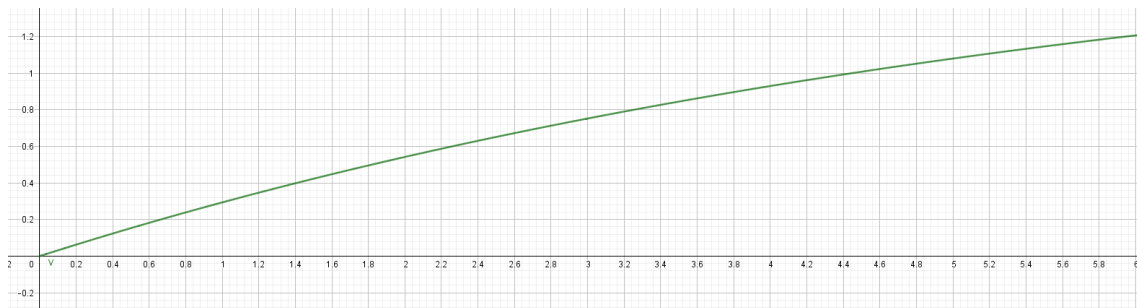
8ª Questão. Suponha que a velocidade v (em pés/s) de um paraquedista t segundos depois de saltar de um avião seja dada descrita pela função $v(t) = 190(1 - e^{-0,168t})$.

- Faça o gráfico dessa função.
- Calculando um limite apropriado, mostre que o gráfico da função $v(t)$ tem uma assíntota horizontal $v=c$ para uma constante c apropriada.
- Qual o significado físico da constante c encontrada anteriormente?

(ANTON, 2005, p. 133).

Gabarito:

- Segue o gráfico em escala, para melhor visualização:



- O limite é quando o tempo tende a infinito, assim, teremos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 190(1 - e^{-0,168t}) = 190, \text{ ou seja, } c = 190$$

- É a velocidade terminal do paraquedista.

Capítulo V – Considerações Gerais e Sugestões para Aplicação

Neste tópico temos como objetivo apresentar algumas sugestões ao professor que aplicar o guia em sala. Nesse sentido, trazemos uma planilha para organizar as notas dos estudantes, com a fórmula utilizada para cálculo da média. Além disso, caso o professor queira aplicar, sugerimos dois questionários: um inicial e um final, para recolher informações da turma e também suas opiniões sobre a AS. Por fim, trazemos algumas considerações finais.

→ Planilha de notas e fórmula para o cálculo

A planilha que sugerimos organiza todas as notas dos estudantes, para fácil compreensão. Vale lembrar que cada dia de aula na qual o professor utilizar uma ficha, é computada uma nota, assim como no Ensino Remedial. Ao final essas notas geram uma média que tem o peso igual a média dos pesos de cada aula. Como já mencionamos, a fórmula do cálculo da média pode ser alterada, desde que sejam consideradas todas as notas dos estudantes e o peso da AS. A fórmula, que já foi mostrada no contrato, está no quadro abaixo que é explicativo.

- Todas as notas serão dadas em uma escala de zero a dez;
- A nota final do período em que se trabalhar com a AS é a máxima entre a prova escrita (PE) e a média ponderada entre a nota da AS (NAS) com peso P e a nota da PE: **MÉDIA = MAX (PE; P.(NAS) + (1 – P).(PE))** ;
- Onde o peso P será feito pela média dos pesos atribuídos a cada aula pelos alunos;
- A nota da AS (NAS) será composta pela média entre as notas de cada aula (A1, A2, ...Ai) de i aulas de AS e as notas individuais (R1, R2, ...Rj) de cada encontro j do ER;
- O coeficiente de participação (CP) é sobre a participação do estudante no ensino remedial: 1 se participou; 0 se não participou;
- A nota da AS é calculada por:

$$NAS = \frac{\frac{A1 + A2 + A3 + \dots + Ai}{i} + CP \cdot \frac{R1 + R2 + R3 + \dots + Rj}{j}}{1 + CP}$$

A2,..B1,... A planilha abaixo é um exemplo de como computa-las.

Peso da AS por dia										média Pesos (P)	
LEGENDA:									Observação: Se alguma nota da AS for igual a zero, significa que o aluno faltou no respectivo dia.		
PE: prova escrita									O termo s/n (sem nota) significa que o aluno não veio ao ER.		
P: média dos pesos de cada aula de AS											
NAS: média da AS (média entre as notas de AS e do ensino remedial)											
CP: coeficiente de participação no ensino remedial ($1 = \text{sim}$; $0 = \text{não}$)											

→ *Questionário inicial*

Um desses dados é sobre a possibilidade de participação no Ensino Remedial.

todos os participantes.

