UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE DO PARANÁ
***Campus* Cornélio Procópio**
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO

BRUNA DE SOUZA SENE BARBOSA

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL SEQUÊNCIA DIDÁTICA

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA DE CURVATURA POSITIVA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2017

BRUNA DE SOUZA SENE BARBOSA

PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL SEQUÊNCIA DIDÁTICA

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA DE CURVATURA POSITIVA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Produção Técnica Educacional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná – *Campus* Cornélio Procópio, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino.

Orientadora: Profa. Dra. Simone Luccas

CORNÉLIO PROCÓPIO – PR
2017

Ficha catalográfica elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UENP

d894br ung

de Souza Sene Barbosa, Bruna
GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA DE CURVATURA POSITIVA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA / Bruna de Souza Sene Barbosa; orientador Simone Luccas - Cornélio Procópio, 2017.
52 p.

Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Estadual do Norte do Paraná, Centro de Ciências Humanas e da Educação, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2017.

1. Geometria não Euclidiana. 2. Curvatura positiva. 3. Geometria Esférica. 4. Abordagem histórico-epistemológica. 5. Sequência Didática. I. Luccas, Simone, orient. II. Título.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Faz-se necessário, em nossa prática docente, utilizar-se das diferentes metodologias de ensino para trabalhar conteúdos em sala de aula de modo que envolva os alunos e os motivem para aprender. Para tanto, ao ensinar um conteúdo matemático alguns questionamentos devem ser levados em consideração, tais como: quando, onde, porque e em qual contexto determinado conteúdo originou-se e quais eram as necessidades da época para que tal descoberta tenha ocorrido. Nesta direção a abordagem metodológica de ensino histórico-epistemológica tem apontado respostas satisfatórias a algumas destas questões.

De acordo com D'AMORE (2007b, p. 3) uma concepção epistemológica é:

> um conjunto de convicções, de conhecimentos e de saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos dos indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam, os modos de estabelecer sua validade, bem como adquiri-los e então de ensiná-los e aprendê-los.

Ainda segundo o autor, o trabalho epistemológico define-se como "uma tentativa de identificar e de unificar concepções epistemológicas diferentes relativas a determinadas ciências, a movimentos intelectuais, a grupos de pessoas, a instituições, ou a culturas" (D'AMORE, 2007b, p. 3).

Assim, utilizar a abordagem histórico-epistemológica no Ensino da Matemática é fundamental para que o discente compreenda a natureza da disciplina e sua relevância no desenvolvimento da sociedade.

Desta forma, o presente estudo buscará responder à pergunta: *A abordagem histórico-epistemológica constitui uma metodologia que viabiliza o ensino da Geometria não Euclidiana de curvatura positiva a alunos da 1ª série do Ensino Médio?*

Considerando tal questionamento definimos como objeto de estudo a Geometria de Curvatura Positiva, também conhecida como Geometria Esférica, prevista nas Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná como conteúdo básico.

Com o intuito de salientar a importância deste assunto e cooperar com sua disseminação no Ensino Médio, definimos como objetivo geral de nossa pesquisa **investigar como se dá a elaboração de uma Sequência Didática para o Ensino da Geometria não Euclidiana de curvatura positiva – Geometria Esférica, segundo uma abordagem metodológica histórico-epistemológica, voltada para alunos da 1ª série do Ensino Médio.**

A partir desse objetivo geral, elegemos como objetivos específicos:

- Desenvolver estudos teóricos acerca da Geometria não Euclidiana, especificamente da Geometria Esférica;
- Investigar a abordagem histórico-epistemológica enquanto campo de pesquisa teórica e abordagem metodológica de ensino;
- Pesquisar aspectos teóricos da sistematização da didática da Matemática;
- Elaborar uma sequência didática envolvendo o conhecimento da Geometria Esférica, levando em consideração os preceitos da didática da Matemática;
- Realizar a análise dos dados oriundos da aplicação da sequência didática, à luz da Análise Textual Discursiva.

O Ensino das Geometrias na Educação Básica configura-se como um conteúdo de extrema importância, capaz de "desenvolver habilidades ligadas à forma, espaço, distância, percepções, entre outros, permitindo uma maneira de compreender, descrever e representar organizadamente, o mundo no qual vivemos" (CARVALHO; TUCCI, 2011, p. 3).

Apesar dos benefícios e da importância de trabalhar as Geometrias na Educação Básica, pesquisas evidenciam que seu ensino se encontra muito condensado. Segundo Lorenzato (1995), os professores deixam o ensino de Geometria em segundo plano por falta de formação adequada, dando prioridade a conteúdos algébricos e aritméticos.

Quando nos referimos à Geometria Euclidiana, apesar dos percalços em seu ensino, é possível constatar progressos ocorridos atualmente, pois de acordo com Pais (2006) o conteúdo já não é mais apresentado no final do livro didático. Hodiernamente esse assunto encontra-se no início ou distribuído ao longo de todo o livro, o que colabora para oferecer a devida importância ao conteúdo. Porém, o autor deixa claro que apenas a alteração da localização do conteúdo no livro não é suficiente, devendo o educador apresentar atitudes pedagógicas favoráveis à valorização da matéria.

O ensino das Geometrias não Euclidianas depara-se com obstáculos ainda maiores. Muito embora esteja inserido nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE (PARANÁ, 2008), da Rede Pública Estadual, como conteúdo a ser abordado na disciplina de Matemática, ainda é pouco trabalhado em sala de aula, resultando no desconhecimento do aluno em relação ao assunto e na negligência de professores que não dão a ela o devido tratamento.

Dentre as diferentes Geometrias não Euclidianas que deveriam ser abordadas no Ensino Médio, encontram-se a Geometria Esférica, Hiperbólica, Geometria dos Fractais e Geometria Projetiva.

Apesar da orientação em se trabalhar com o conteúdo, os educadores poucas vezes utilizam-no em sua prática e, de acordo com Brum e Schuhmacher (2013), um dos fatores associado à objeção em trabalhar com a Geometria Esférica em sala de aula está atrelado à formação inicial deficitária do professor, pois os cursos de Licenciatura em Matemática não incluíam em suas ementas as Geometrias não Euclidianas.

Como se não bastasse a formação insuficiente, Brum e Schuhmacher (2013) enfatizam o fato de que a maioria dos professores apoiam-se demasiadamente no livro didático para preparar suas aulas, o que se configura um problema, pois grande parte destes livros não faz menção às Geometrias não Euclidianas.

Assim, com a intenção de contribuir para amenizar o contexto ora descrito, a Geometria não Euclidiana, com ênfase na Geometria Esférica, foi definida como tema desta pesquisa, a fim de salientar sua importância e colaborar para sua disseminação.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA PARA O DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

De acordo com Zabala (2010), um dos principais objetivos do docente é melhorar, cada vez mais, sua prática educativa. Essa competência pode ser adquirida por meio do conhecimento, da experiência, e de uma prática baseada na reflexão da ação e para tanto, necessitamos de referenciais teóricos que colaboram para que a análise da ação educativa seja efetiva.

Se a prática reflexiva for um objetivo que almejamos atingir, devemos levar em conta que o ensino requer ações anteriores e posteriores, ou seja, requer o planejamento, a aplicação e a avaliação da ação (ZABALA, 2010).

Assim, partindo deste princípio processual da prática educativa, uma das etapas que compõem o processo de ensino e aprendizagem são as denominadas atividades ou tarefas. Por atividades ou tarefas consideramos qualquer ação praticada para favorecer a aprendizagem do aluno, podendo ser: um debate, exercícios, pesquisas, leitura de textos, observações, entre outros.

As atividades propostas para o ensino são capazes de proporcionar diversos benefícios, tanto para o aluno quanto para o professor, visto que é a partir delas que podemos analisar o ensino e a aprendizagem dos conteúdos. Cada uma apresentará um objetivo diferente, ou seja, atividades propostas para serem realizadas individualmente possui um valor diferente daquelas propostas para serem realizadas em grupo.

Desta forma, para melhor conduzir o processo de ensino e aprendizagem, é importante que cada conteúdo estudado disponha de uma gama diferenciada de atividades, haja vista que é insuficiente aplicar uma única tarefa ou um único tipo de atividade para avaliar o desempenho do aluno na aprendizagem de conteúdos.

Levando em conta a importância que as atividades assumem quando as inserimos em uma sequência sistematizada, reconhecemos uma nova unidade de investigação, chamadas de sequências de atividades ou sequências didáticas[1], que segundo Zabala (2010, p. 18) “permitirá o estudo e a avaliação sob

[1] Há outros autores que discorrem a respeito de Sequência Didática, porém, nesta pesquisa, o termo será utilizado no sentido em que Zabala (2010) apresenta.

uma perspectiva processual, que inclua as fases de planejamento, aplicação e avaliação".

De acordo com Zabala (2010, p. 18), uma sequência didática corresponde a "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e fim conhecidos, tanto pelos professores como pelos alunos".

Os exercícios que compõem a sequência didática são organizados com nível de complexidade gradativo visando o aprofundamento da aprendizagem do educando em relação ao conteúdo abordado. Um ponto forte da sequência é que ela possibilita inserir as três etapas da prática reflexiva: o planejamento, a aplicação e a avaliação (ZABALA, 2010).

Para elaborar uma sequência didática rica em atividades diferenciadas para atingir objetivos distintos, explicaremos na próxima seção a respeito das tipologias de conteúdos a serem ensinados. São elas que definem os tipos de atividades existentes nas sequências.

Os conteúdos factuais equivalem ao "conhecimento de fatos, acontecimentos, situações, dados e fenômenos concretos e singulares" (ZABALA, 2010, p. 41). Esses conteúdos são aqueles memorizados, assim como datas de acontecimentos históricos, nomes dos continentes de nosso planeta, localização de oceanos, fórmulas matemáticas, entre outros.

Os conteúdos factuais são internalizados pelo aprendiz quando este pode reproduzi-lo em sua forma literal, todavia a memorização do conteúdo não significa, necessariamente, a compreensão do mesmo. De acordo com Lucas (2010, p. 54), "as atividades utilizadas neste tipo de conhecimento baseiam-se em cópias por meio das quais os conteúdos são integrados às estruturas do conhecimento".

Tais conteúdos se referem "ao conjunto de fatos, objetos ou símbolos que têm características comuns" (ZABALA, 2010, p. 42). Nestes conteúdos, o aluno deverá ser capaz de identificar o objeto de estudo de acordo com suas definições, por exemplo, classificar formas geométricas, e para isso, deverá ter conhecimento do conceito de Geometria.

Conteúdo procedimental é "um conjunto de ações ordenadas com um fim, ou seja, dirigidas para a realização de um objetivo. São conteúdos procedimentais: ler, desenhar, calcular, observar, classificar, recortar, saltar, inferir, espetar, etc." (ZABALA, 2010, p. 44). De acordo com o autor, para a realização de cada uma dessas ações, são necessárias habilidades particulares.

Por fim, os conteúdos atitudinais referem-se às atitudes que o aluno toma frente a uma situação-problema. Sendo assim, englobam vários conteúdos, que Zabala (2010) divide em três categorias diferentes e, ao mesmo tempo, integradas entre si:

- Grupo dos valores: são os princípios ou ideias que possibilitam a uma pessoa emitir suas concepções a respeito de condutas e seus sentidos. São exemplos de valores: "solidariedade, o respeito aos outros, a responsabilidade, a liberdade, etc." (ZABALA, 2010, p. 46).
- Grupo das atitudes: é a maneira como cada indivíduo reage à situações de acordo com seus juízos de valores. Alguns exemplos: participar das atividades escolares, respeitar seus colegas de classe, entre outros.
- Grupos das normas: compreende as regras de comportamento a serem seguidas em determinadas situações e em diferentes grupos sociais; é a consciência do que pode ou não fazer em determinados grupos.

Como anunciado anteriormente o grupo dos valores, das atitudes e das normas são distintos, mas possuem relações entre si, e de acordo com Zabala (2010, p. 47), "cada um deles está configurado por componentes cognitivos (conhecimentos e crenças), afetivos (sentimentos e preferências) e condutuais (ações e declarações de intenção)".

No âmbito das avaliações, cada tipo de conteúdo possui uma forma particular de avaliação. Assim sendo, ao avaliar os factuais, fica claro que o professor não almeja apenas a memorização da informação, mas que esta tenha um significado, que o aluno possua conhecimentos inerentes à informação e à articulação dela com diferentes contextos (ZABALA, 2010).

Quando há a necessidade de indagar sobre os fatos, a atividade mais adequada para fazer essa avaliação é uma simples pergunta. A agilidade e a objetividade do aluno em respondê-la, nos esclarece a respeito do que o aluno sabe e nos orienta a como ajudá-lo. Esta avaliação pode ser feita por meio de sequência de atividades, provas escritas, dinâmicas grupais ou avaliação oral (ZABALA, 2010).

Identificar a aprendizagem de conteúdos conceituais não é tarefa fácil, pois é inapropriado dizer que a aprendizagem de um conteúdo conceitual está concluída. Sempre haverá um aluno com um conhecimento mais profundo que o outro, desta forma, enfrentamos uma maior dificuldade em avaliar um conteúdo conceitual. O professor deve estabelecer qual é o grau de conhecimento a respeito de determinados conceitos e avaliar segundo estes objetivos.

Desta forma, o método mais apropriado para avaliar conteúdos conceituais é a observação por meio de apresentações de trabalhos, discussões, trabalhos grupais ou outras atividades que instigue o aluno a verbalizar a respeito do assunto. É possível também se utilizar de provas escritas, mas devemos ter consciência de que este instrumento possui limitações e há a necessidade de formulá-la a fim de minimizar estes efeitos.

Os conteúdos procedimentais implicam em saber fazer, ou seja, são analisados em contextos de aplicação dos conteúdos factuais e conceituais. Para realizar a avaliação do conteúdo procedimental, podem ser utilizadas provas quando se refere a desenhos, escritas, aplicação de fórmulas, representações gráficas, classificação de informações, entre outros.

Porém, na maioria das situações, utilizar-se de provas escritas não é o caminho. De acordo com Zabala (2010, p. 207) é necessário propor "[...] atividades abertas, feitas em aula, que permitam um trabalho de atenção por parte dos professores e a observação sistemática de como cada um dos alunos transfere o conteúdo para a prática" (ZABALA, 2010 p. 207). Assim, é mais prudente propor tarefas que obriguem os alunos a expor suas resoluções, fazendo com que os conteúdos procedimentais possam ser observáveis pelo docente.

Enfim, chegamos nos conteúdos atitudinais que são aqueles que se referem às atitudes do estudante frente a uma situação conflitante e, avaliar esses conteúdos é um trabalho mais complexo em relação aos demais. Segundo Zabala (2010), é necessário propor situações problemas que forcem os alunos a tomar decisões e é partir daí que o professor, por meio da observação, poderá avaliar seu comportamento.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Sequência Didática proposta em nossa pesquisa para os alunos da 1ª série do Ensino Médio visa apresentar o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas de curvatura positiva e para tanto, aborda os Postulados de Euclides e as discussões a respeito do quinto Postulado; o conceito de retas paralela; apresenta as diferentes curvaturas de uma superfície e todo um desenvolvimento histórico que desencadeia nas Geometrias não Euclidianas, com foco na Geometria Esférica.

A seguir, apresentamos uma visão geral a respeito dos conteúdos cobrados em cada encontro.

- **Primeiro Encontro – Geometria Plana:** foram propostas atividades com os Potulados de Euclides, visto que foi a partir das discussões do quinto Postulado que desenvolveram-se novas Geometrias, denominadas Geometrias não Euclidianas, além de apresentar o conceito de retas paralelas, a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície plana e aguçar a curiosidade dos alunos a respeito de uma nova Geometria por meio de uma breve atividade prática.
- **Segundo Encontro – O desenvolvimento de uma nova Geometria:** apresentamos um texto histórico referente ao desenvolvimento da Geometria não Euclidana, começando pelos Postulados de Euclides e alguns matemáticos que se envolveram na tentativa de provar o quinto Postulado como um Teorema. Contudo, todas essas tentativas de demonstração evidenciaram novas Geometrias, começando pela Gemetria Hiperbólica até chegar na Geometria Esférica.