Questionário

Aluno: _____
Curso: _____

1. Identificação do participante:

1.1. Idade: anos.

1.2. Você já cursou a disciplina de CDI I? () Sim () Não

Se respondeu sim para a pergunta anterior responda as perguntas 1.3 e 1.4:

1.3. Você reprovou em CDI I?
☐ Sim ☐ Não, cursei novamente CDI I, porque _____

1.4. Sua reprovação ocorreu por qual (is) motivo (s)?
☐ Frequência ☐ Nota ☐ Desistência ☐ Não reprovei

1.5. Você costuma chegar atrasado para as aulas de CDI I? () Não () Sim, por quê?

1.6. Você costuma sair antes do término da aula CDI I? () Não () Sim, por quê?

1.7. Você tem disponibilidade para participar de grupos de estudo no período vespertino? () Sim, nos dias (da semana): _____
() Não, por quê? _____

→ *Questionário final*

Além do questionário inicial, elencamos um questionário de satisfação em relação a AS. Essas perguntas são importantes tanto para analisar a postura dos estudantes durante a aplicação da AS, como a própria intervenção e postura do professor.

Questionário final sobre a aplicação da proposta baseada na Assimilação Solidária (AS)

Aluno (a): _____

1. Em relação a pedagogia adotada, você considera que ela foi:

() muito boa () boa () regular () ruim () muito ruim

Por quê? _____

2. Em relação ao estudo de Limites, sobre a sua aprendizagem, você considera que ela foi:

() muito boa () boa () regular () ruim () muito ruim

3. Em relação ao envolvimento dos indivíduos do seu grupo, ele foi:

() muito bom () bom () regular () ruim () muito ruim

4. Em relação ao seu envolvimento com o grupo, ele foi:

() muito bom () bom () regular () ruim () muito ruim

5. As fichas de trabalho, de sugestões e de respostas utilizadas durante as aulas, na sua opinião, quanto ao tipo de questões, conteúdo, formato e quantidade de questões, foram?

() muito boas () boas () regulares () ruins () muito ruins

6. Sobre a contribuição do Ensino Remedial para a sua aprendizagem, você considera que?

() contribuiu muito () contribuiu razoavelmente () contribuiu pouco () não contribuiu () atrapalhou a aprendizagem

() não participei, pois: _____

7. Use o verso da folha para fazer sugestões, elogios, críticas, comentários sobre a AS, as atividades realizadas e o Ensino Remedial.

→ *Teste sobre limites*

Além dos questionários, optamos por sugerir uma avaliação diagnóstica sobre limites. Essa avaliação pode ser utilizada no início da intervenção, servindo, entre outros motivos, para a divisão dos grupos.

Acreditamos que por se tratar de uma avaliação diagnóstica, não seja relevante atribuir uma nota pelas respostas dos estudantes. O que pode ser feito é relacionar as respostas dadas com conceitos: Entende a noção de limites, resolveu todos os itens de forma correta e com a simbologia adequada – conceito A; Entende a noção de limites, porém apenas de forma intuitiva, não domina a simbologia e linguagem formal – conceito B; Compreende alguns termos sobre limites, porém comete erros nas resoluções – conceito C; Ainda não desenvolveu a ideia de limites – conceito D. Assim, por meio dos resultados, o professor poderá dividir a sala em subgrupos – A, B, C e D – para serem formadas as equipes de trabalho.

Avaliação Diagnóstica

Aluno: _____ Conceito: _____

Responda as questões abaixo:

1. O que você entende por limite de uma função?

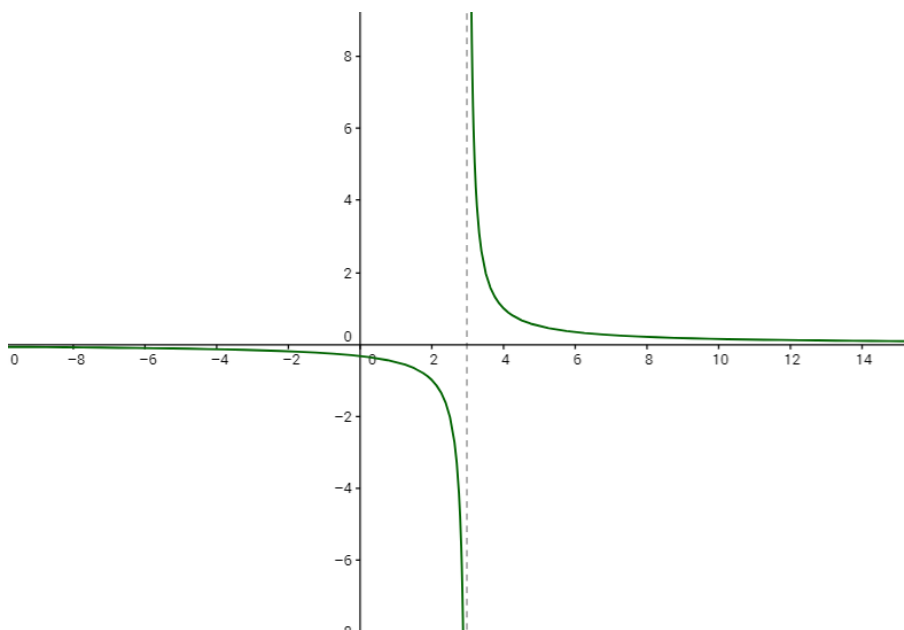
2. Explique o que você entende pela expressão “Um valor maior do que qualquer número positivo que exista”. Qual é esse número? Disserte sobre isso.