A fim de estimular uma aprendizagem efetiva e proporcionar um maior interesse em compreender o texto histórico, propusemos 18 perguntas que foram respondidas no decorrer da dinâmica, bem como especificadas nas regras do jogo.

- **Terceiro Encontro – Geometria Esférica**: apresentamos os três tipos de curvaturas e a Geometria sendo: Geometria Plana aplicada na curvatura nula, a Geometria Hiperbólica em superfícies de curvatura negativa e a Geometria Esférica em superfícies de curvatura positiva. Com o auxílio de uma bola de isopor e elásticos, conceitos da Geometria Esférica foram apresentados, tais como: retas ilimitadas; inexistência de retas paralelas; circunferência máxima; geodésicas e elementos notáveis da superfície esférica.

- **Quarto encontro – Geometria esférica - área e volume: foi** abordada a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico e a classificação em relação a seus ângulos e lados. Foram propostas atividades que exploraram a fórmula da área e volume da superfície esférica.

3 PRODUÇÃO TÉCNICA EDUCACIONAL

O produto técnico educacional apresentado neste documento é parte integrante da dissertação de mestrado institulada: **Geometria não Euclidiana de curvatura positiva:** uma proposta de sequência didática. Disponível em <http://www.uenp.edu.br/mestrado-ensino>. Para maiores informações, entre em contato com Bruna de Souza Sene Barbosa pr meio do e-mail: bruna.barbosa02@hotmail.com.

Em seguida, apresentamos na íntegra a Sequência Didática **Geometria não Euclidiana de Curvatura Positiva.**

Quadro 1 – Orientações para o primeiro encontro

Título da Atividade	**Geometria Euclidiana**
Objetivos da aula	* Apresentar os cinco Postulados de Euclides e revelar as discussões ocorridas em torno do quinto Postulado; * Compreender o conceito de retas paralelas; * Determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície plana e na superfície de curvatura positiva.
Duração	2 h/a
Materiais necessários	* régua, compasso, transferidor rígido e outro flexível; * bexiga; * dicionário ou dispositivo móvel; * Mapa Múndi.
Estratégia	Será iniciada a aula com uma atividade diagnóstica a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo desenhado em uma superfície plana. Será solicitado para que os alunos construam, utilizando régua e compasso, um triângulo equilátero e obtenham, com o transferidor, a soma dos ângulos internos deste triângulo. Logo em seguida, outros dois triângulos serão apresentados para que o aluno, utilizando seu transferidor, determine a soma dos ângulos internos destes triângulos. Nestas atividades, o aluno confirmará que a soma dos ângulos internos de um triângulo plano é igual a 180°. Além disso, o professor poderá verificar se o aluno é capaz de trabalhar com os materiais de desenho. Logo após, será solicitado que os alunos tracem um triângulo em uma bexiga e meçam seus ângulos internos para verificar que essa soma é maior que 180°. Será proporcionado um tempo para que os discentes possam discutir a respeito do que acabaram de descobrir. O aprofundamento deste assunto (triângulo traçado em uma superfície diferente da plana) se dará a partir do segundo encontro; a questão fica como uma atividade para despertar a curiosidade para novas aprendizagens. A seguir, será abordada a história de Euclides (~325-260 a. C.), discorrendo brevemente a respeito da obra “Os Elementos” e sobre os famosos cinco postulados. Após o texto, será solicitado que os alunos utilizem seu dicionário ou seu dispositivo móvel para procurar o significado das palavras “axioma, postulado e teorema” e espera-se que os mesmos cheguem à conclusão que axioma e postulado têm significados muito semelhantes, chegando a ser consideradas sinônimas[2]. Solicitaremos que cada aluno desenhe em seu material a sua interpretação do quinto postulado e após para alguns deles apresentá-las no quadro de giz; será proporcionado um momento de discussão para que seja possível chegar na representação mais próxima do correto. Por fim, apresentaremos o substituto do quinto postulado proposto por John Playfar.
Avaliação	A primeira pergunta da Sequência Didática tem caráter diagnóstica a fim de verificar se o aluno possui conhecimento prévio a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície plana. A avaliação se dará durante todo o processo da realização da sequência didática proposta. Em todos os encontros serão observados:

[2] “Salienta-se que as proposições admitidas sem demonstração são denominadas por axiomas ou postulados, e as demais, aquelas demonstradas, são ditas teoremas” (ZANELLA, 2013, p. 22).

	* capacidade que o aluno possui em socializar os resultados obtidos com os demais colegas; * a persistência em alcançar os resultados mesmo diante de dificuldades; * o envolvimento do aluno para resolver as atividades propostas; * o comprometimento do aluno ao preencher avaliação de rotina entregue no final do encontro. As atividades e a avaliação deverão ser executadas pelos alunos a fim de nortear a prática do professor durante toda a aplicação da Sequências Didáticas favorecendo possíveis adequações no decorrer do processo. Neste primeiro encontro a avaliação terá caráter formativo, no entanto pode ser atribuída uma nota pela realização das atividades (o valor dessa nota fica a critério do professor), independentemente do aluno ter realizado adequadamente as atividades. Ao final das atividades será proposta uma atividade avaliativa “Refletindo um pouco”, cujo objetivo é coletar informações a respeito das impressões dos alunos. A avaliação, de caráter formativo, para a qual o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min.

Fonte: Os Autores (2017)

Geometria Euclidiana

Na Geometria Plana, qual é a soma dos ângulos internos de **qualquer** triângulo?

1. Para responder a esta pergunta, vamos construir um triângulo equilátero seguindo o roteiro abaixo. Você precisará de régua e compasso.

1°) Trace um segmento de reta de 4 cm e marque os pontos extremos A e B;

2°) Pegue o compasso e com a ponta seca em A, abra até o ponto B e trace uma semicircunferência;

3°) Agora, com a mesma abertura e a ponta seca em B, faça uma outra semicircunferência que corta a primeira em C;

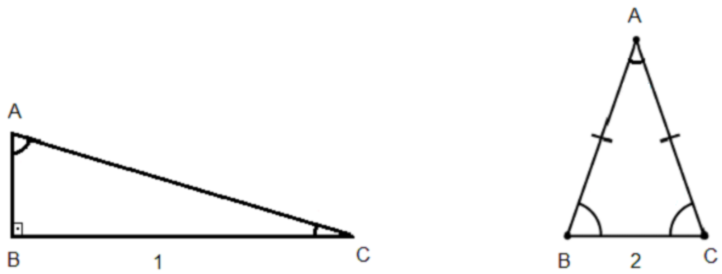
4°) Ligue os pontos.

a) Com o transferidor, meça cada ângulo e determine a soma dos ângulos internos deste triângulo.

---

b) Dados os triângulos a seguir, determine a soma de seus ângulos internos.

Figura 01 – Triângulos



Fonte: Adaptado de: http://www.estudarmatematica.pt/2014/02/triangulo-equilatero-isosceles-e.html (2014)

c) Os triângulos acima são iguais? O que você observou em relação aos ângulos e à soma dos ângulos internos dos triângulos dados?

____

____

____

d) Será que é possível construir um triângulo que possua a soma de seus ângulos internos maior que 180°? Justifique.

____

____

____

Lembre-se que a Geometria Plana é desenvolvida em uma superfície plana, porém existem outros tipos de superfície.

2. Verifique se a resposta que você colocou na pergunta “1. d” é sempre verdadeira em qualquer superfície. Para isso, faça o que se pede:

❖ Na bexiga que você recebeu, construa um triângulo qualquer. Encha a bexiga na medida que preferir. Com o transferidor flexível, meça cada ângulo interno deste triângulo e responda:

a) Qual é a soma dos ângulos internos do seu triângulo?

____

____

b) O que você observou entre a soma dos ângulos internos do triângulo que você construiu na questão 1 e do triângulo desenhado na bexiga?

____

____

____

Momento de discussão... Socialize sua resposta com seus colegas.

c) De acordo com o que você acabou de analisar, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos de todo triângulo é sempre igual a 180°? Justifique.

____

____

____

É muito provável que essas informações sejam novidade para você, certo?! Devem ter lhe deixado intrigado!!!

O que realizamos há pouco, foi a construção de um triângulo em uma superfície diferente da plana, na qual alguns conceitos e regras mudam. As proposições e teoremas aplicados na Geometria fundamentada na superfície plana não se aplicam em outras superfícies como a de curvatura positiva.

Bom, mas essas informações serão exploradas mais adiante.

O desenvolvimento de uma nova Geometria é devido a muitos matemáticos da antiguidade, isso é uma longa história iniciada por Euclides de Alexandria (III a.C.).

Vamos conhecer essa história desde o início?!

Como tudo começou...

Tudo começou com Euclides, um matemático que exerceu muita influência no ensino da Geometria Plana. Pouco se sabe a respeito de sua vida, segundo Gomes (2014), Euclides viveu por volta de 325 a.C. e 260 a.C. e ministrava aulas na Escola Platônica em Atenas.

Euclides é autor de "Os Elementos", um compêndio composto de 13 livros, divididos entre Geometria Plana, Teoria dos Números e Geometria Espacial. O Livro I, apresenta 23 definições, 5 axiomas, os famosos 5 postulados e 48 teoremas.

3. No texto acima há três palavras que não são muito utilizadas em nosso cotidiano: axioma, postulado e teorema. Afim de compreender melhor o texto, procure no dicionário o significado de:

Axioma:

____

____

Postulado:

____

____

Teorema:

____

____

O que podemos deduzir em relação a Postulados e Axiomas?

Fonte: http://www.comparto.com.br/portal/voce-sabe-falar-a-lingua-do-parto/

4. Com base no que acabou de descobrir, classifique cada afirmação abaixo em Postulado ou Teorema:

a) Podemos descrever um círculo possuindo qualquer centro e qualquer raio: ____________________

b) Todos os ângulos retos possuem 90°: ____________________

c) Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem as mesmas medidas: ____________________

d) Existem pontos que pertencem a uma reta qualquer do espaço e outros que não pertencem a ela: ____________________

e) Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. ____________________

f) Se duas retas (r e s) em um plano são cortadas por outra reta c tal que os ângulos (α e β) de um mesmo lado de c somam um valor menor que 180°, então as retas r e s, quando prolongadas do lado dos ângulos α e β, irão se encontrar em algum ponto. ____________________

5. No Livro I de "Os Elementos", Euclides apresenta cinco Postulados, os quais estão elencados abaixo:

I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

III. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

IV. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

V. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-

> se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 8).

Em seu ponto de vista, os cinco Postulados de Euclides são realmente de fácil compreensão e não necessitam de demonstrações? Justifique.

6. Foram diversos os matemáticos que trabalharam durante mais de 2000 anos em busca da demonstração do quinto Postulado, a fim de certificar se aquele era realmente um Postulado ou se tratava de um Teorema.

a) De acordo com sua interpretação, demonstre o quinto Postulado de Euclides:

b) Desenhe sua demonstração no quadro de giz.

[3] Debate com a turma a respeito de algumas demonstrações desenhadas no quadro de giz.

c) Após a discussão com a turma, represente abaixo a demonstração definitiva do quinto Postulado.

[3] **Fonte:** https://publicdomainvectors.org/pt/vetorial-gratis/Imagem-vetorial-de-bal%C3%A3o-lados-esquerdo/16342.html

7. O quinto Postulado de Euclides, conhecido mais tarde como Postulado das Paralelas, também pode ser expresso por: Por um ponto fora de uma reta r há apenas uma reta paralela à reta r. Este substituto proposto pelo Matemático e Geólogo escocês John Playfair (1748-1819) é o mais utilizado, inclusive nos livros didáticos.

Vamos localizar no Mapa fixado no quadro de giz o local que John Playfair nasceu? Agora, localize o local do nascimento de Euclides.

a) Em sua opinião, porque John Playfair (1748-1819) criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides?

____

____

____

b) Agora, levando em consideração o substituto de Playfair para o quinto Postulado, você seria capaz de fazer o esboço dele?

 [4]Prontinho, você construiu duas retas paralelas. Parabéns!!! 

c) Mas afinal, o que são mesmo retas paralelas?

____

____

[4] **Fonte:** https://www.emojistickers.com/products/party-popper

REFLETINDO UM POUCO

Encontro: ______ Tema da Aula: ___________________________

Nome:____

1. O que você aprendeu neste encontro?

____

____

____

2. Elenque as facilidades que você teve neste encontro.

____

____

____

3. Quais foram as dificuldades que você teve neste encontro?

____

____

____

4. A história da Matemática presente neste encontro facilitou a sua aprendizagem?

____

____

____

5. Comente sobre a aula de hoje.

____

____

____

Quadro 2 – Orientações para o segundo encontro

Título da Atividade	Jogo: **O desenvolvimento de uma Nova Geometria**
Objetivos do Jogo	* Mostrar o desenvolvimento de uma nova Geometria denominada Geometria não Euclidiana; * Relacionar a Geometria Hiperbólica e Esférica com a Geometria Euclidiana, a partir da negação do quinto postulado de Euclides; * Relacionar a Geometria Esférica com a negação da existência de retas paralelas.
Duração	2h/a
Materiais necessários	* Mapa Múndi *Caixa para armazenamento dos cartões; * Bombons e balas; * Campainha de mesa; * Tinta guache; * Cronômetro; * Cartões contendo as perguntas.
Estratégia	Para a realização do jogo, é importante realizar coletivamente a leitura do texto “O desenvolvimento de uma nova Geometria”; O docente fará a leitura das regras do jogo para seus alunos; O professor deverá ter em mão as regras do jogo, as perguntas e suas respectivas respostas; Fica a critério utilizar tinta guache, campainha de mesa e/ou prêmios no final do jogo para a equipe vencedora.
Avaliação	Neste encontro a avaliação terá caráter formativo, com valor a ser determinado pelo professor, atribuídos aos alunos que se envolverem no jogo proposto, participando de todas as etapas ativamente. Também será avaliado o comprometimento do aluno ao preencher a atividade “Refletindo um pouco”, entregue no final do encontro. Cujo objetivo é coletar informações a respeito das impressões dos alunos. A avaliação será de caráter formativo, e o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min.

Fonte: Os Autores (2017)

Regras do Jogo – O desenvolvimento de uma nova Geometria

- Dividir a classe em duas equipes, cada qual em um lado da sala de aula;
- Entre as equipes, no centro da sala de aula, coloque a campainha de mesa sobre uma carteira;
- O/A professor(a) será responsável por realizar as perguntas e anotar a pontuação de cada equipe no quadro de giz;
- Em cada extremo da carteira, ficará um componente de cada equipe que deverá responder à pergunta da vez;
- Todos os alunos são obrigados a participar como titular pelo menos uma vez;
- O aluno eleito para responder à pergunta da rodada, deverá ter uma de suas mãos para trás e a outra sobre sua orelha;
- Aleatoriamente, o professor pega um cartão da caixa e faz a pergunta;
- O primeiro a apertar a campainha de mesa tem a chance de consultar o texto e responder à pergunta em até 30 segundos, sem a ajuda da equipe (lembrando que nesse momento todos os alunos podem consultar o texto em busca da resposta);
- Caso o aluno não consiga responder no tempo definido, a equipe poderá ajudá-lo em até 10 segundos;
- Se a resposta estiver incorreta, a outra equipe tem a chance de responder, respeitando o mesmo tempo dado à primeira equipe;
- Se a segunda equipe também responder incorretamente ou ultrapassar o tempo estipulado, a equipe adversária pontua, devendo o cartão pergunta ser devolvido na caixa;
- Pontua aquele que responder corretamente dentro do prazo estipulado;
- O jogador que acertar a resposta tem o direito de pintar o rosto de seu adversário com tinta guache;
- Vence a equipe que somar mais pontos;
- Cada aluno da equipe vencedora receberá um bombom e os da outra equipe, uma bala.

Materiais necessários

- Caixa para armazenamento dos cartões;
- Bombons e balas;
- Campainha de mesa;
- Tinta guache;
- Cronômetro;
- Cartões contendo as Perguntas.