3. O que significa a expressão $n \rightarrow -\infty$ (n tendendo ao infinito negativo)? Você conhecia a notação simbólica?

4. Quantos números existem, considerando o conjunto dos números Reais, entre 0 e 1?

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Qual o domínio desta função? O que acontece com f (imagem da função) quando o valor de x se aproxima muito de zero?

6. Considere o gráfico da função g abaixo, com base nele, responda:



6.1. Qual a imagem da função quando x se torna um valor muito grande? E muito pequeno?

6.2. Você consegue localizar algum ponto para o qual a função g não esteja definida? Qual?

→ *Considerações finais*

Por fim, é importante ressaltar que na AS o processo de ensino e aprendizagem é desenvolvido com base nas regras do contrato de trabalho, que pode ser alterado pela maioria, mediante votação. Assim, o professor que aplicar essa proposta, deverá ter consciência de que a AS é um projeto político na sala de aula, no qual os alunos têm papel central. Além disso, a AS não permite ao professor uma análise quantitativa da aprendizagem, uma vez que cada um dos grupos terá desenvolvimento distinto. Logo, não se pode medir sua eficácia por meio de questões certas/erradas, mas pelo que cada grupo produziu.

Certamente a AS tem limitações, como citamos, em relação ao conhecimento matemático, no que tange sua aprendizagem. Possivelmente alguns alunos não alcançarão

os resultados esperados, mesmo seguindo todos os procedimentos sugeridos. Porém, ela tenta minimizar esse cenário, por meio das suas estratégias didáticas-pedagógicas. Estratégias que são indissociáveis, pois, caso contrário, tornaremos a AS um disfarce para o ETV. Isso mostra, ao professor que aplicá-la, a importância em deixar, durante as aulas, os estudantes resolverem os problemas das fichas, intervindo apenas quando necessário. Também, realizar a cada aula a plenária - momento em que os estudantes podem relatar e opinar - e assumir o Ensino Remedial como etapa importante, onde não são realizados apenas exercícios, mas o estudante, com a mediação do professor, formaliza conceitos e constrói conhecimento acerca dos temas abordados.

As vantagens de pautar sua prática na AS resultam na aquisição e no desenvolvimento da autonomia dos estudantes. Outrossim, por meio das relações interpessoais dos grupos, entendemos que os participantes desenvolvem formas de estudos que os tornam mais independentes em relação a própria aprendizagem. Além disso, podem aprimorar o senso crítico sobre as relações que são estabelecidas em sala de aula e do seu papel enquanto estudantes.

Professor, esperamos que o presente guia seja útil na sua atuação profissional. Caso não aplique a AS, que ao menos sirva como motivadora para romper com o ETV, fazendo da sala de aula um ambiente mais democrático e com verdadeiras oportunidades de aprendizagem.

Referências

- ANTON, Howard. **Cálculo**: Um Novo Horizonte - Vol. 1, 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- BALDINO, Roberto Ribeiro. **Assimilação solidária onze anos depois**. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. Unesp: Rio Claro, 1994.
- _____. **Assimilação Solidária**. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. Unesp: Rio Claro, 2001.
- _____. Assimilação Solidária: escola, mais-valia e consciência cínica **Educação em Foco**, Juiz de Fora, Editora da UFJF, v.3, n. 1, p. 39-65, mar. /ago. 1998.
- _____. **Ensino Remedial em Recuperação Paralela**. Seminário de Matemática e Educação Matemática. UNESP, campus Rio Claro. Ano VI, n. 145, agosto de 1993.
- _____. **Normas da Assimilação Solidária**. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. Unesp: Rio Claro, 1995.
- BALDINO, Roberto Ribeiro; FRACALOSS, Aline Schropfer. A História da Derivada Mariana: uma experiência didática. **Bolema**. Rio Claro (SP), v.26, n. 42B, p. 393-407, abr. 2012.
- BOULOS, Paulo. **Cálculo Diferencial e Integral**. Vol. 1. São Paulo: Pearson, 1999.
- GEOGEBRA, 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em 31/10/2017.
- NUNES, Raquel S.R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 78 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2006. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 21/07/2017.
- POMMER, Wagner M. **O Número de Euler**: Possíveis Abordagens no Ensino Básico. Seminários de Ensino de Matemática: SEMA, FEUSP, 2010. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf>. Acesso em: 21/07/2017.
- SILVA, Maria Regina Gomes da. **Avaliação e trabalho em grupo em assimilação solidária**: análise de uma intervenção. Rio Claro, 1997. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista.
- _____. Avaliação: um contrato de trabalho. **Interface**: Comunicação, Saúde, Educação. Botucatu (SP), v.2, n.2, p. 155 – 172, fev. 1998.
- STEWART, James. **Cálculo**. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. 1v, il.