O Desenvolvimento de uma Nova Geometria

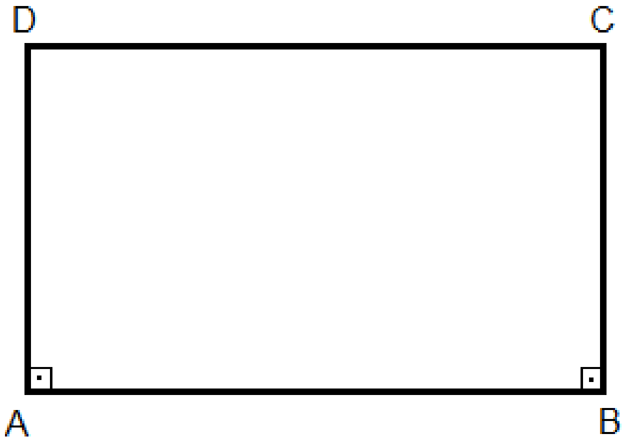
Vimos na aula passada que Euclides de Alexandria (~325 a. C. a 260 a. C.) foi o autor de um compêndio intitulado “Os Elementos”, composto de 13 livros. No Livro I há tópicos referentes à Geometria Plana e o polêmico quinto Postulado, conhecido também como Postulado das Paralelas, podendo ser expresso por: “Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta” (EVES, 2011 p. 539). Este substituto proposto pelo matemático John Playfair (1748-1819) é o mais utilizado, inclusive nos livros didáticos por ser de fácil compreensão.

A discussão a respeito do quinto Postulado é muito antiga, Ptolomeu I (século II) já tentava demonstrá-lo como um teorema, assim como Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Carl Frederich Gauss (1777 - 1855), János Bolyai (1802 - 1860) e Nikolai Lobachevsky (1793 - 1856).

De acordo com Eves (2011), Girolamo Saccheri foi um jesuíta nascido em São Remo na Itália autor da primeira publicação póstuma “*Euclides Livre de Toda Imperfeição”*, em 1773, de um estudo verdadeiramente científico a respeito do quinto postulado de Euclides.

Nesta obra, Saccheri admite as 28 proposições de Euclides e a partir disso realiza o estudo do quadrilátero demonstrado na Figura 1 abaixo:

Figura 1 - Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Os Autores (2017)

No quadrilátero de Saccheri, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos retos e $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes. O trabalho rendeu diversas proposições interessantes resultantes da tentativa de negar o quinto postulado, uma delas seria que duas retas paralelas não são equidistantes, entre outras afirmações (CARMO, 1987).

Resgatando o trabalho de Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) também iniciou seus estudos na tentativa de contradizer o quinto postulado obtendo resultados estranhos, porém sem conseguir negar o postulado das paralelas.

Toda essa mobilização entorno do quinto postulado (É postulado ou teorema? É possível negá-lo ou não?), proporcionou vestígios de uma nova Geometria, denominada de Geometria não Euclidiana.

O matemático alemão Carl Frederich Gauss (1777 – 1855) já possuía conhecimento desta nova Geometria, pois estudava o postulado das paralelas e, em 1824, chegou à conclusão que não seria possível demonstrá-lo como um teorema e que uma nova Geometria poderia ser desenvolvida por meio desta dedução (BOYER, 2012). Gauss optou por não tornar público suas conclusões por receio da não aceitação de uma Geometria diferente da Euclidiana, considerada na época como verdade absoluta.

Poucos anos mais tarde, quase que simultaneamente, sem o conhecimento das pesquisas um do outro, János Bolyai e Nikolai Lobachevsky chegam às mesmas conclusões que Gauss já havia chegado em 1824 (CARMO, 1987). O primeiro, um matemático húngaro nascido em Kolozsvár, publicou suas conclusões em 1832 como apêndice de um livro de matemática de seu pai Farkas Bolyai.

Lobachevsky, um matemático russo nascido em Nizhny Novgorod, já havia publicado suas conclusões em 1829, no entanto, devido à falta de agilidade com que as novas informações se propagavam e devido aos obstáculos linguísticos, sua pesquisa permaneceu desprezada por anos.

Segundo Boyer (2012), devido ao fato dessa nova Geometria fugir do senso comum, o próprio Lobachevsky a chamou de “Geometria imaginária”. Em 1829 publicou seu artigo intitulado *“Sobre os Princípios da Geometria”*, determinando oficialmente a origem da Geometria não Euclidiana, mais especificamente da Geometria Hiperbólica (de curvatura negativa).

Neste documento, o matemático russo exibe uma hipótese que conflitava com o quinto Postulado de Euclides, a saber: por um ponto C fora de uma reta AB podem ser traçadas mais de uma reta no plano paralela a AB (BOYER, 2012).

Após o surgimento da Geometria Hiperbólica, era natural que se pensasse na existência de outra nova Geometria (COUTINHO, 2001), foi a partir de então que o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu a Geometria Esférica.

Filho de um pastor, nascido em Hanover na Alemanha, era tímido e tinha saúde debilitada. Possuía uma razoável condição financeira e seu pai foi seu educador até os 10 anos de idade. Estudou nas Universidades de Göttingen e de Berlim. Em 1849, Riemman concluiu seu doutorado na Universidade de Göttingen com uma tese extraordinária introduzindo as Superfícies de Riemann (EVES, 2011).

Em 1854 Riemann foi aceito pela Universidade de Gottingen como professor oficial não remunerado e para isso apresentou um artigo que contribuindo ricamente tanto para o desenvolvimento matemático quanto para o da física, pois apresentava possibilidades de novas geometrias e novos espaços.

Conhecido como Postulado de Riemann, quaisquer duas retas contidas em uma superfície curva se encontram em mais de um ponto (COUTINHO, 2001). A partir deste momento, propiciou-se o desenvolvimento da Geometria Esférica.

A Geometria Esférica é aquela aplicada em uma Superfície de Curvatura Positiva (Superfície Esférica). Esta Geometria possui definições diferentes das já estudadas por você, como por exemplo, a soma dos ângulos internos de um <u>triângulo plano</u> é igual a 180°, mas a soma dos ângulos internos de <u>um triângulo esférico</u> está entre 180° e 540°, sem assumir estes valores.

Vamos localizar no Mapa fixado no quadro de giz os locais de nascimento dos estudiosos que tentaram demonstrar o quinto Postulado de Euclides como um teorema? São eles: Ptolomeu I; Girolamo Saccheri; Johann Heinrich Lambert; Carl Frederich Gauss; János Bolyai; Nikolai Lobachevsky.

Cartões contendo as perguntas (para recortar e colar no papel cartão)

Dentre os cinco postulados de Euclides, qual foi aquele que causou mais polêmica? Porquê?	Porque John Playfair criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides?	John Playfair criou um substituto para o quinto Postulado de Euclides. O que dizia esse substituto?
Em 1829 foi determinado oficialmente a origem da Geometria não Euclidiana. Qual era o nome desta Geometria e em que tipo de curvatura ela se aplica?	Lobachevsky exibiu uma hipótese que conflitava com o quinto Postulado de Euclides. Qual era essa hipótese?	Qual era a intenção de Girolamo Saccheri quando iniciou seus estudos no intitulado “Quadrilátero de Saccheri”?
O trabalho de Girolamo Saccheri rendeu diversas proposições interessantes resultantes da tentativa de negar o quinto postulado. Uma dessa proposições é que...	Após os trabalhos de Saccheri, um suíço também iniciou estudos a fim de contradizer o quinto Postulado, porém não conseguiu atingir seu objetivo. Qual era o nome desse suíço nascido em 1728?	Foi possível demonstrar o quinto Postulado como um Teorema?
Qual foi um dos primeiros estudiosos a se prontificar a demonstrar o quinto Postulado? Em que século isso ocorreu?	As tentativas de Saccheri e Lambert de demonstrar o quinto Postulado, trouxe indícios de uma nova Geometria, denominada como ...	A Geometria Esférica é aplicada em superfícies que possuem que tipo de curvatura?
Dois matemáticos (Bolyai e Lobachevsky) desenvolveram uma nova Geometria em épocas bem diferentes. Porque eles não conheciam as pesquisas um do outro?	Porque o matemático alemão Carl Frederich Gauss (1777 – 1855) decidiu não publicar suas conclusões a respeito da demonstração do quinto Postulado de Euclides?	Quem foi o estudioso que desenvolveu a Geometria Esférica?
Na Geometria Esférica, o que diz o Postulado de Riemman?	A Geometria de Euclides é aplicada em superfícies Planas. E a Geometria Esférica é aplicada em qual superfície?	A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico está compreendida entre ...

REFLETINDO UM POUCO

Encontro: ______ **Tema da Aula:** ___________________________

Nome:____

1. O que você aprendeu neste encontro?

____

____

____

2. Elenque as facilidades que você teve neste encontro.

____

____

____

3. Quais foram as dificuldades que você teve neste encontro?

____

____

____

4. A história da Matemática presente neste encontro facilitou a sua aprendizagem?

____

____

____

5. Comente sobre a aula de hoje.

____

____

____

Quadro 3 – Orientações para o terceiro encontro

Título da Atividade	Geometria Esférica
Objetivos da aula	É esperado que o aluno: * Reconheça as diferentes curvaturas como sendo da superfície plana, hiperbólica e esférica; * Compreenda conceitos da Geometria esférica, tais como: geodésica, círculos máximos, círculos menores, elementos notáveis da esfera e Postulado de Riemann.
Duração	2 h/a
Materiais necessários	* bola de isopor; * elásticos.
Estratégia	Inicia-se a aula com uma atividade diagnóstica a respeito das superfícies de curvatura nula, positiva e negativa. É solicitado que os alunos definam cada curvatura tendo por base os exemplos presentes no próprio material entregue. Após a apresentação das curvaturas, é requisitado ao aluno que explique as diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica. Em seguida, são propostas atividades envolvendo conceitos da Geometria Esférica, que podem ser resolvidas com o auxílio dos materiais manipuláveis. Os conceitos trabalhados são retas finitas e ilimitadas, retas paralelas na superfície esférica, circunferências máximas e elementos notáveis na superfície esférica.
Avaliação	A primeira pergunta da Sequência Didática tem caráter diagnóstico a fim de verificar se o aluno possui conhecimento prévio a respeito das superfícies de curvatura nula, positiva e negativa. Neste terceiro encontro pode ser atribuído uma nota (com valor a ser determinado pelo professor) aos alunos, pela realização das atividades (independentemente de o aluno ter realizado adequadamente os exercícios) e pela entrega da atividade “Refletindo um pouco” preenchida no final da aula. Cujo o objetivo é coletar informações a respeito das impressões dos alunos. A avaliação será de caráter formativo, e o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min.

Fonte: Os Autores (2017)

Geometria Esférica

O quinto Postulado de Euclides (~325 – 260 a. C.) deu muito o que falar, vários matemáticos tentaram demonstrar o postulado como um teorema. Dentre os célebres matemáticos que tentaram essa demonstração, destacamos Proclus (410-485), Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), Gauss (1777 – 1855), Bolyai (1802 – 1860),
Lochevsky (1793 – 1856), entre outros.
Foi possível perceber que a tentativa de demonstrar o quinto postulado perdurou por muitos anos. O quinto postulado de Euclides era válido para a geometria plana, mas se considerássemos superfícies com diferentes curvaturas, outros conceitos deveriam ser formados.
As tentativas de demonstrar esse quinto postulado proporcionaram vestígios de novas Geometrias, conhecidas como Geometrias não Euclidianas.

No ambiente que nos cerca, nos deparamos com objetos que possuem diferentes curvaturas.


[17]

Mas espere aí!!

curvatura... Essa palavra não é estranha!

Mas o que significa? O que você entende por curvatura?

Discussão da turma.

Como eu estava dizendo há diversos objetos com diferentes curvaturas, como por exemplo:

- O apoio de madeira da sua carteira tem curvatura nula;
- Uma bola de futebol tem curvatura positiva;
- Uma corneta tem curvatura negativa.

1. De acordo com os exemplos citados, defina com suas palavras:

a) curvatura nula:

____

____

[5] Fonte: https://www.pinterest.pt/vickymayo/emoticons-emojis/

b) curvatura positiva:

____

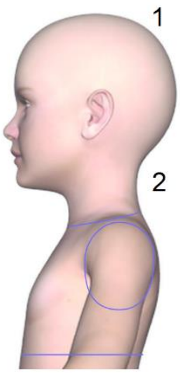
____

c) curvatura negativa:

____

____

2. Classifique cada objeto abaixo em curvatura nula, positiva ou negativa:

A)  ____________________ **Fonte:** https://pt.aliexpress.com/w/wholesale-spoon-wood.html	B)  ____________________ **Fonte:** https://pt.dreamstime.com/fotografia-de-stock-royalty-free-colher-baixo-ngulo-esquerdo-image211107	C)  ____________________ **Fonte:** http://queroimagem.blogspot.com.br/2012/06/bola-de-basquete-png.html
D)  ____________________ **Fonte:** http://www.palaciodaarte.com.br/madeira-mdf	E)  1)__________________ 2)__________________ **Fonte:** https://modailustrada.wordpress.com/	F)  ____________________ **Fonte:** http://www.casasbahia.com.br/Eletrodomesticos/FornodeMicroondas/Forno-de-Micro-ondas-Panasonic-Style-NNST674S-Inox-32L-4337649.html?recsource=busca-int&rectype=busca-21

Até este momento, é muito provável que você nunca tenha estudado os diferentes tipos de curvatura. É importante saber que:

- A <u>Geometria Euclidiana</u> é desenvolvida em uma superfície de <u>curvatura nula</u>;
- A <u>Geometria Hiperbólica</u> é desenvolvida em uma Superfície de <u>curvatura negativa</u>;
- A <u>Geometria Esférica</u> é desenvolvida em uma superfície de <u>curvatura positiva</u>.

Após o surgimento do primeiro tipo de Geometria não Euclidiana (Geometria Hiperbólica), era natural que se pensasse na existência de uma outra nova Geometria, foi a partir de então que o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu a Geometria Esférica (conhecida também geometria Riemanniana).
Ele apresentou, em 1854, um artigo para a Universidade de Gottingen, na Alemanha, contendo suas suposições sobre os fundamentos da geometria, apresentando possibilidades de novas geometrias e novos espaços, contribuindo ricamente tanto para o desenvolvimento matemático quanto para o da física. Foi a partir da Geometria Riemanniana que Albert Einstein pôde encontrar o contexto necessário para a teoria da relatividade (EVES, 2011).

3. Em seu ponto de vista, qual é a diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica?

____

____

Para resolver as atividades propostas a seguir você precisará de bola de isopor e elásticos. Chegou o momento de explorar a esfera. Mãos à obra!!

4. Imagine a seguinte situação: Caio e seu amigo resolveram dar a volta ao mundo percorrendo a linha do Equador. Ele disse que seguiria em linha reta indefinidamente.

a) Represente este percurso no espaço abaixo.

[6]

b) Represente, agora, em uma bola de isopor.

c) Quais são suas conclusões a respeito dessas duas representações que você acabou de traçar?

5. O segundo Postulado de Euclides afirma que: É possível “prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta” (BICUDO in Euclides, 2009, p. 98).
Na Geometria Riemanniana as retas são finitas, mas ilimitadas. Explique essa afirmação. (Dica: utilize a bola de isopor)

6. Na Geometria Esférica Riemann (1826-1866) contradiz o quinto Postulado de Euclides anunciando que não existem retas paralelas a uma reta dada e que “quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro” (COUTINHO, 2001, p. 73).
Você concorda que não existem retas paralelas na superfície esférica? Explique.

[6] **Fonte:** http://viajandonageo.blogspot.com.br/2015/03/mapa-mundi.html

Agora pegue a bola de isopor e elásticos.
Você deve refletir sobre como demarcar dois círculos máximos em sua esfera.
Esses círculos máximos têm algum ponto em comum? São paralelos?

[7] Momento de troca de ideias...

a) A partir das considerações feitas, se considerarmos círculos menores, existe paralelismo na esfera?

____

____

____

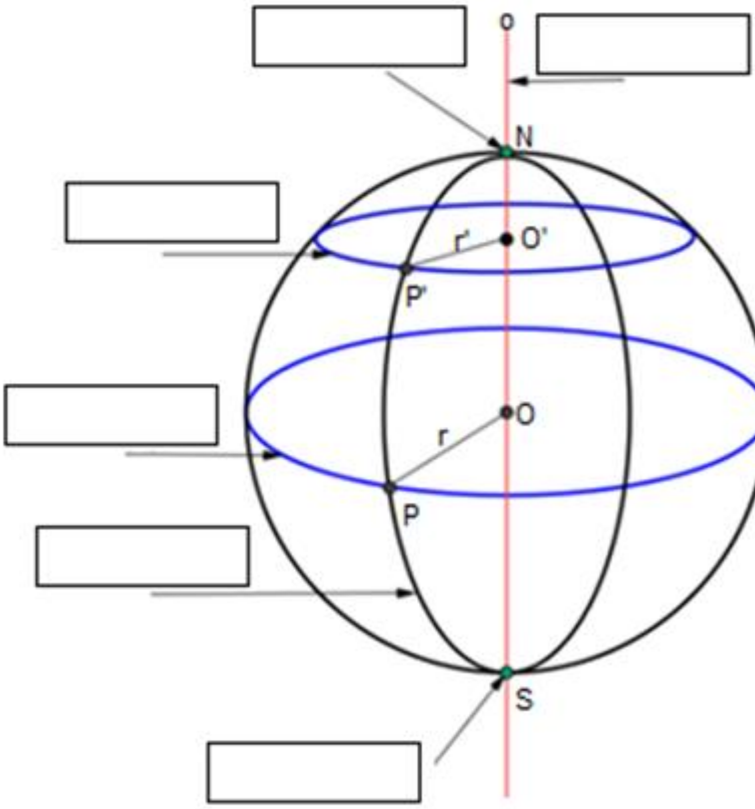
- ❖ Na Geometria Esférica a menor distância entre dois pontos é o arco de uma circunferência máxima, denominada **<u>Geodésica</u>**.
- ❖ **<u>Circunferência máxima</u>**: é aquela que possui o mesmo raio da esfera, ou seja, a maior circunferência possível de ser traçada na superfície*;*

Vamos conhecer os elementos notáveis da superfície esférica?

- ❖ *<u>Eixo:</u> Qualquer reta que passa pelo centro O;*
- ❖ *<u>Polos:</u> Ponto de intersecção entre o eixo e com a superfície esférica. Os polos são representados na esfera como Polo Norte (N) e Polo Sul (S);*
- ❖ *<u>Equador:</u> É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo;*
- ❖ *<u>Paralelo:</u> Plano perpendicular ao eixo e paralelo ao Equador;*
- ❖ *<u>Meridiano:</u> É uma semicircunferência máxima que liga os Polos e passa pelo eixo.*

[7] **Fonte:** http://www.comparto.com.br/portal/voce-sabe-falar-a-lingua-do-parto/

7. De acordo com as definições, nomeie cada elemento notável presente na superfície esférica.



8

8. Vivemos em um planeta cujo formato é esférico, no qual valem as regras da superfície de curvatura positiva, então porque o engenheiro ao desenvolver a planta de uma casa, segundo a Geometria Plana, trabalha com retas e não com geodésica?

____

____

____

[8] **Fonte:** ZANELLA, I.A.; **Geometria Esférica:** Uma proposta de Atividades com Aplicações. 2013. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

REFLETINDO UM POUCO

Encontro: ______ **Tema da Aula:** ___________________________

Nome:____

1. O que você aprendeu neste encontro?

____

____

____

2. Elenque as facilidades que você teve neste encontro.

____

____

____

3. Quais foram as dificuldades que você teve neste encontro?

____

____

____

4. A história da Matemática presente neste encontro facilitou a sua aprendizagem?

____

____

____

5. Comente sobre a aula de hoje.

____

____

____

Quadro 4 – Orientações para o quarto encontro

Título da Atividade	Geometria Esférica – Área e Volume
Objetivos da aula	* Reconhecer um triângulo esférico; * Determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico; * Explorar a área e o volume da superfície esférica.
Duração	2 h/a
Materiais necessários	* 02 bolas de isopor (uma maior e outra menor); * elásticos; * alfinetes.
Estratégia	Inicia-se a aula com um diálogo a respeito dos conteúdos aprendidos nas aulas anteriores. Em seguida, trabalhamos com a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na esfera, bem como com a apresentação de um triângulo trirretângulo. Logo após, são propostas atividades envolvendo soma dos ângulos internos, a área e o volume de uma superfície esférica.
Avaliação	Neste quarto encontro pode ser atribuída uma nota (com valor a ser determinado pelo professor) aos alunos, pela realização das atividades (independentemente de o aluno ter realizado adequadamente os exercícios). Ao final das atividades é proposta uma atividade avaliativa “Refletindo um pouco”, cujo o objetivo é coletar as impressões dos alunos entorno dos encontros realizados. Esta avaliação é de caráter formativo e o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min.

Fonte: Os Autores (2017)

Geometria Esférica – Área e Volume

[9] **Até o momento aprendemos que:**

[10]

***** Há superfícies de curvatura ___________, ____________ e ____________;

* A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo inserido na superfície plana é igual a ________.

E numa superfície esférica? _____________________

* O que mais aprendemos na aula passada?

TRIÂNGULOS

1. Com a bola de isopor maior em mãos, marque três pontos A, B e C não colineares sobre sua superfície. Ligue esses pontos e responda:

a) Que figura você formou? ____

b) Com o transferidor flexível meça os ângulos internos desse triângulo.

$\hat{A}$: _____ $\hat{B}$: _____ $\hat{C}$: _____

c) Determine a soma dos ângulos internos deste triângulo: __________________

2. Construa, no espaço abaixo, um triângulo plano que possua três ângulos retos:

a) Foi possível construir um triângulo com três ângulos retos nesta folha de papel? Justifique.

____

____

[9] **Fonte:** http://www.osinvicioneiros.com.br/2012/04/tres-cancoes-pra-lembrar.html
[10] **Fonte:** http://www.comparto.com.br/portal/voce-sabe-falar-a-lingua-do-parto/

3. Utilizando os materiais disponíveis para a realização das atividades, tente construir um triângulo que possua três ângulos retos na bolinha de isopor menor e responda:

a) Foi possível realizar a construção? ______________________________________

b) Qual é a soma dos ângulos internos deste triângulo esférico? ______________

c) Este triângulo possui os três lados iguais? Justifique.

____

____

d) Agora, com ajuda de seu colega e utilizando a bola de isopor, elásticos e alfinetes, construa o maior triângulo possível na bolinha de isopor. Qual é a soma aproximada dos ângulos internos deste triângulo esférico?

____

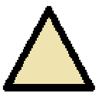
CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS


Classificação em relação a seus ângulos:

Retângulo: possui um único ângulo reto;

Birretângulo: possui dois ângulos retos;

Trirretângulo: possui três ângulos retos.



Classificação em relação a seus lados:

Retilátero: possui um lado medindo 90°;

Birretilátero: possui dois lados medindo 90°;

Trirretilátero: possui três lados medindo 90°.


ÁREA e VOLUME DA ESFERA

4. Para calcular a área de uma superfície esférica utilizamos: $A_S = 4\pi r^2$. Considerando a menor bolinha de isopor disponível e sabendo que seu raio mede aproximadamente 2,9 cm, determine sua área. (Dados: $\pi = 3{,}14$; A= área; r= raio)

5. Um artista plástico deseja colocar em uma de suas obras uma bola de gesso de 2,30 m de diâmetro, no entanto será necessário pintá-la de dourado. Calcule o custo com a tinta sabendo que o metro quadrado tem um custo de R$ 195,00.

6. O nosso Planeta possui aproximadamente 6.370 km de raio. Com base nessa informação determine:

a) a área da superfície coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente 3/4 da superfície esférica total.

Fonte: http://questoesdevestibularnanet.blogspot.com.br/2013/11/questoes-resolvidas-de-vestibulares_21.html

b) O volume da esfera. (Dados: $V = 4/3\pi r^3$)

REFLETINDO UM POUCO

Encontro: ______ **Tema da Aula:** ___________________________

Nome:____

1. O que você aprendeu neste encontro?

____

____

____

2. Elenque as facilidades que você teve neste encontro.

____

____

____

3. Quais foram as dificuldades que você teve neste encontro?

____

____

____

4. Comente sobre a aula de hoje.

____

____

____

Quadro 5 – Orientações Atividades Avaliativas

Título da Atividade	Atividades Avaliativas
Objetivos	A atividade “Refletindo a Respeito dos Encontros” tem como objetivo coletar as impressões dos alunos a respeito dos encontros realizados. A “Atividade Avaliativa” tem o objetivo de verificar a aprendizagem dos alunos com relação ao tema estudado
Duração	50 minutos
Estratégia	Após a aplicação da atividade “Refletindo a Respeito dos Encontros”, aplicar a “Atividade Avaliativa”. É permitido o usa da calculadora. Fica a critério do professor disponibilizar as fórmulas para a realização dos problemas que envolvem área e volume. O professor não deve intervir nas respostas dos alunos.
Avaliação	A atividade avaliativa “Refletindo a Respeito dos Encontros” é de caráter formativo e o principal objetivo é analisar a aprendizagem dos alunos e não o foco em notas. Duração: 10 min. A avaliação “Atividade Avaliativa” é de caráter somativo, para qual será atribuindo um valor (a ser determinado pelo professor). Às questões propostas que estiverem corretas serão atribuídas notas integrais; já as notas das questões parcialmente corretas corresponderão à essa parcialidade. Às questões incorretas não será atribuída nota. Duração: 40 min.

Fonte: Os Autores (2017)

REFLETINDO A RESPEITO DOS ENCONTROS

Encontro: ______ Tema da Aula: ___________________________

Nome:____

1. Você sabia que existem outras geometrias diferentes da plana? Justifique.

____

____

____

2. As atividades propostas nas aulas favoreceram sua aprendizagem? Comente.

____

____

____

3. A história da Matemática e os conteúdos presentes nas atividades foram claras e de fácil compreensão? Comente.

____

____

____

4. Qual foi sua maior dificuldade durante a realização das atividades?

____

____

____

5. O que você achou das aulas? Foram interessantes? Despertou sua curiosidade? Comente.

____

____

____

Atividade Avaliativa

Nome:____ **Data:** _________

1. Os Elementos foi uma obra que predominou por mais de dois mil anos no ensino da Geometria Plana. Qual era o nome do autor desta obra?

____

2. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo no plano é igual ______ graus.

3. Por que o quinto postulado de Euclides de Alexandria (~325 e 260 a.C.) causou tanta polêmica entre a comunidade científica?

____

____

____

4. Qual era o nome do matemático desenvolveu a Geometria Esférica?

____

5. Se um triângulo está inscrito em uma superfície esférica, a soma dos ângulos internos deste triângulo pode assumir valores entre ____________e ____________.

6. Dê, com suas palavras, a definição e cite um exemplo de curvatura:

Nula:

____

____

____

Positiva:

____

____

____

Negativa:

____

____

____

7. É possível traçar retas paralelas na esfera? Explique.

____

____

____

8. Determine o raio e o volume de uma esfera que possui área igual a 1808,64 u^2.

9. Uma fábrica de chocolates, visando aumentar suas vendas para o dia dos namorados, deseja fabricar bombons no formato de uma esfera. Para saber o custo dessa produção, precisa calcular a quantidade necessária de chocolate para o recheio. Sabendo que cada bombom tem 1,7cm de raio e será inteiro recheado de chocolate, calcule a capacidade desses bombons esféricos, considerando que a espessura da casca crocante é de 0,2cm.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Frente às novas tecnologias que divertem e satisfazem nossos alunos, ensinar bem requer a utilização de metodologias e recursos diferenciados a fim de fazer com que os estudantes se sintam motivados a aprender.

Acreditamos que esta Sequância Didática proporciona aos alunos da 1ª série do Ensino Médio o suporte necessário para aprofundar seus conhecimentos em relação às Geometrias não Euclidianas, sobretudo aquela de Curvatura Positiva, utilizando-se da história da Matemática e de materias manipuláveis diferenciados, possibilitando o enriquecimento das aulas e proporcionando novos conhecimentos.

Percebemos que, durante a aplicação desta Sequência Didática, as discussões e as trocas de ideias entre os alunos mostraram o interesse e excitação que as atividades provocaram nos pesquisados. O assunto inédito, a maneira progressiva como as atividades foram apresentadas e os materiais exigidos para o desenvolvimento desta, fez com a turma se mostrassem interessados em aprender.

A utilização da abordagem histórico-epistemológica evidenciou alguns benefícios, visto que nossos alunos demonstraram interesse e fascinação ao descobrir que a Matemática também apresentou obstáculos em seu desenvolvimento e que, durante um longo período de tempo, matemáticos de diferentes lugares do mundo entraram em conflitos de ideias, provando que o conteúdo que chega até a sala de aula não é algo pronto e acabado, afinal por trás do conhecimento que está posto hoje, houve envolvimento de diversos intelectuais que objetivavam suprir as necessidades de suas épocas. Desta forma, o professor proporciona a humanização da matéria (MATTHEWS, 1995).

Apresentar as Geometrias não Euclidianas, sobretudo a Geometria Esférica por meio da abordagem histórico-epistemológica mostrou-se eficaz na aprendizagem deste conteúdo, pois propiciou a compreensão da necessidade em desenvolver novas Geometrias.

Além disso, a Sequência Didática elaborada apresentou-se autosuficiente, uma vez que os alunos mostraram autonomia para realizar as atividades sem grandes intervenções do professor, permitindo com que este assumisse o papel de mediador e, desta forma, tornar a aprendizagem efetiva.

Em suma, os resultados da pesquisa evidenciam que a Sequência Didática elaborada e a abordagem de ensino utilizada mostraram-se eficientes no ensino das Geometrias não Euclidianas, com ênfase na Geometria Esférica, proporcionando aos estudantes – que se revelaram ativos no processo – a construção gradual do conhecimento.

REFERÊNCIAS

BICUDO, I. Introdução e tradução. In: Euclides, **Os Elementos**. São Paulo. Editora Unesp, 2009:.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: EDUSP, 2012.

BRUM, W.P.; SCHUHMACHER, E.; **Aprendizagem de Conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio sob a Perspectiva da Teoria da Aprendizagem Significativa Usando uma Sequência Didática.** Aprendizagem Significativa em Revista, Porto Alegre, v. 3, n. 2, p. 1-21, fev. 2014.

CARMO, M. P. do. Geometrias Não-Euclidianas. In: **Matemática Universitária**, São Paulo, n 6, dezembro de 1987, p 25-48. Disponível em: < http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n06/n06_Artigo02.pdf> Acesso em: 09 jul. 2013.

CARVALHO, M. A. S. TUCCI, A. M. F. C. **O ensino de geometria não euclidiana na educação básica.** In: Conferência Interamericana de Educação Matemática**.** Recife: CIAEM, ano XIII, 2011. Disponível em: <http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2625/816> Acesso em 20 nov. 2016.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não euclidianas**. 2. Ed. – Rio de Janeiro: Interciência, 2001

D'AMORE, B. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. **Bolema. Boletim de Educação Matemática**. Vol. 20, n° 28, 1179-205. ISSN: 0103-636X, 2007b.

EVES, H. Introdução à História da Matemática; tradução Hygino H. Domingues. 5ª Ed. – Campinas – SP: Editora da Unicamp, 2011.

LORENZATO, S. A. **Porque não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p 3-13.

MATTHEWS, M. R. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 12, n. 3, p. 164-214, 1995.

PAIS, C.L. **Estratégias de ensino de Geometria em livros didáticos de Matemática em nível de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental**. In: GT: Educação Matemática nº 19. Anais da Anped, 2006. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf> Acesso em 20 nov. 2016.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná.
Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. SEED: Curitiba, 2008.

ZABALA, A. **A prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998.

ZANELLA, I.A.; **Geometria Esférica:** Uma proposta de Atividades com Aplicações. 2013. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.